Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

A Equação de Daugavet para Operadores no Espaço $C(S)$

Elisa Regina dos Santos

Mestrado em Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira

Co-Orientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Ascui Mujica

Este trabalho recebeu apoio financeiro da CAPES e da CNPq.

A Equação de Daugavet para Operadores no Espaço $C(S)$

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Elisa Regina dos Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de Fevereiro de 2009.

Profa. Dra. Daniela M. S. Vieira
Orientadora

Prof. Dr. Jorge T. A. Mujica
Co-Orientador

Banca examinadora:

Profa. Dra. Daniela M. S. Vieira
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio
Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a 2116

	Santos, Elisa Regina dos
Sa59e	A equação de Daugavet para operadores no espaço C(S) / Elisa Regina dos Santos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.
	Orientadores: Daniela Mariz Silva Vieira ; Jorge Tulio Ascui Mujica
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Daugavet, Equação de. 2. Espaço de funções contínuas. 3. Operadores compactos. 4. Operadores fracamente compactos. I. Vieira, Daniela Mariz Silva. II. Mujica, Jorge Tulio Ascui. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: The Daugavet equation for operators on the space C(S)

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Daugavet equation. 2. Space of continuous functions. 3. Compact operators. 4. Weakly compact operators.

Área de concentração: Análise funcional

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira (IME-USP)
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (IME-USP)

Data da defesa: 18/02/2009

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 18 de fevereiro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____
Prof.(a). Dr(a). DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

____
Prof. (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

____
Prof. (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

aos meus pais

Lauro e Maria Inêz

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sempre me guiar pelo melhor caminho e sempre me dar forças nos momentos de dificuldade.

Agradeço em seguida aos meus pais, que sempre me deram tudo de melhor, acreditaram em mim e me apoiaram.

Agradeço a minha orientadora pela sugestão do tema de pesquisa (com o qual adorei trabalhar), pela orientação cuidadosa, pelas inúmeras correções da dissertação e conversas no gtalk.

Agradeço ao Rodrigo pela paciência e atenção com as minhas diversas perguntas, pelo apoio nos momentos de preocupação e pelo carinho de sempre.

Agradeço aos meus amigos: Régis, Jú, Ricardo, Skeeter, Bricela, Ana, Ingrid, Clarissa, Tati, Naty, Pri, Cris, Baca, Cecília, Luciana e Fernanda. Com os quais eu estudei, tomei café, reclamei da vida, aprendi coisas novas, fofoquei e dei muitas risadas.

Agradeço também a todos os professores que tive. Em especial aos que um dia me incentivaram a prestar vestibular para Matemática (Luciane, Maria Mourão, Gil Sandro, Dona Vera), aos da UFSCar que participaram de forma especial em minha formação (Tomazella, Selma Arenales, Gerson e muitos outros) e aos da Unicamp que foram muito receptivos (Ary, Mujica, Boldrini, entre outros).

Agradeço a banca por todas as correções e sugestões.

Agradeço aos funcionários da secretaria de pós-graduação do IMECC.

E agradeço a Capes e a CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não teria sido realizado.

“Matemática, de modo algum, são fórmulas, assim como a música não são notas.”

Y. Jurquim

Resumo

Um operador linear limitado T entre espaços normados satisfaz a equação de Daugavet se $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.

Este trabalho tem como objetivo principal estudar tal equação para operadores lineares limitados no espaço das funções contínuas $C(S)$, onde S é um espaço Hausdorff compacto.

Para tanto, estudamos algumas representações de $C^*(S)$, o dual topológico de $C(S)$, segundo as propriedades topológicas de S, e também representações de operadores definidos em $C(S)$ ou com imagem em $C(S)$.

Fazendo uso desta teoria de representações em $C(S)$ apresentamos então algumas classes de operadores que satisfazem a equação de Daugavet. Iniciamos apresentando a demonstração dada por H. Kamowitz em [11], de que se T é um operador linear compacto em $C(S)$ então $\|I + T\| = 1 + \|T\|$ se e somente se S não possui pontos isolados. Em seguida, apresentamos a demonstração dada por J. R. Holub em [8], provando que operadores fracamente compactos em $C[0, 1]$ satisfazem a equação de Daugavet. Finalmente apresentamos a demonstração dada por D. Werner em [15], onde prova-se que um operador linear fracamente compacto no espaço $C(S)$ satisfaz a equação de Daugavet se e somente se S não possui pontos isolados.

Abstract

A bounded linear operator T between normed spaces satisfies the Daugavet equation if $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.

The main purpose of this work is to study the Daugavet equation for bounded linear operators on the space $C(S)$, where S is a compact Hausdorff space.

For this, we study some representations of $C^*(S)$, the conjugate space of $C(S)$, according the topological properties of S, and also representations of operators defined on $C(S)$ or with range in $C(S)$.

Using this theory of representations on $C(S)$ we present some classes of operators that satisfy the Daugavet equation. Firstly we present the proof given by H. Kamowitz in [11] that if T is a compact linear operator on $C(S)$ then $\|I + T\| = 1 + \|T\|$ if and only if S is has no isolated points. Next we present the proof given by J. R. Holub in [8], showing that weakly compact operators on $C[0, 1]$ satisfy the Daugavet equation. Finally we present the proof given by D.Werner in [15], where it is shown that a weakly compact operator on the space $C(S)$ satisfies the Daugavet equation if and only if S has no isolated points.

Sumário

Introdução

Em 1963 I. K. Daugavet [4] provou que cada operador compacto T em $C[0,1]$ satisfaz a equação $\|I + T\| = 1 + \|T\|$. A partir de então vários autores provaram que diversas classes de operadores em diferentes espaços de Banach satisfazem essa equação, que é hoje conhecida como **equação de Daugavet**.

Em 1965 C. Foias e I. Singer [6] estenderam o resultado de Daugavet a operadores fracamente compactos em $C[0,1]$. Em 1986 este resultado foi redescoberto por J. R. Holub [8].

Em 1966 G. Y. Lozanovsky [13] provou que cada operador compacto em $L_1[0,1]$ satisfaz a equação de Daugavet. Em 1981 este resultado foi redescoberto por V. F. Babenco e S. A. Pichugov [2].

Em 1984 H. Kamowitz [11] provou que, se S é um espaço de Hausdorff compacto, então cada operador compacto em $C(S)$ satisfaz a equação de Daugavet se, e só se, S não tem pontos isolados.

Em 1994 D. Werner [15] apresentou uma condição necessária e suficiente para que um operador linear limitado em $C(S)$ satisfaça a equação de Daugavet, obtendo provas simples para os resultados de C. Foias e I. Singer [6], J. R. Holub [8] e outros.

Em 1999 V. M. Kadets et al. [10] provaram que se X é um espaço de Banach com a propriedade que cada operador de posto um em X satisfaz a equação de Daugavet, então cada operador fracamente compacto em X também satisfaz a equação de Daugavet.

Recentemente Y. S. Choi et al. [3] estudaram a equação de Daugavet para polinômios em espaços de funções contínuas. Mais precisamente, eles provaram que, se S é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados, então todo polinômio fracamente compacto em $C(S)$ satisfaz a equação de Daugavet.

Embora a equação de Daugavet seja uma propriedade puramente isométrica, ela pode ser usada para obter resultados topológicos a respeito de espaços de Banach, como indicam Y. A. Abramovich e C. D. Aliprantis [1].

Neste trabalho estudamos a equação de Daugavet para operadores lineares limitados no espaço $C(S)$. Mais especificamente, nos concentramos nos trabalhos [11], [8] e [15].

A seguir descrevemos brevemente os assuntos abordados em cada capítulo.

