MAT0334 - MAT5721: Introdução à análise Funcional
Espaços normados e espaços de Banach - Lista 1

Wilson Cuellar

1. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas equivalentes num espaço vetorial X.

   a) Mostre que as sequências de Cauchy em $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ são as mesmas.

   b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2 = 0$.

   c) Conclua que $(X, \|\cdot\|_1)$ é de Banach se e somente se $(X, \|\cdot\|_2)$ é de Banach.

2. Sejam A e B subconjuntos de um espaço normado X e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que

   a) $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$

   b) $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$

   c) Se A é limitado, então $\overline{A}$ é limitado.

3. Lembremos que dois espaços topológicos K e L são *homeomorfos* se existe um bijeção ϕ de K sobre L tal que ϕ e ϕ^{-1} são funções contínuas.

   Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas equivalentes num espaço vetorial X. Sejam B_1 e B_2 as bolas unitárias fechadas de $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$, respectivamente. Mostre que B_1 e B_2 são homeomorfos.

4. Sejam X um espaço normado e A um subconjunto de X. O conjunto $\mathrm{conv}(A)$, chamado de *envoltória convexa* de A, é definido como a interseção de todos os subconjuntos convexos de X que contêm A.

   a) Mostre que $\mathrm{conv}(A)$ é um conjunto convexo.

   b) Mostre que

   $$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \text{ com } \lambda_i \geq 0,\, x_i \in A,\, i = 1, \ldots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   c) Prove que se A e B são subconjuntos convexos e compactos de X, então $\mathrm{conv}(A \cup B)$ é compacto.

   d) Se A é compacto então $\mathrm{conv}(A)$ é compacto?

   e) Mostre que se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto, então $\mathrm{conv}(A)$ é compacto.

5. Mostre que o espaço $X = C^1([0,1], \mathbb{R})$ das funções em $[0,1]$ a valores reias com derivada contínua munido da norma $\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$ é um espaço de Banach. $(X, \|\cdot\|_\infty)$ é de Banach?

6. Mostre que o conjunto $\{f \in C[a,b] \,:\, f(x) > 0 \text{ para todo } x \in [a,b]\}$ é aberto em $C[a,b]$.

7. Mostre que a seguinte função define uma norma em $C[0,1]$ que não é equivalente à norma $\|\cdot\|_\infty$.

   $$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

8. Seja $X = C([0,1], \mathbb{R})$. Dados $f \in X$, $\epsilon > 0$ e $x_1, \ldots, x_n$ em $[0,1]$ considere

$$V_{f,x_1,\ldots,x_n,\epsilon} = \{g \in X \, : \, |f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon, \, i = 1, \ldots, n\}.$$

   a) Verifique que $\tau = \{U \subseteq X \, : \, \forall f \in U, \exists \epsilon > 0, \exists x_1, \ldots, x_n \in [0,1] \text{ tais que } V_{f,x_1,\ldots,x_n,\epsilon} \subseteq U\}$ define uma topologia em X. Essa topologia é chamada de *topologia da convergência pontual* em X.

   b) Mostre que qualquer sequência de elementos de X converge em relação a τ se e somente se ela converge pontualmente.

   c) Mostre que τ não é metrizável.

9. Seja X um espaço de Banach. Mostre que $\mathcal{L} = \{f : X \to \mathbb{R} \, : \, f \text{ é Lipschitz e } f(0) = 0\}$ munido da norma

$$\|f\|_{Lip_0} = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}; \, x \neq y \in X \right\}$$

   é um espaço de Banach.

10. Mostre que a norma $|||x||| := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i|$ em ℓ_2 não é equivalente com a norma $\| \cdot \|_2$.

11. Mostre que a função f definida em ℓ_1 por $f(x) = \left((\sum |x_i|)^2 + \sum_i \frac{1}{2^i} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ é uma norma equivalente em ℓ_1.

12. Seja $0 < p < 1$. Mostre que a função $f(x,y) := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ não é uma norma em $\mathbb{R}^2$.

13. Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Mostre que $\ell_p \subseteq \ell_q$ e $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$.

14. Mostre que para todo $p \geq 1$, ℓ_p é linearmente isométrico a um subespaço de $L_p[0,1]$.

15. Sejam Γ um conjunto e $p \in [1, \infty]$. Mostre que $c_0(\Gamma)$ e $\ell_p(\Gamma)$ são espaços de Banach.

16. Seja $BC(0,1)$ o espaço das funções contínuas e limitadas em $]0,1[$ com a norma da convergência uniforme. $BC(0,1)$ é de Banach? Mostre que $BC(0,1)$ não é separável.

