Mais programação dinâmica

CLRS 15.5

= “recursão–com–tabela”
= transformação inteligente de recursão em iteração

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

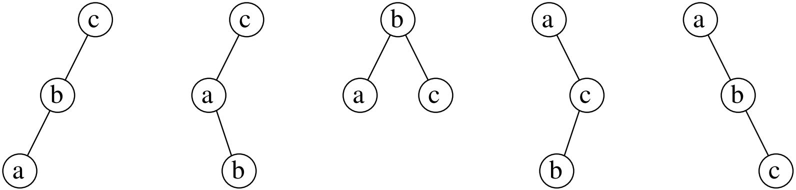
Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore binária de busca (ABB)?

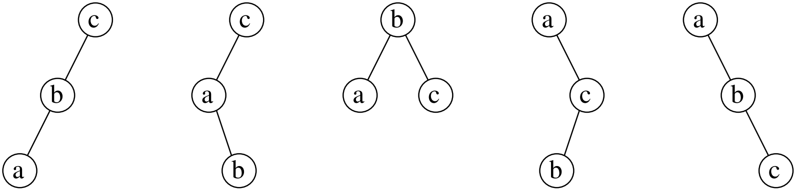
Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

Qual a melhor das ABBs?



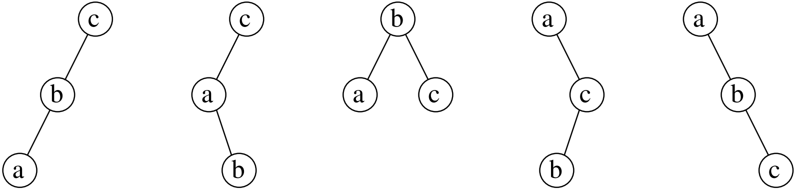
Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.



Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

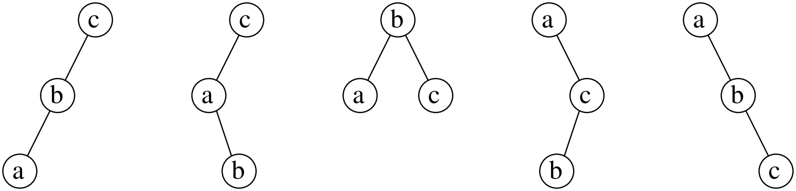


Número esperado de comparações:

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.



Número esperado de comparações:

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$ $\longleftarrow$ ABB ótima
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

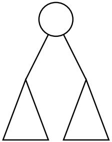
Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

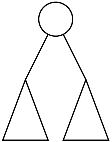
Problema (ABB Ótima): Dado $e[1\,..\,n]$, encontrar uma árvore binária de busca ótima com respeito a e.

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima
são ABBs ótimas.

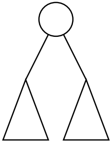
Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

Subestrutura ótima

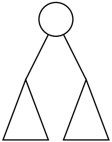


Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima
são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima
são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[i,j]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i \mathinner{.\,.} j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1 \mathinner{.\,.} j]$
$s[j] - s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i \mathinner{.\,.} j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k{-}1] + c[k{+}1,j]\} + s[j] - s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i\le k\le j}\{c[i,k{-}1]+c[k{+}1,j]\}+s[j]-s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Para calcular s:

```
s[0] = 0
para i ← 1 até n faça
    s[i] ← s[i−1] + e[i]
```

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i\le k\le j}\{c[i,k{-}1]+c[k{+}1,j]\}+s[j]-s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i \mathinner{.\,.} j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1 \mathinner{.\,.} j]$
$s[j] - s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i \mathinner{.\,.} j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k{-}1] + c[k{+}1,j]\} + s[j] - s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Como no problema da parentização! Pelas diagonais!

Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	j
1	0								
2		0	$\star$	$\star$	$\star$	??			
3			0			$\star$			
4				0		$\star$			
5					0	$\star$			
6						0			
7							0		
i								0	

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

Simulação

$e[1]{=}10$ $\quad e[2]{=}20$ $\quad e[3]{=}30$ $\quad e[4]{=}15$ $\quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	??					
2		0					
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$$c[1,1{-}1] + e[1] + c[1{+}1,1] = 0{+}10{+}0 = 10$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	??			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$$c[2,2-1] + e[2] + c[2+1,2] = 0+20+0 = 20$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10					
2		0	20				
3			0	??			
4				0			
5					0		
6						0	
i							

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0		
5					0	
6						0

$$c[3, 3-1] + e[3] + c[3+1, 3] = 0+30+0 = 30$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10					
2		0	20				
3			0	30			
4				0	??		
5					0		
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	
6						0

$$c[4,4{+}1] + e[4] + c[4{+}1,4] = 0{+}15{+}0 = 15$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	??
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$c[5, 5{+}1] + e[5] + c[5{+}1, 5] = 0{+}30{+}0 = 30$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	??				
2		0	20				
3			0	30			
4				0	15		
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	50			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1,1{-}1]+(e[1]+e[2])+c[1{+}1,2] = 0{+}30{+}20 = 50$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1,2{-}1] + (e[1] + e[2]) + c[2{+}1,2] = 10{+}30{+}0 = 40$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	??		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40				
2		0	20	80			
3			0	30			
4				0	15		
5					0	30	
6						0	
i							

$$c[2,2{-}1]+(e[2]+e[3])+c[2{+}1,3] = 0{+}50{+}30 = 80$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[2, 3-1] + (e[2] + e[3]) + c[3+1, 3] = 20+50+0 = 70$$

Simulação

$e[1]{=}10$ $e[2]{=}20$ $e[3]{=}30$ $e[4]{=}15$ $e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	??	
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[3,3{-}1] + (e[3] + e[4]) + c[3{+}1,4] = 0{+}45{+}15 = 60$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40				
2		0	20	70			
3			0	30	60		
4				0	15		
5					0	30	
6						0	
i							

$$c[3,4-1]+(e[3]+e[4])+c[4+1,4] = 30+45+0 = 75$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	??
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	75
5					0	30
6						0

$c[4,4{-}1] + (e[4] + e[5]) + c[4{+}1,5] = 0{+}45{+}30{=}75$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40				
2		0	20	70			
3			0	30	60		
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

$$c[4, 5{-}1] + (e[4] + e[5]) + c[5{+}1, 5] = 15{+}45{+}0 = 60$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	??		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	130			
2		0	20	70			
3			0	30	60		
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

$$c[1,1{-}1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[1{+}1,3] = 0{+}60{+}70 = 130$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1, 2{-}1] + (e[1]) + e[2] + e[3]) + c[2{+}1, 3] = 10{+}60{+}30 = 100$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1,3{-}1] + (e[1]+e[2]+e[3]) + c[3{+}1,3] = 40{+}60{+}0 = 100$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	??	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	125	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,2{-}1] + (e[2]+e[3]+e[4]) + c[2{+}1,4] = 0{+}65{+}60 = 125$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,3-1]+(e[2]+e[3]+e[4])+c[3+1,4]=20+65+15=100$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2, 4{-}1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[4{+}1, 4] = 70{+}65{+}0 = 135$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	100			
2		0	20	70	100		
3			0	30	60	??	
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,3-1]+(e[3]+e[4]+e[5])+c[3+1,5]=0+75+60=135$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	100			
2		0	20	70	100		
3			0	30	60	135	
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

$$c[3,4{-}1] + (e[3]+e[4]+e[5]) + c[4{+}1,5] = 30{+}75{+}30 = 135$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,5{-}1] + (e[3]+e[4]+e[5]) + c[5{+}1,5] = 60{+}75{+}0 = 135$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	100			
2		0	20	70	100		
3			0	30	60	135	
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

Exercício: Preencha o que falta!

Árvore de busca ótima

```
ABB-ÓTIMA (e, n)
s[0] = 0
para i ← 1 até n faça
    s[i] ← s[i−1] + e[i]
para i ← 1 até n+1 faça
    c[i, i−1] ← 0
para ℓ ← 1 até n faça
    para i ← 1 até n−ℓ+1 faça
        j ← i+ℓ−1
        q ← c[i+1, j]
        para k ← i+1 até j faça
            se c[i, k−1] + c[k+1, j] < q
            então q ← c[i, k−1] + c[k+1, j]
        c[i, j] ← q + s[j] − s[i−1]
devolva c[1, n]
```

Árvore de busca ótima

Exercício: Como fazer para obter uma ABB ótima e não apenas o seu custo? Complete o serviço!