No Capítulo 1 apresentamos alguns tópicos em Topologia Geral, Análise Real e Análise Funcional, os quais serão necessários para a compreensão e desenvolvimento dos capítulos seguintes. Observamos que tais tópicos podem ser encontrados sobretudo em [5] ou em [14].

O Capítulo 2 apresenta um estudo de representações em $C(S)$. Na seção inicial estão contidas as demonstrações de que $C^*(S)$ é isometricamente isomorfo a: $rba(S)$ (o espaço de todas as medidas aditivas, limitadas e regulares na álgebra gerada pelos conjuntos fechados de S), quando S é um espaço topológico normal; $rca(S)$ (o espaço de todas as medidas σ-aditivas, limitadas e regulares na σ-álgebra de Borel de S), quando S é um espaço topológico Hausdorff compacto; e $NBV[0,1]$ (o espaço das funções de variação limitada em [0,1]), quando $S = [0,1]$. Na seção seguinte, apresentamos representações de operadores definidos em $C(S)$ ou com imagem em $C(S)$. Esta teoria de representações em $C(S)$ será usada como ferramenta para o tratamento da equação de Daugavet no capítulo seguinte. A maior parte dos resultados desenvolvidos neste capítulo pode ser encontrada em [5].

Por fim, no Capítulo 3, apresentamos nosso estudo a respeito da equação de Daugavet. Iniciamos definindo quando um operador satisfaz a equação de Daugavet e exibindo alguns exemplos e resultados básicos. Na seção seguinte apresentamos a demonstração dada por H. Kamowitz [11] de que um operador linear limitado em $C(S)$, onde S é um espaço Hausdorff compacto, satisfaz a equação de Daugavet se, e somente se, S não possui pontos isolados. Na terceira seção provamos que operadores fracamente compactos em $C[0,1]$ satisfazem a equação de Daugavet, segundo J. R. Holub [8]. Por fim, a última seção deste capítulo apresenta a prova de que todo operador linear fracamente compacto em $C(S)$ satisfaz a equação de Daugavet se e somente se S é um espaço Hausdorff compacto sem pontos isolados, como demonstrou D. Werner em [15].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Apresentaremos neste primeiro capítulo algumas definições e alguns resultados básicos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Iniciamos fixando as notações.

1.1 Notações

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos
$\mathbb{K}$	corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\overline{\mathbb{R}}$	sistema dos números reais estendidos, ou seja, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
X, Y	espaço topológico, métrico, normado ou Banach
$\overline{E}$	fecho de E no espaço topológico em questão
$\operatorname{int}(E)$	interior de E no espaço topológico em questão
E^c	complementar de E no conjunto universo em questão

B_X	bola unitária fechada em X
X^*	espaço dos funcionais lineares contínuos de X em $\mathbb{K}$
$\widehat{X}$	imagem da aplicação natural de X em X^{**}
Σ	álgebra ou σ-álgebra de conjuntos
$\mathcal{B}$	σ-álgebra de Borel
Σ^*	extensão de Lebesgue de Σ
μ, λ	função conjunto
$v(\mu, E)$	variação total de μ em E
μ^+	variação positiva de μ
μ^-	variação negativa de μ
$[\mu]$	semi-variação da medida vetorial μ
$\sigma(X, X^*)$	topologia fraca de X
$\sigma(X^*, X)$	topologia fraca* de X^*
$B(S)$	espaço das funções escalares limitadas num conjunto arbitrário S
$C(S)$	espaço das funções escalares contínuas limitadas num espaço topológico S
$ba(S, \Sigma)$	espaço das funções conjunto a valores escalares, aditivas e limitadas definidas na álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto S
$ca(S, \Sigma)$	espaço das funções conjunto a valores escalares σ-aditivas definidas na σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto S
$rba(S)$	espaço das funções conjunto a valores escalares, aditivas, limitadas, regulares, definidas na álgebra gerada pelos conjuntos fechados de um espaço topológico S
$rca(S)$	espaço das funções conjunto a valores escalares, σ-aditivas, regulares, definidas na σ-álgebra de Borel de um espaço topológico S
$B^*(S)$	espaço dual de $B(S)$
$C^*(S)$	espaço dual de $C(S)$
I	intervalo
$v(f, I)$	variação total da função f em I
$NBV(I)$	espaço das funções f de variação limitada em I tais que f é contínua à direita de cada ponto interior de I e $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$, onde a é o extremo esquerdo de I
$B(X, Y)$	espaço dos operadores lineares limitados de X em Y
T	operador linear limitado
T^*	adjunto de T

1.2 Tópicos em Topologia Geral

Definição 1.2.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Se $f : X \to Y$ é contínua e bijetora, e se a função inversa f^{-1} é contínua também, então f é chamada um **homeomorfismo**.

Definição 1.2.2. Seja X um espaço topológico. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **semi-contínua inferiormente** se o conjunto $\{x \in X : f(x) > c\}$ é aberto, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.3. Um espaço topológico X é um espaço **Hausdorff** se possui a propriedade (a), listada abaixo, e é um espaço **normal**, se possui as propriedades (b) e (c).

(a) Para todo par de pontos distintos x e y, existem vizinhanças disjuntas de x e y.

(b) Conjuntos consistindo de um único ponto são fechados.

(c) Para todo conjunto fechado A, e todo $x \notin A$, existem vizinhanças disjuntas de A e x.

Teorema 1.2.4 (Lema de Urysohn)**.** *Sejam A e B fechados disjuntos em um espaço normal X. Então existe uma função contínua real f definida em X, tal que* $0 \leq f(x) \leq 1$, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.

Demonstração. Segue por [5], pág. 15. □

Teorema 1.2.5. *Todo espaço Hausdorff compacto é normal.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 18. □

Definição 1.2.6. Um subconjunto A de um espaço topológico X é dito **sequencialmente compacto** se toda sequência de pontos em A possui uma subsequência convergente a um ponto de A.

Definição 1.2.7. Um subconjunto de um espaço topológico é dito **relativamente compacto** se seu fecho é compacto.

Definição 1.2.8. Um subconjunto A de um espaço métrico X é dito **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon > 0$, A está contido numa união finita de bolas abertas em X de raio ε.

Teorema 1.2.9. *Se K é um subconjunto de um espaço métrico X, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) K é sequencialmente compacto;

(b) $\overline{K}$ é compacto;

(c) K é totalmente limitado e $\overline{K}$ é completo.

Além disso, um espaço métrico compacto é completo e separável.

Demonstração. Segue por [5], pág. 22. □

Definição 1.2.10. Um conjunto Λ com uma relação $\leq$ é dito um **conjunto dirigido** se satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\alpha \leq \alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$;

(b) se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ então $\alpha \leq \gamma$;

(c) dados $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

Definição 1.2.11. Seja X um espaço topológico.

(a) Uma **rede** em X é uma função da forma $x : \Lambda \to X$, onde Λ é um conjunto dirigido. Escrevemos x_α indicando $x(\alpha)$ ($\alpha \in \Lambda$) e falamos da rede $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

(b) Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ **converge** para $x \in X$ ($x_\alpha \to x$) se, dada uma vizinhança U de x, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

1.3 Tópicos em Análise Real

Para maiores detalhes do que será apresentado nesta seção sugerimos [5].

Sejam S um conjunto e Σ uma família de subconjuntos de S. Dizemos que Σ é uma **álgebra de subconjuntos** de S se Σ contém: o conjunto vazio, o complementar (relativo a S) de cada um de seus membros, e a união de cada coleção finita de seus membros. E dizemos que Σ é uma **σ-álgebra** se esta é uma álgebra de subconjuntos de S tal que $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$ sempre que $E_n \in \Sigma, n = 1, 2, \ldots$. Em outras palavras, uma σ-álgebra é uma álgebra fechada com relação a uniões enumeráveis. Um subconjunto Σ_1 de uma álgebra Σ é dito uma **subálgebra de** Σ se Σ_1 é uma álgebra.