17. Sejam X um espaço vetorial normado e Y um subespaço fechado de X. Prove que se Y e X/Y são espaços de Banach, então X é um espaço de Banach.

18. Sejam Y, Z subespaços fechados de um espaço de Banach X tais que Y é isomorfo a Z. São X/Y e X/Z necessariamente isomorfos?

19. Mostre que a norma em ℓ_∞ / c_o é $\|\overline{x}\| = \limsup |x_i|$ para cada $x = (x_i)_i \in \ell_\infty$.

20. Seja c_{00} o espaço das sequências escalares que são nulas exceto para um número finito de termos. Mostre que $\overline{c_{00}} = c_0$ em ℓ_∞.

21. Prove que um espaço de Banach X é separável se e somente se S_X é separável.

22. a) Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Banach X. Mostre que se X é separável, então Y e X/Y é separável.

   b) Mostre que se Y e X/Y são separáveis, então X é separável.

Sugestões

3.) Defina uma função φ de B_1 sobre B_2 por $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x) = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} x$ para $x \in B_1 \setminus \{0\}$. A continuidade no 0 segue da equivalência das normas.

4. c) Mostre que $\text{conv}(A \cup B)$ é a imagem por uma função contínua do compacto $\{(\alpha, \beta); \, \alpha, \beta \geq 0, \, \alpha + \beta = 1\} \times A \times B$.

e) Mostre que se $x \in \text{conv}A$, então existem $n+1$ pontos $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de A e $n+1$ reais não negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tais que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ e $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_1$.

5.) X não é fechado em $C([0,1].\mathbb{R})$.

8.) Essa topologia na verdade é a topologia produto $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

c) Se metrizável, considere $B(0;1/n)$ e abertos $V_{0,x_1^n,\ldots,x_{k_n}^n,\epsilon_n} \subseteq B(0;1/n)$. Seja $a \in [0,1]$ que não pertence a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{1\leq i\leq k_n} x_i^n$ e uma sequência (f_n) em X tal que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ exceto para $x = a$.

13.) Tome $x = (x_i) \in \ell_p$ tal que $\|x\|_{\ell_p} = 1$. Assim $|x_i| \leq 1$, de onde $|x_i|^q \leq |x_i|^p$. Segue que $\|x\|_{\ell_q}^q \leq \|x\|_{\ell_p}^p = 1$. A desigualdade para espaços de funções segue da desigualdade de Hölder tomando $r = q/p$.

14.) Considere o subespaço gerado por $\{f_n\}$, onde $f_n = (n(n+1))^{1/p}\chi_{[\frac{1}{n=1},\frac{1}{n}]}$.

16.) Fixe $\{f_n\}$ em $BC(0,1)$ tal que $\operatorname{supp} f_n \subset [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e $\|f_n\|_\infty = 1$. Defina $T : \ell_\infty \to BC(0,1)$ por $T((a_n))(t) = a_n f_n(t)$ para $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. Assim, $BC(0,1)$ contém uma copia isomorfa de ℓ_∞.

17.) Se (x_n) é de Cauchy em X, então existe $x \in X$ tal que $\tilde{x_n} \to \tilde{x}$. Existe (y_n) em Y tal que $(x_n - x - y_n) \to 0$. Segue que (y_n) é de Cauchy, de onde $y_n \to y$ e $x_n \to x + y$.

18.) Não. Seja $X = \ell_2$, $Y = \{(0, x_2, x_3, \ldots)\}$ e $Z = \{(0, 0, x_3, x_4, \ldots)\}$.

19.) Há somente um número finito de índices i tais que $|x_i| > \limsup |x_i| + \epsilon$.

21.) Se $\{x_n\}$ é denso em S_X, considere $\{r_k x_n\}_{k,n}$ para algum conjunto denso $\{r_k\}$ em $\mathbb{K}$. Se $\mathcal{S}$ é enumerável e denso em X, considere $\{\frac{x}{\|x\|},\, x \in \mathcal{S}\}$.

22. b) Se $\{\tilde{x_n}\}$ é um conjunto denso em X/Y e $\{x_n\}$ é denso em Y, escolhendo $y_n \in \tilde{x_n}$ e considerando $\{y_n + x_k;\, n, k \in \mathbb{N}\}$, obtemos um conjunto denso em X.