Mais programação dinâmica

KT 6.4

Aproveite para olhar todo o Cap 6 do KT,
que é sobre programação dinâmica.

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Mochila

Dados dois vetores $x[1\,..\,n]$ e $w[1\,..\,n]$,
denotamos por $x \cdot w$ o produto escalar

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Mochila

Dados dois vetores $x[1\,..\,n]$ e $w[1\,..\,n]$,
denotamos por $x \cdot w$ o produto escalar

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Suponha dado um número inteiro não-negativo W
e vetores positivos $w[1\,..\,n]$ e $v[1\,..\,n]$.

Uma mochila é qualquer vetor $x[1\,..\,n]$ tal que

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \text{ para todo } i$$

Mochila

Dados dois vetores $x[1\,..\,n]$ e $w[1\,..\,n]$,
denotamos por $x \cdot w$ o produto escalar

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Suponha dado um número inteiro não-negativo W
e vetores positivos $w[1\,..\,n]$ e $v[1\,..\,n]$.

Uma mochila é qualquer vetor $x[1\,..\,n]$ tal que

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \text{ para todo } i$$

O valor de uma mochila é o número $x \cdot v$.

Uma mochila é ótima se tem valor máximo.

Problema booleano da mochila

Uma mochila $x[1\,..\,n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Problema (Knapsack Problem):
Dados (w, v, n, W), encontrar uma mochila booleana ótima.

Problema booleano da mochila

Uma mochila $x[1\,..\,n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Problema (Knapsack Problem):
Dados (w, v, n, W), encontrar uma mochila booleana ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4	
w	40	30	20	10	
v	840	600	400	100	
x	1	0	0	0	valor $= 840$
x	1	0	0	1	valor $= 940$
x	0	1	1	0	valor $= 1000$

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1\,..\,n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1\,..\,n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x[n] = 1$

então $x[1\,..\,n{-}1]$ é mochila booleana ótima para $(w, v, n-1, W - w[n])$

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1\,..\,n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x[n] = 1$

então $x[1\,..\,n{-}1]$ é mochila booleana ótima
para $(w, v, n-1, W - w[n])$

senão $x[1\,..\,n{-}1]$ é mochila booleana ótima
para $(w, v, n-1, W)$

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1\,..\,n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x[n] = 1$

então $x[1\,..\,n{-}1]$ é mochila booleana ótima
para $(w, v, n-1, W - w[n])$

senão $x[1\,..\,n{-}1]$ é mochila booleana ótima
para $(w, v, n-1, W)$

NOTA. Não há nada de especial acerca do índice n.
Uma afirmação semelhante vale para qualquer índice i.

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

$=$ valor da expressão $x \cdot v$ sujeito às restrições

$$x \cdot w \leq Y,$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$$
\begin{aligned}
t[i, Y] = & \text{ valor de uma mochila booleana ótima} \\
& \text{ para } (w, v, i, Y) \\
= & \text{ valor da expressão } x \cdot v \text{ sujeito às restrições}
\end{aligned}
$$

$$x \cdot w \leq Y,$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

Possíveis valores de Y: $0, 1, 2, \ldots, W$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

Recorrência

$t[i, Y] =$ valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

Recorrência

$t[i, Y] =$ valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

Recorrência

$t[i, Y] =$ valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

$t[i, Y] = \max\{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w[i]] + v[i]\}$ se $w[i] \leq Y$

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

REC-MOCHILA (w, v, n, W)
se $n = 0$ **ou** $W = 0$
    então devolva 0
se $w[n] > W$
    então devolva REC-MOCHILA $(w, v, n-1, W)$
$a \leftarrow$ REC-MOCHILA $(w, v, n-1, W)$
$b \leftarrow$ REC-MOCHILA $(w, v, n-1, W-w[n]) + v[n]$
devolva $\max\{a, b\}$

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

```
REC-MOCHILA (w, v, n, W)
se n = 0 ou W = 0
    então devolva 0
se w[n] > W
    então devolva REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
a ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
b ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W−w[n]) + v[n]
devolva max {a, b}
```

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$.