Observação 1.3.1. A interseção de uma família qualquer de álgebras (σ-álgebras) é uma álgebra (σ-álgebra). Portanto, dada uma família não-vazia Ω de subconjuntos de S, podemos definir a **álgebra gerada** (σ-álgebra gerada) por Ω como a menor álgebra (σ-álgebra) que contém Ω, que, como é claro, coincide com a interseção de todas as álgebras (σ-álgebras) que contém Ω.

Definição 1.3.2. A σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada pelos subconjuntos fechados de um dado espaço topológico S é chamada **σ-álgebra de Borel de** S, e os conjuntos de $\mathcal{B}$ são chamados **conjuntos de Borel** ou **borelianos**.

A seguir μ denotará uma função conjunto a valores reais ou complexos, ou ainda a valores reais estendidos, isto é,

$$\mu : \Sigma \to \mathbb{K} \quad \text{ou} \quad \mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Se μ for uma função conjunto a valores reais ou reais estendidos que não assume valores negativos então μ será dita **positiva**.

Definição 1.3.3. Uma função conjunto μ_1 definida em uma álgebra de conjuntos Σ_1 é dita **aditiva** se $\mu_1(\varnothing) = 0$ e se

$$\mu_1(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \mu_1(E_1) + \mu_1(E_2) + \ldots + \mu_1(E_n),$$

para toda família finita $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de conjuntos disjuntos em Σ_1. E uma função conjunto aditiva μ_2 definida em uma σ-álgebra Σ_2 de subconjuntos é dita **σ-aditiva** se

$$\mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(E_i)$$

para quaisquer conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ disjuntos em Σ_2.

Definição 1.3.4. Seja μ uma função conjunto definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de S. Então para cada E em Σ a **variação total** de μ em E, denotada por $v(\mu, E)$, é definida como

$$v(\mu, E) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coleções finitas $\{E_i\}$ de conjuntos disjuntos em Σ com $E_i \subset E$. Dizemos que μ é de **variação limitada** se $v(\mu, S) < \infty$.

Observação 1.3.5. Se μ é positiva então $v(\mu, E) = \mu(E)$.

Lema 1.3.6. *Se uma função conjunto aditiva, a valores reais ou complexos, definida em uma álgebra de subconjuntos de S, é limitada, então ela é de variação limitada.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 97. □

Lema 1.3.7. *A variação total de uma função conjunto aditiva μ definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de S é também aditiva em Σ.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 98. □

Definição 1.3.8. Seja μ uma função conjunto real, aditiva e limitada, definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto S. A **variação positiva** μ^+ e a **variação negativa** μ^- de μ são funções conjunto definidas em Σ por

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\{v(\mu, E) + \mu(E)\} \quad \text{e} \quad \mu^-(E) = \frac{1}{2}\{v(\mu, E) - \mu(E)\}.$$

Teorema 1.3.9 (Decomposição de Jordan)**.** *Se μ é uma função conjunto real, aditiva e limitada, definida em uma álgebra Σ, então, para cada E em Σ,*

$$\mu^+(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F) \quad \text{e} \quad \mu^-(E) = -\inf_{F \subset E} \mu(F),$$

onde F pertence a Σ. As funções conjunto μ^+ e μ^- são aditivas, não-negativas, e para cada E em Σ,

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E) \quad \text{e} \quad v(\mu, E) = \mu^+(E) + \mu^-(E).$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 98. □

Seja μ uma função conjunto a valores reais estendidos, positiva e aditiva, definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto S. Para um subconjunto arbitrário E de S, o número $\mu^*(E)$ é definido pela equação

$$\mu^*(E) = \inf_{F \supset E} \mu(F),$$

onde F pertence a Σ.

Definição 1.3.10. Um espaço normado completo é dito um **espaço de Banach**.

A seguir $(X, \|\cdot\|)$ denotará um espaço de Banach real ou complexo.

Definição 1.3.11. Um subconjunto N de S é dito um **conjunto μ-nulo** se $v^*(\mu, N) = 0$, onde v^* é a extensão da variação total v de μ. Uma função $f : S \to X$ é dita uma **função μ-nula** se o conjunto $\{s \in S : \|f(s)\| > \alpha\}$ é um conjunto μ-nulo para cada $\alpha > 0$.

Definição 1.3.12. Seja f uma função de S em X que assume um conjunto finito de valores distintos $x_1, \ldots, x_n$, tal que $f^{-1}(\{x_i\})$ pertence a álgebra Σ, para $i = 1, \ldots, n$. Qualquer função $g : S \to X$ que difere de tal f por uma função μ-nula é chamada **função μ-simples**. Uma função μ-simples é **μ-integrável** se ela difere por uma função μ-nula de uma função da forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i},$$

onde $E_i = f^{-1}(\{x_i\})$, $i = 1, \ldots, n$, são conjuntos disjuntos em Σ com união S, $x_i = 0$ se $v(\mu, E_i) = \infty$, e

$$\chi_{E_i}(s) = \begin{cases} 1 & , \ s \in E_i \\ 0 & , \ s \notin E_i \end{cases}$$

Para um conjunto E em Σ, a integral sobre E de uma função μ-simples integrável h é definida por

$$\int_E h(s)\mu(ds) = \int_E f(s)\mu(ds) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E \cap E_i).$$

Proposição 1.3.13. *Se f é uma função μ-simples integrável então*

$$\left\| \int_E f(s)\mu(ds) \right\| \leq \int_E \|f(s)\| v(\mu, ds).$$

A função conjunto $\mu_f(E) = \int_E f(s)\mu(ds)$ é uma função aditiva em Σ, cuja variação total é

$$v(\mu_f, E) = \int_E \|f(s)\| v(\mu, ds), \quad E \in \Sigma.$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 109. □

Definição 1.3.14. Para uma função f de S em X definimos a norma $\|f\|_\mu$ de f por

$$\|f\|_\mu = \inf_{\alpha > 0} \arctan\big\{\alpha + v^*(\mu, \{s \in S : \|f(s)\| > \alpha\})\big\}.$$

Dizemos que uma sequência (f_n) de funções de S em X **converge em medida** para uma função f de S em X se, e somente se,

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\mu = 0.$$

Observação 1.3.15. Se uma sequência (f_n) de funções de S em X converge uniformemente para uma função f de S em X então (f_n) converge em medida para f. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Como (f_n) converge uniformemente para f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow \|f_n(s) - f(s)\| < \delta, \quad s \in S \\ &\Rightarrow \{s \in S : \|f_n(s) - f(s)\| > \delta\} = \varnothing \\ &\Rightarrow v^*\left(\mu, \{s \in S : \|f_n(s) - f(s)\| > \delta\}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \arctan\big\{\delta + v^*\left(\mu, \{s \in S : \|f_n(s) - f(s)\| > \delta\}\right)\big\} = \arctan \delta = \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \inf_{\alpha > 0} \arctan\big\{\alpha + v^*(\mu, \{s \in S : \|f_n(s) - f(s)\| > \alpha\})\big\} < \varepsilon. \\ &\Rightarrow \|f_n - f\|_\mu < \varepsilon \end{aligned}$$

Definição 1.3.16. Uma função $f : S \to X$ é **μ-integrável** em S se existe uma sequência (f_n) de funções μ-simples integráveis convergindo a f *em medida* e

$$\lim_{m,n} \int_S \|f_m(s) - f_n(s)\| \, v(\mu, ds) = 0.$$

Neste caso, a integral de f sobre um conjunto $E \in \Sigma$ é dada por

$$\int_E f(s)\mu(ds) = \lim_n \int_E f_n(s)\mu(ds).$$

Observação 1.3.17. A integral de f independe da escolha da sequência (f_n).

