Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear - Lista 7

9 de fevereiro de 2018

1. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ definido por $T(z_1, \ldots, z_n) = (0, z_1, \ldots, z_{n-1})$. Encontre uma fórmula para T^*.

2. Considere $\mathbb{C}^2$ com o produto interno usual. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ o operador dado por $T(1,0) = (1+i, 2)$ e $T(0,1) = (i,i)$. Determine uma fórmula para T^*.

3. Considere $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definido por $T(x,y,z) = (x+y+z, 3x-2y-z, -2x+3y+2z)$, obtenha bases para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$: Im (T), Nuc (T), Im (T^*), Nuc (T^*).

4. Considere em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o produto interno
$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$
Seja D o operador derivação sobre $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Determine D^*.

5. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno. Considere $T \in \mathcal{L}(V)$ que possui adjunto. Prove que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $\bar{\lambda}$ é um autovalor de T^*.

6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Mostre que, se $T \in \mathcal{L}(V)$ é inversível, então T^* é inversível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

7. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e W um subespaço de V. Considere $T \in \mathcal{L}(V)$ que possui adjunto. Mostre que W é invariante por T se, e somente se $W^\perp$ é invariante por T^*.

8. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno. Considere $T, S \in \mathcal{L}(V)$ que admitem adjunto. Prove que se T e S comutam então T^* e S^* também comutam.

9. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador que admite adjunto. Prove que se $T^*T = 0$ então $T = 0$.

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um isomorfismo tal que $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$. Prove que T possui adjunto e $T^* = T^{-1}$.

11. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que Im $(T) = (\text{Nuc } (T^*))^\perp$.

12. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador que possui adjunto. Mostre que $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ e $T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ são auto-adjuntos.

13. Considere $V = \mathcal{P}(\mathbb{C})$ o espaço dos polinômios com coeficientes complexos munido do produto interno
$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt.$$
Decida se o operador $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(p)(t) = tp(t)$ é auto-adjunto.

14. Considere em $\mathbb{C}^3$ o produto interno usual. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ dado por

$$T(x,y,z) = (2x + (1+i)y - 3iz, x + 3y + (2+i)z, iy + 4iz).$$

Calcule T^* e verifique se T é auto-adjunto.

15. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita dotado de um produto interno e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador auto-adjunto em V com traço 0. Moste que existe um vetor $v \in V$ não nulo tal que v e Tv sejam ortogonais.

16. Considere $\mathbb{C}^2$ com o produto interno usual e seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ definido por $T(1,0) = (1+i, 2)$ e $T(0,1) = (i, i)$. T é normal?

17. Seja $V = \mathbb{C}^2$ com o produto interno usual. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ o operador linear em que cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que T é normal e encontre uma base ortonormal de autovetores de T.

18. Para cada matriz A encontre uma matriz P tal que P^tAP é diagonal.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz $B \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$.

20. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se T é normal, mostre que $\text{Nuc }(T) = \text{Nuc }(T^*)$.