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

REC-MOCHILA (w, v, n, W)
se $n = 0$ **ou** $W = 0$
  então devolva 0
se $w[n] > W$
  então devolva REC-MOCHILA $(w, v, n-1, W)$
$a \leftarrow$ REC-MOCHILA $(w, v, n-1, W)$
$b \leftarrow$ REC-MOCHILA $(w, v, n-1, W - w[n]) + v[n]$
devolva $\max\{a, b\}$

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$.

Por que demora tanto?
O mesmo subproblema é resolvido muitas vezes.

Programação dinâmica

Cada subproblema, valor de uma mochila ótima para

$$(w, v, i, Y),$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela t?

Programação dinâmica

Cada subproblema, valor de uma mochila ótima para

$$(w, v, i, Y),$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela t?

Olhe a recorrência e pense...

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

$t[i, Y] = \max\{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w[i]] + v[i]\}$ se $w[i] \leq Y$

Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	Y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0								
2	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$			
3	0					??			
4	0								
5	0								
6	0								
7	0								

i

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0					
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0				
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0			
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500		
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0				
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400			
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0	0	400	400			
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5 Y
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	
3	0					
4	0					
i						

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	500
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	500
3	0	300	400	700	700	800
4	0	300	400	700	700	850

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)

para $Y \leftarrow 0$ **até** W **faça**
    $t[0, Y] \leftarrow 0$
    para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        $a \leftarrow t[i-1, Y]$
        se $w[i] > Y$
            então $b \leftarrow 0$
            senão $b \leftarrow t[i-1, Y-w[i]] + v[i]$
        $t[i, Y] \leftarrow \max\{a, b\}$
devolva $t[n, W]$

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)
para $Y \leftarrow 0$ **até** W **faça**
    $t[0, Y] \leftarrow 0$
    para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        $a \leftarrow t[i-1, Y]$
        se $w[i] > Y$
            então $b \leftarrow 0$
            senão $b \leftarrow t[i-1, Y-w[i]] + v[i]$
        $t[i, Y] \leftarrow \max\{a, b\}$
devolva $t[n, W]$

Consumo de tempo é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do
algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:
O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:
O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Explicação: o "tamanho" de W é $\lg W$ e não W
(tente multiplicar $w[1], \ldots, w[n]$ e W por 1000)

Conclusão

O consumo de tempo do
algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:
O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Explicação: o "tamanho" de W é $\lg W$ e não W
(tente multiplicar $w[1], \ldots, w[n]$ e W por 1000)

Se W é $\Omega(2^n)$ o consumo de tempo é $\Omega(n2^n)$,
mais lento que o algoritmo força bruta!

Obtenção da mochila

Como obter uma mochila ótima?

Obtenção da mochila

Como obter uma mochila ótima?

MOCHILA (w, n, W, t)
$Y \leftarrow W$
para $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 1 **faça**
    se $t[i, Y] = t[i-1, Y]$
        então $x[i] \leftarrow 0$
        senão $x[i] \leftarrow 1$
            $Y \leftarrow Y - w[i]$
devolva x

Obtenção da mochila

Como obter uma mochila ótima?

MOCHILA (w, n, W, t)
$Y \leftarrow W$
para $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 1 **faça**
  se $t[i, Y] = t[i{-}1, Y]$
    então $x[i] \leftarrow 0$
    senão $x[i] \leftarrow 1$
      $Y \leftarrow Y - w[i]$
devolva x

Consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Versão recursiva

Como é a versão memoizada?

Versão recursiva

Como é a versão memoizada?

MEMOIZED-MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)

para $i \leftarrow 0$ **até** n **faça**

  para $Y \leftarrow 0$ **até** W **faça**

    $t[i, Y] \leftarrow \infty$

devolva LOOKUP-MOC (w, v, n, W)

Versão recursiva

LOOKUP-MOC (w, v, i, Y)

se $t[i, Y] < \infty$
  então devolva $t[i, Y]$
se $i = 0$ **ou** $Y = 0$ **então** $t[i, Y] \leftarrow 0$
senão
  se $w[i] > Y$
    então
      $t[i, Y] \leftarrow$ LOOKUP-MOC $(w, v, i-1, Y)$
    senão
      $a \leftarrow$ LOOKUP-MOC $(w, v, i-1, Y)$
      $b \leftarrow$ LOOKUP-MOC $(w, v, i-1, Y-w[i]) + v[i]$
      $t[i, Y] \leftarrow \max\{a, b\}$
devolva $t[i, Y]$