Teorema 1.3.18. *Sejam S um conjunto, Σ uma álgebra de subconjuntos de S e μ uma função conjunto aditiva, limitada, não-negativa, definida em Σ. Sejam Σ_1 uma subálgebra de Σ e μ_1 a restrição de μ sobre Σ_1. Então uma função μ_1-integrável é μ-integrável e*

$$\int_E f(s)\mu_1(ds) = \int_E f(s)\mu(ds), \quad E \in \Sigma_1.$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 165. $\square$

Definição 1.3.19. Seja $\{E_n\}$ uma sequência de conjuntos. Definimos o **limite inferior** e o **limite superior** de $\{E_n\}$ pelas equações

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m.$$

Se $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$ então dizemos que $\{E_n\}$ é **convergente** e definimos

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

Proposição 1.3.20. *Seja μ uma função conjunto a valores complexos ou reais estendidos, limitada, σ-aditiva, definida em uma σ-álgebra Σ. Se $\{E_n\}$ é uma sequência convergente de conjuntos em Σ, então*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 129. □

Definição 1.3.21. Seja μ uma função conjunto a valores vetoriais ou reais estendidos, definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de S, tal que $\mu(\varnothing) = 0$. Um conjunto E é dito um μ-**conjunto** se $E \in \Sigma$ e se

$$\mu(M) = \mu(M \cap E) + \mu(M \cap E^c), \quad \forall M \in \Sigma.$$

Proposição 1.3.22. *Seja μ uma função conjunto a valores vetoriais ou reais estendidos, definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de S, tal que $\mu(\varnothing) = 0$. A família de μ-conjuntos é uma subálgebra de Σ sobre a qual μ é aditiva. Além disso, se E é a união de uma sequência finita (E_n) de μ-conjuntos disjuntos, então*

$$\mu(M \cap E) = \sum \mu(M \cap E_n), \quad \forall \in \Sigma.$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 133. □

Proposição 1.3.23. *Seja μ uma função conjunto a valores reais estendidos, σ-aditiva, não-negativa, definida em uma álgebra Σ de conjuntos em S. Para cada $A \subset S$ seja*

$$\widehat{\mu}(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

onde o infimo é tomado sobre todas as sequências (E_n) de conjuntos em Σ cuja união contém A. Então todo conjunto em Σ é um $\widehat{\mu}$-conjunto. Além disso, $\widehat{\mu}(E) = \mu(E)$ para E em Σ.

Demonstração. Segue por [5], pág. 134. □

Definição 1.3.24. Uma função conjunto aditiva μ, definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de um espaço topológico S, é dita **regular** se, para cada $E \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, existem conjuntos F e G em Σ tais que $\overline{F} \subset E$, $E \subset \text{int}(G)$ e $|\mu(C)| < \varepsilon$, para todo C em Σ com $C \subset G \setminus F$.

Proposição 1.3.25. *A variação total de uma função conjunto aditiva, regular, a valores complexos ou reais estendidos, em uma álgebra, é regular. Ainda mais, as variações positiva e negativa de uma função conjunto aditiva, regular, a valores reais, limitada, são também regulares.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 137. □

Teorema 1.3.26. *Seja μ uma função conjunto a valores complexos, regular, aditiva e limitada, definida em uma álgebra Σ de subconjuntos de um espaço topológico compacto S. Então μ tem uma única extensão regular σ-aditiva à σ-álgebra gerada por Σ.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 138. □

Observação 1.3.27. Tal extensão é construída estendendo-se as variações positiva e negativa da parte real μ_1 e da parte imaginária μ_2 de μ através da Proposição 1.3.23. Ou seja, tomando as extensões $\widehat{\mu_1^+}, \widehat{\mu_1^-}, \widehat{\mu_2^+}$ e $\widehat{\mu_2^-}$ de $\mu_1^+, \mu_1^-, \mu_2^+$ e μ_2^-, respectivamente. Assim, $\left(\widehat{\mu_1^+} - \widehat{\mu_1^-}\right) + i\left(\widehat{\mu_2^+} - \widehat{\mu_2^-}\right)$ é a extensão regular σ-aditiva de μ à σ-álgebra gerada por Σ.

Apresentaremos agora algumas definições e resultados sobre funções conjunto a valores vetoriais. Para tanto, sejam S um conjunto fixado, Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de S e μ uma função conjunto aditiva, definida em Σ, com valores em um espaço de Banach X. Além disso, suponhamos que μ é **fracamente σ-aditiva**, isto é, para cada x^* em X^* e cada sequência de conjuntos disjuntos E_n em Σ temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^*\mu(E_i) = x^*\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

Teorema 1.3.28 (Pettis)**.** *Uma função conjunto fracamente σ-aditiva com valores vetoriais definida em uma σ-álgebra é σ-aditiva.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 318. □

Definição 1.3.29. A **semi-variação** de uma medida vetorial μ é definida como

$$[\mu]\,(E) = \sup\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu(E_i)\right\|, \quad E \in \Sigma,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coleções finitas disjuntas de conjuntos de Borel em E e todos os conjuntos finitos de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $|\alpha_i| \leq 1$.

No caso de uma função conjunto a valores vetoriais, dizemos que um conjunto é μ-**nulo** quando este é um subconjunto de um conjunto $E \in \Sigma$ tal que $[\mu](E) = 0$. O símbolo Σ^* denota a σ-álgebra das uniões $E \cup N$, onde $E \in \Sigma$ e N é um conjunto μ-nulo. Esta σ-álgebra é chamada extensão de Lebesgue de Σ. Uma função escalar definida em S é μ-**mensurável** se para todo conjunto de Borel B de $\mathbb{K}$ tem-se $f^{-1}(B) \in \Sigma^*$. Uma função escalar definida em S é μ-**simples** se esta é uma combinação linear finita de funções características de conjuntos em Σ^*.

Definição 1.3.30. Se f é a função μ-simples $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$, onde $E_1, \ldots, E_n$ são conjuntos disjuntos em Σ, então a integral de f sobre $E \in \Sigma$ é definida pela equação

$$\int_E f(s)\mu(ds) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E \cap E_i).$$

Definição 1.3.31. Se f é uma função mensurável, definimos o μ-**supremo essencial** de f em E como o ínfimo dos números A tais que o conjunto $\{s \in E : |f(s)| > A\}$ é μ-nulo. Se

$$\mu\text{-ess}\ \sup_{s\in E} |f(s)| < \infty,$$

dizemos que f é μ-**essencialmente limitada** no conjunto $E \in \Sigma$.

Observação 1.3.32. Segundo a definição do μ-supremo essencial, vale que

$$\mu\text{-ess}\ \sup\nolimits_{s\in E} |f(s)| \leq \sup_{s\in E} |f(s)|.$$

Definição 1.3.33. Uma função escalar f é dita **integrável** se existe uma sequência (f_n) de funções μ-simples tais que

(i) $f_n(s)$ converge a $f(s)$ em quase todo ponto;

(ii) a sequência $\left(\int_E f_n(s)\mu(ds)\right)$ converge na norma de X para cada $E \in \Sigma$.

O limite desta sequência de integrais é definido como a integral de f com respeito a μ sobre o conjunto $E \in \Sigma$, ou seja,

$$\int_E f(s)\mu(ds).$$

Observação 1.3.34. A integral de f independe da escolha da sequência (f_n).

