Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear - Lista 3

12 de janeiro de 2018

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Mostre que T é isomorfismo e determine T^{-1}.

2. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que $T(1, -1) = 2 + t$ e $T(0, 1) = t - 1$. Mostre que T é isomorfismo e determine T^{-1}.

3. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ um isomorfismo. Então $T^{-1} : W \to V$ é um isomorfismo.

4. Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $U \cong V$ e $V \cong W$, mostre que $U \cong W$.

5. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que existe $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $TS = Id_V$. Mostre que T é inversível e que $T^{-1} = S$. Esse resultado é ainda válido sem a hipótese de V ser de dimensão finita?

6. Sejam V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetorias e $T \in \mathcal{L}(V, W)$ um isomorfismo. Mostre que $T \mapsto UTU^{-1}$ é um isomorfismo de $\mathcal{L}(V, V)$ sobre $\mathcal{L}(W, W)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x-y+z, x+y+2z, x+2y+z)$. Determine $[T]_{can}$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y, 2y + z)$. Determine $[T]_{can}$, $[T]_{can,\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B},can}$, $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{C},can}$ e $[T]_{can,\mathcal{C}}$, onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{can,\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

   a) Determine $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.

   b) Determine uma base para $Im(T)$.

   c) T é injetora?

10. Sejam $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$ e $S = [v_1, v_2, v_3]$.

    a) Se $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e $T(v_4) = v_1 + v_3$, determine $[T]_{\mathcal{C}}$.

    b) Se $[I]_{can,\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determine $[T(e_1)]_{\mathcal{C}}$.