Teorema 1.3.35. *Se $E \in \Sigma$ e f é uma função escalar μ-mensurável que é μ-essencialmente limitada em E, então f é μ-integrável e*

$$\left\| \int_E f(s)\mu(ds) \right\| \leq \left\{\mu\text{-ess}\ \sup\nolimits_{s\in E} |f(s)|\right\}\left\{[\mu](E)\right\}.$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 323. □

1.4 Tópicos em Análise Funcional

A seguir X e Y indicarão espaços normados. B_X denotará a bola unitária fechada de X. O espaço dual de X, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos de X em $\mathbb{K}$, será denotado por X^*. Os elementos de X^* serão denotados por x^*.

1.4.1 Teoremas de Hahn-Banach

Teorema 1.4.1. *Seja Y um subespaço de um espaço normado X. Então para todo y^* em Y^* corresponde um x^* em X^* tal que*

$$\|x^*\| = \|y^*\| \quad \text{e} \quad x^*y = y^*y, \quad y \in Y.$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 63. □

Proposição 1.4.2. *Seja x um vetor no complementar de um subespaço fechado Y de um espaço normado X. Então existe um funcional x^* em X^* tal que*

$$x^*x = 1 \quad \text{e} \quad x^*y = 0, \; y \in Y.$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 64. □

Proposição 1.4.3. *Para todo x no espaço normado X, vale que*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*x|,$$

onde B_{X^*} é a bola unitária fechada no espaço X^*.

Demonstração. Segue por [5], pág. 65. □

1.4.2 Compacidade e Topologias Fracas

Teorema 1.4.4. *A bola unitária fechada B_X em um espaço normado X é compacta se, e somente se,* $\dim X < \infty$.

Demonstração. Segue por [12], pág. 80. □

Definiremos agora as topologias fraca e fraca* (lê-se *fraca estrela*) em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$. Além disto, apresentaremos alguns resultados que mostram vantagens destas topologias sobre a topologia da norma.

Definição 1.4.5. A **topologia fraca de** X é a topologia $\sigma(X, X^*)$ gerada pelas vizinhanças

$$W(y; x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon) = \{x \in X : \left|x_j^*(x-y)\right| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq j \leq n\},$$

onde $y \in X$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$.

Definição 1.4.6. Uma rede $(x_\alpha) \subset X$ é dita **fracamente convergente** para $x \in X$ se $x^* x_\alpha \to x^* x$, para todo $x^* \in X^*$. Denotamos $x_\alpha \xrightarrow{w} x$.

Proposição 1.4.7. *A topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ é mais fraca que a topologia da norma. As duas topologias coincidem se, e somente se, X tem dimensão finita.*

Demonstração. Segue por [14], pág. 215. □

Proposição 1.4.8. $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$, *ou seja, $\phi : X \to \mathbb{K}$ é linear e contínuo segundo a topologia fraca se, e somente se, $\phi \in X^*$.*

Demonstração. Segue por [14], pág. 212. □

Definição 1.4.9. Sejam X e Y espaços normados. Uma **isometria** entre X e Y é uma aplicação linear $T : X \to Y$ tal que $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in X$. Quando $T(X) = Y$ dizemos que T é um **isomorfismo isométrico**.

Definição 1.4.10. Sejam X um espaço normado e X^{**} o dual do espaço de Banach X^*. A aplicação $\widehat{\ }: X \to X^{**}$ que associa a cada elemento $x \in X$ o elemento $\widehat{x} \in X^{**}$, definido por

$$\widehat{x}(x^*) = x^* x, \quad x^* \in X^*,$$

é chamada **aplicação natural** ou **inclusão canônica** de X em X^{**}. A imagem desta aplicação será denotada por $\widehat{X}$.

Proposição 1.4.11. *A aplicação $\widehat{\ }: X \to \widehat{X}$ é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 66. □

Definição 1.4.12. A **topologia fraca* de** X^* é a topologia $\sigma(X^*, X)$ gerada pelas vizinhanças

$$W(y^*; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{x^* \in X^* : |x^* x_j - y^* x_j| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq j \leq n\},$$

onde $y^* \in X^*$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Notemos que a topologia fraca* de X^* é mais fraca que a topologia fraca de X^*, ou seja, $\sigma(X^*, X) \leq \sigma(X^*, X^{**})$, pois

$$\begin{aligned} W^*(y^*; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) &= \{x^* \in X^* : |x^* x_j - y^* x_j| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq j \leq n\} \\ &= \{x^* \in X^* : |\widehat{x}_j(x^* - y^*)| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq j \leq n\} \\ &= W(y^*; \widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n; \varepsilon). \end{aligned}$$

Definição 1.4.13. Uma rede $(x^*_\alpha) \subset X^*$ é dita **fraca* convergente** para $x^* \in X^*$ se $x^*_\alpha x \to x^* x$, para todo $x \in X$. Denotamos $x^*_\alpha \xrightarrow{w^*} x^*$.

Proposição 1.4.14. *$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = \widehat{X}$, ou seja, $\phi : X^* \to \mathbb{K}$ é linear e contínuo segundo a topologia fraca* se, e somente se, $\phi \in \widehat{X}$.*

Demonstração. Segue por [14], pág. 224. □

Proposição 1.4.15. *Seja X um espaço de Banach. Então conjuntos $\sigma(X^*, X)$-compactos de X^* são limitados.*

Demonstração. Segue por [14], pág. 226. □

Um dos resultados que torna importante a topologia fraca* é o Teorema de Alaoglu. Pelo Teorema 1.4.4, se $\dim X^* = \infty$ então a bola unitária fechada B_{X^*} não é compacta na topologia da norma de X^*. Agora temos que

Teorema 1.4.16 (Alaoglu)**.** *Se X é um espaço normado, então a bola B_{X^*} é $\sigma(X^*, X)$-compacta.*

Demonstração. Segue por [14], pág. 229. □

Teorema 1.4.17 (Goldstine)**.** *Seja X um espaço normado. Então:*

(a) $B_{X^{**}} = \overline{B_X}^{\sigma(X^{**}, X^*)}$;

(b) $X^{**} = \overline{X}^{\sigma(X^{**}, X^*)}$

Demonstração. Segue por [14], pág. 232. □

Teorema 1.4.18 (Smulian)**.** *Seja K um subconjunto fracamente compacto de um espaço normado X. Então cada sequência em K admite uma subsequência que converge fracamente a um ponto de K.*

Demonstração. Segue por [14], pág. 248. □

Corolário 1.4.19. *Seja K um subconjunto fracamente relativamente compacto de X. Então cada sequência em K admite uma subsequência que converge fracamente a um ponto de X.*

Teorema 1.4.20 (Eberlein)**.** *Seja K um subconjunto de um espaço normado X tal que cada sequência em K admite uma subsequência que converge fracamente a um ponto de X. Então:*

(a) $\overline{K}^{\sigma(X,X^*)}$ *é* $\sigma(X, X^*)$*-compacto.*

(b) Cada $x \in \overline{K}^{\sigma(X,X^*)}$ *é o* $\sigma(X, X^*)$*-limite de uma sequência de pontos em K.*

Demonstração. Segue por [14], pág. 248. □

Corolário 1.4.21. *Seja K um subconjunto de um espaço normado X tal que cada sequência em K admite uma subsequência que converge fracamente a um ponto de K. Então K é um conjunto fracamente compacto.*

1.4.3 Alguns Espaços Especiais

Apresentaremos nesta seção uma lista de espaços de Banach especiais para o desenvolvimento deste trabalho. Estes consistirão de funções a valores reais ou complexos, onde a adiação e a multiplicação serão as usuais, ou seja,

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s) \quad \text{e} \quad (\alpha f)(s) = \alpha f(s).$$

Os espaços a seguir serão formados ou por funções reais satisfazendo as propriedades requeridas ou por funções complexas satisfazendo as mesmas. O tratamento para ambos os casos é análogo e pode ser encontrado em [5].

1. O espaço $B(S)$ é definido para um conjunto arbitrário S e consiste de todas as funções escalares limitadas em S. A norma é dada por

$$\|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|$$

e $B^*(S)$ denota o espaço dual de $B(S)$.

2. O espaço $C(S)$ é definido para um espaço topológico S e consiste de todas as funções escalares contínuas limitadas em S. A norma é

$$\|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|$$

e $C^*(S)$ denota o espaço dual de $C(S)$.

3. O espaço $ba(S, \Sigma)$ é definido para uma álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto S e consiste de todas as funções conjunto a valores escalares, aditivas e limitadas. A norma $\|\mu\|$ é a variação total de μ em S, isto é, $v(\mu, S)$.

4. O espaço $ca(S, \Sigma)$ é definido para uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto S e consiste de todas as funções conjunto a valores escalares definidas e σ-aditivas em Σ. A norma $\|\mu\|$ é a variação total $v(\mu, S)$.

5. O espaço $rba(S)$ é definido para um espaço topológico S e consiste de todas as funções conjunto a valores escalares, aditivas, limitadas, regulares, definidas na álgebra gerada pelos conjuntos fechados de S. A norma $\|\mu\|$ é a variação total $v(\mu, S)$.

6. O espaço $rca(S)$ é definido para um espaço topológico S e consiste de todas as funções conjunto a valores escalares, σ-aditivas, regulares, definidas na σ-álgebra $\mathcal{B}$ de todos os conjuntos de Borel em S. A norma $\|\mu\|$ é a variação total $v(\mu, S)$.

Antes de definir um último espaço precisamos da seguinte definição:

Definição 1.4.22. Um **intervalo** é um conjunto de pontos no sistema dos números reais estendidos que tem uma das formas:

$$[a,b] = \{s : a \leq s \leq b\}, \qquad [a,b) = \{s : a \leq s < b\},$$
$$(a,b] = \{s : a < s \leq b\}, \qquad (a,b) = \{s : a < s < b\}.$$

O número a é chamado o **extremo esquerdo** e b o **extremo direito** de cada um destes intervalos. Um intervalo é **finito** se ambos extremos são finitos; caso contrário é um **intervalo infinito**. Se f é uma função real ou complexa (escalar) em um intervalo I, a **variação total** de f em I é definida por

$$v(f, I) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)|,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os conjuntos finitos de pontos $a_i, b_i \in I$ tais que $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n$. Se $v(f, I) < \infty$, f é dita uma função de **variação limitada** em I.

7. O espaço $NBV(I)$ é definido para um intervalo I e consiste das funções escalares f em I que são de variação limitada em I e tais que: f é contínua à direita em cada ponto interior de I e $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$, onde a é o extremo esquerdo de I. Neste caso, a norma de f é dada por

$$\|f\| = v(f, I).$$

A seguir apresentaremos alguns resultados envolvendo estes espaços.

Proposição 1.4.23. *Se f é uma função de variação limitada então o conjunto dos pontos onde f é descontínua é enumerável.*

Demonstração. Segue por [7], pág. 103. □

Proposição 1.4.24. *Seja f uma função de variação limitada em um intervalo I e seja c um ponto qualquer em I exceto seu extremo direito. Então*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} v(f, (c, c + \varepsilon]) = 0.$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 140. □

Definição 1.4.25. Se Σ é a família de todos os subconjuntos de um conjunto S, denotamos $ba(S, \Sigma)$ por $ba(S)$.

Proposição 1.4.26. *Existe um isomorfismo isométrico entre $B^*(S)$ e $ba(S)$ determinado pela identidade*

$$x^* f = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in B(S).$$

Demonstração. Segue por [5], pág. 259. □

Definição 1.4.27. Um conjunto $K \subset C(S)$ é dito **equicontínuo** se para toda rede convergente $\{s_\alpha\} \subset S$ com $s_\alpha \to s$ tem-se que $f(s_\alpha) \to f(s)$ uniformemente com respeito a $f \in K$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe α_0 tal que

$$\alpha \geq \alpha_0 \Longrightarrow |f(s_\alpha) - f(s)| < \varepsilon, \quad \forall f \in K.$$

Teorema 1.4.28 (Arzelà-Ascoli)**.** *Se S é Hausdorff compacto, então um conjunto K em $C(S)$ é relativamente compacto se, e somente se, K é limitado e equicontínuo.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 266. □

Definição 1.4.29. Uma rede $\{f_\alpha\}$ de funções definidas em um conjunto S é dita **quase-uniformemente convergente** em S se existe uma função f_0 definida em S com $f_\alpha(s) \to f_0(s)$ para todo s em S e tal que, para todo $\varepsilon > 0$ e α_0, existe um número finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq \alpha_0$ tais que

$$\min_{1 \leq i \leq n} |f_{\alpha_i}(s) - f_0(s)| < \varepsilon, \quad s \in S.$$

Teorema 1.4.30 (Arzelà)**.** *Se S é um espaço Hausdorff compacto e $\{f_\alpha\}$ é uma rede em $C(S)$ que converge em cada ponto de S para uma função f_0, então f_0 é contínua se, e somente se, $\{f_\alpha\}$ converge quase-uniformemente em S.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 268. □

Definição 1.4.31. Uma família $K \subset C(S)$ é dita **quase-equicontínua** em S se $s_\alpha \to s_0$ implica que a convergência $f(s_\alpha) \to f(s_0)$ é quase-uniforme em K. Isto é, dados $\varepsilon > 0$ e α_0, existe um conjunto finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq \alpha_0$ tais que, para cada $f \in K$

$$\min_{1 \leq i \leq n} |f(s_{\alpha_i}) - f(s_0)| < \varepsilon.$$

Teorema 1.4.32. *Sejam S um espaço Hausdorff compacto e $K \subset C(S)$. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) O fecho de K na topologia fraca de $C(S)$ é fracamente compacto.

(2) K é limitada e seu fecho na topologia pontual é um conjunto compacto.

(3) K é limitada e quase-equicontínua em S.

(4) K é limitada e se K_0 é um subconjunto de K e (s_n) é uma sequência em S para a qual $f(s_n) \to f(s_0)$, para todo $f \in K_0$, então $s_n \to s_0$ quase-uniformemente em K_0.

(5) K é fracamente sequencialmente compacta.

Demonstração. Segue por [5], pág. 269. □

Proposição 1.4.33. *Um subconjunto K de $ba(S,\Sigma)$ é fracamente sequencialmente compacto se, e somente se, existe uma $\mu \in ba(S,\Sigma)$ não-negativa tal que*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \lambda(E) = 0$$

uniformemente para $\lambda \in K$.

Demonstração. Segue por [5], pág. 314. □

Corolário 1.4.34. *Sejam Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de S e μ uma função conjunto aditiva, fracamente σ-aditiva, definida em Σ com valores no espaço de Banach X. O conjunto $K = \{x^* \circ \mu : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$ de medidas escalares é fracamente sequencialmente compacto como um subconjunto de $ca(S,\Sigma)$, ou seja, cada sequência em K admite uma subsequência que converge fracamente a um ponto de K.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 319. □

Definição 1.4.35. Seja X um subespaço vetorial fechado de $C(S)$, onde S é um espaço Hausdorff compacto. Para cada s em S, seja $\pi(s)$ em X^* definido por

$$\pi(s)(f) = f(s), \quad f \in X.$$

Proposição 1.4.36. *Se S é um espaço Hausdorff compacto e $C^*(S)$ é o espaço dual de $C(S)$, então a aplicação $\pi : s \to \pi(s)$ é um homeomorfismo de S em $C^*(S)$, onde $C^*(S)$ tem a topologia fraca*.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 442. □

1.4.4 Teoria Básica de Operadores

A seguir X e Y denotarão espaços de Banach, e o símbolo $B(X,Y)$ será utilizado para indicar o espaço de Banach das aplicações lineares contínuas $T : X \to Y$, onde a norma de T é dada por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

Caso $X = Y$, denotaremos $B(X,X)$ por $B(X)$.

Definição 1.4.37. O **adjunto** de um operador $T \in B(X,Y)$ é a aplicação $T^* \in B(Y^*,X^*)$ definida por $T^*(y^*) = y^* \circ T$, para todo $y^* \in Y^*$.

Lema 1.4.38. *A aplicação que leva T para T^* é um isomorfismo isométrico de $B(X,Y)$ em $B(Y^*, X^*)$.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 478. □

Lema 1.4.39. *O adjunto T^* de um operador $T \in B(X,Y)$ é uma aplicação contínua de Y^* em X^* quando estes espaços têm ambos a topologia fraca*.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 478. □

Definiremos agora operadores fracamente compactos e compactos. Também apresentaremos alguns resultados a respeito destes.

Definição 1.4.40. Seja $T \in B(X,Y)$, e seja B_X a bola unitária fechada em X. O operador T é dito **fracamente compacto** se o $\sigma(Y,Y^*)$-fecho de TB_X é compacto na topologia fraca de Y.

Observação 1.4.41. Pelo Teorema Eberlein (1.4.20) e pelo Teorema de Smulian (1.4.18), um operador é fracamente compacto se, e somente se, ele aplica conjuntos limitados em conjuntos fracamente sequencialmente compactos.

Teorema 1.4.42. *Um operador linear $T \in B(X,Y)$ é fracamente compacto se, e somente se, $T^{**}X^{**}$ está contido na imagem $\widehat{Y}$ da aplicação natural de Y em Y^{**}.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 482. □

Já observamos que o adjunto T^* de qualquer $T \in B(X,Y)$ é contínuo relativo as topologias fraca* em X^* e Y^*. O resultado a seguir mostra que se T é fracamente compacto, seu adjunto T^* tem uma propriedade de continuidade mais forte.

Lema 1.4.43. *Um operador $T \in B(X,Y)$ é fracamente compacto se, e somente se, seu adjunto $T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \to (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))$ é contínuo.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 484. □

Teorema 1.4.44 (Gantmacher)**.** *Um operador $T \in B(X,Y)$ é fracamente compacto se, e somente se, seu adjunto é fracamente compacto.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 485. □

Definição 1.4.45. Seja $T \in B(X,Y)$, e seja B_X a bola unitária fechada em X. O operador T é dito **compacto** se o fecho em norma de TB_X é compacto na topologia da norma de Y.

Teorema 1.4.46 (Schauder)**.** *Um operador $T \in B(X,Y)$ é compacto se, e somente se, seu adjunto é compacto.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 485. □

A seguir apresentamos um teorema análogo ao Lema 1.4.43.

Teorema 1.4.47. *Um operador $T \in B(X,Y)$ é compacto se, e somente se, seu adjunto transforma redes limitadas que convergem na topologia fraca* de Y^* em redes que convergem em norma em X^*.*

Demonstração. Segue por [5], pág. 486. □

Por fim, apresentamos uma definição e um teorema que serão essenciais para a demonstração do resultado principal da Seção 3.2.

Definição 1.4.48. Seja $T \in B(X,Y)$. Dizemos que T **atinge a norma** se existe $x \in B_X$ tal que $\|T\| = \|Tx\|$.

Teorema 1.4.49. *Se S é um espaço Hausdorff compacto e X é um espaço de Banach, então os operadores de posto finito que atingem a norma são densos com a topologia da norma no espaço de todos os operadores compactos de $C(S)$ em X.*

Demonstração. Segue por [9], pág. 41. □

CAPÍTULO 2

Representações em $C(S)$

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira delas apresentaremos isomorfismos isométricos entre alguns espaços de Banach e $C^*(S)$ para os casos: S normal, S Hausdorff compacto e, em particular, $S = [0,1]$. Na outra apresentaremos representações de operadores definidos em $C(S)$ ou com imagem em $C(S)$, para S Hausdorff compacto; e ainda representações de operadores em $C[0,1]$.

As demonstrações contidas neste capítulo foram retiradas essencialmente das seções IV.6 e VI.7 de [5].

2.1 O Espaço $C(S)$

Lema 2.1.1. *Seja S um espaço topológico normal. Toda f em $C(S)$ é integrável com respeito a toda μ em $rba(S)$.*

Demonstração. Seja f em $C(S)$. Fixe $\varepsilon > 0$. Como f é limitada, o conjunto $f(S)$ é um conjunto limitado em $\mathbb{K}$. Assim, $\overline{f(S)}$ é um conjunto compacto. Então, pelo Teorema 1.2.9, $f(S)$ é totalmente limitado. Daí, existe uma cobertura aberta $\{G_1, \ldots, G_n\}$ de $f(S)$

de conjuntos com diâmetros menores que ε. Sejam

$$A_1 = G_1, \quad A_j = G_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} G_i,\ j = 2, \ldots, n.$$

Se A_j é não-vazio, escolha um ponto $\alpha_j \in A_j$, e se A_j é vazio, tome $\alpha_j = 0$. Já que G_j é aberto, $f^{-1}(G_j)$ também é aberto, e assim o conjunto $B_j = f^{-1}(A_j)$ pertence ao domínio de μ. Então a função

$$f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \chi_{B_j}$$

é claramente μ-simples. Além disso, como $v(\mu, S) < \infty$ temos $v(\mu, B_j) < \infty$. Daí, f_ε é μ-integrável. Desta forma, f é o limite uniforme de funções μ-simples integráveis $\left\{f_{\frac{1}{n}}\right\}$ em S, pois $\sup_s |f_\varepsilon(s) - f(s)| < \varepsilon$. Logo, f é o limite em medida de $\left\{f_{\frac{1}{n}}\right\}$ em S, pela Observação 1.3.15, e

$$\begin{aligned}
\int_S \left| f_{\frac{1}{m}}(s) - f_{\frac{1}{n}}(s) \right| v(\mu, ds) &\leq \int_S \left| f_{\frac{1}{m}}(s) - f(s) \right| v(\mu, ds) + \int_S |f(s) - f_{\frac{1}{n}}(s)| v(\mu, ds) \\
&< \int_S \frac{1}{m} v(\mu, ds) + \int_S \frac{1}{n} v(\mu, ds) \\
&= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) v(\mu, S),
\end{aligned}$$

que converge para 0 quando m e n tendem a infinito. Portanto, pela Definição 1.3.16, f é integrável com respeito a μ. $\square$

Observação 2.1.2. Pela Proposição 1.3.13,

$$\begin{aligned}
\left| \int_S f(s)\mu(ds) \right| &\leq \int_S |f(s)| v(\mu, ds) \\
&\leq \int_S \sup_s |f(s)| v(\mu, ds) \\
&= \sup_s |f(s)| v(\mu, S) = \|f\| \cdot \|\mu\|.
\end{aligned}$$

Segue que a integral $\int_S f(s)\mu(ds)$ é um funcional linear contínuo em $C(S)$, para toda $\mu \in rba(S)$.

O teorema a seguir é a recíproca desta observação.

Teorema 2.1.3 ([5], Teorema IV.6.2)**.** *Se S é normal, existe um isomorfismo isométrico entre $C^*(S)$ e $rba(S)$ que corresponde a cada elemento $x^* \in C^*(S)$ um único elemento $\mu \in rba(S)$ satisfazendo a identidade*

$$x^* f = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S). \tag{2.1}$$

Demonstração. Já observamos que toda $\mu \in rba(S)$ determina um funcional x^* em $C^*(S)$ pela fórmula (2.1) e que $\|x^*\| \leq \|\mu\|$. Para mostrar que $\|x^*\| = \|\mu\|$, tome $\varepsilon > 0$, e sejam $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos disjuntos do domínio de μ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \geq \|\mu\| - \varepsilon.$$

Já que μ é regular temos $v(\mu, \cdot)$ regular, pela Proposição 1.3.25. Então para cada E_i podemos escolher um conjunto fechado C_i contido em E_i e um conjunto aberto G_i contendo E_i, de forma que

$$v(\mu, E_i \setminus C_i) \leq \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{e} \quad v(\mu, G_i \setminus C_i) \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Pelo Lema de Urysohn (1.2.4), existe um conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de funções contínuas tais que $0 \leq f_i(s) \leq 1$, $f_i(s) = 0$ se $s \notin G_i$ e $f_i(s) = 1$ se $s \in C_i$. Considere então

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i,$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são constantes complexas de módulo um tais que $\alpha_i \mu(E_i) = |\mu(E_i)|$. Segue que

$$\begin{aligned}
|x^*(f_0) - \|\mu\|| &\leq \left| x^*(f_0) - \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| - \|\mu\| \right| \\
&= \left| \int_S \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(s) \mu(ds) - \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| - \|\mu\| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_S \alpha_i f_i(s) \mu(ds) - |\mu(E_i)| \right| + \varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{S \setminus C_i} \alpha_i f_i(s) \mu(ds) + \int_{C_i} \alpha_i f_i(s) \mu(ds) - |\mu(E_i)| \right| + \varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{G_i \setminus C_i} \alpha_i f_i(s) \mu(ds) + \alpha_i \mu(C_i) - \alpha_i \mu(E_i) \right| + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{G_i \setminus C_i} |f_i(s)| v(\mu, ds) + |\mu(C_i) - \mu(E_i)| \right) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(v(\mu, G_i \setminus C_i) + |\mu(C_i) - \mu(E_i)| \right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{n} + |\mu(E_i \setminus C_i)|\right) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} v(\mu, E_i \setminus C_i) + 2\varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} + 2\varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\mu\| \leq |x^*(f_0)| + 3\varepsilon \leq \sup_{\|f\|\leq 1} |x^*(f)| + 3\varepsilon = \|x^*\| + 3\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário obtemos $\|\mu\| \leq \|x^*\|$. Logo $\|\mu\| = \|x^*\|$.

Agora o que falta ser mostrado é que todo funcional contínuo x^* em $C^*(S)$ pode ser representado na forma (2.1), com $\mu \in rba(S)$. Pelo Teorema 1.4.1, x^* pode ser estendido a um funcional y^* contínuo em $B(S)$ e pela Proposição 1.4.26, existe um elemento $\lambda \in ba(S)$ tal que

$$y^* f = \int_S f(s)\lambda(ds), \quad f \in B(S).$$

Pelo Teorema 1.3.9, λ pode ser escrito como $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i(\lambda_3 - \lambda_4)$, onde λ_j é aditiva e não-negativa, $j = 1, \ldots, 4$. Assim, é suficiente considerar o caso em que λ é não-negativa, e encontrar uma $\mu \in rba(S)$ tal que $\int_S f(s)\lambda(ds) = \int_S f(s)\mu(ds)$ para toda $f \in C(S)$, pois então

$$\begin{aligned}
x^* f = y^* f &= \int_S f(s)\lambda(ds) \\
&= \int_S f(s)\lambda_1(ds) - \int_S f(s)\lambda_2(ds) + i\left(\int_S f(s)\lambda_3(ds) - \int_S f(s)\lambda_4(ds)\right) \\
&= \int_S f(s)\mu_1(ds) - \int_S f(s)\mu_2(ds) + i\left(\int_S f(s)\mu_3(ds) - \int_S f(s)\mu_4(ds)\right) \\
&= \int_S f(s)\mu(ds),
\end{aligned}$$

onde $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) \in rba(S)$.

Representemos por F um subconjunto fechado qualquer, por G um subconjunto aberto qualquer e por E um subconjunto qualquer de S. Defina as funções conjunto μ_1 e μ_2 por

$$\mu_1(F) = \inf_{G \supset F} \lambda(G), \quad \mu_2(E) = \sup_{F \subset E} \mu_1(F).$$

É claro que estas funções conjunto são não-negativas e não-decrescentes. Sejam G_1 aberto e F_1 fechado. Se $G \supset (F_1 \setminus G_1)$ então $(G_1 \cup G) \supset F_1$, e como $\lambda(G_1 \cup G) \leq \lambda(G_1) + \lambda(G)$, segue que

$$\mu_1(F_1) = \inf_{G' \supset F_1} \lambda(G') \leq \lambda(G_1 \cup G) \leq \lambda(G_1) + \lambda(G).$$

Já que G é um conjunto arbitrário contendo $F_1 \setminus G_1$ temos

$$\mu_1(F_1) \leq \lambda(G_1) + \inf_{G \supset (F_1 \setminus G_1)} \lambda(G) = \lambda(G_1) + \mu_1(F_1 \setminus G_1).$$

Se F é um conjunto fechado segue da desigualdade acima, fazendo G_1 variar sobre todos os conjuntos abertos contendo $F \cap F_1$, que

$$\begin{aligned}
\mu_1(F_1) &\leq \inf_{G_1 \supset F \cap F_1} (\lambda(G_1) + \mu_1(F_1 \setminus G_1)) \\
&\leq \inf_{G_1 \supset F \cap F_1} \left(\lambda(G_1) + \sup_{G_1 \supset F \cap F_1} \mu_1(F_1 \setminus G_1) \right) \\
&\leq \inf_{G_1 \supset F \cap F_1} \lambda(G_1) + \sup_{G_1 \supset F \cap F_1} \mu_1(F_1 \setminus G_1) \\
&\leq \mu_1(F \cap F_1) + \sup_{(F_1 \setminus G_1) \subset (F_1 \setminus F)} \mu_1(F_1 \setminus G_1) \\
&\leq \mu_1(F \cap F_1) + \mu_2(F_1 \setminus F).
\end{aligned}$$

Se E é um subconjunto arbitrário de S e F_1 varia sobre todos os subconjuntos fechados de E, segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{F_1 \subset E} \mu_1(F_1) &\leq \sup_{F_1 \subset E} (\mu_1(F \cap F_1) + \mu_2(F_1 \setminus F)) \\
&\leq \sup_{F_1 \subset E} \mu_1(F \cap F_1) + \sup_{F_1 \subset E} \mu_2(F_1 \setminus F) \\
&\leq \left(\sup_{(F \cap F_1) \subset (F \cap E)} \mu_1(F \cap F_1) \right) + \mu_2(E \setminus F) \\
&= \mu_2(F \cap E) + \mu_2(E \setminus F).
\end{aligned}$$

Assim

$$\mu_2(E) \leq \mu_2(F \cap E) + \mu_2(E \setminus F). \tag{2.2}$$

A seguir será mostrado que para um conjunto arbitrário E em S e um conjunto arbitrário fechado F em S temos

$$\mu_2(E) \geq \mu_2(F \cap E) + \mu_2(E \setminus F). \tag{2.3}$$

Para ver isto, sejam F_1 e F_2 conjuntos conjuntos fechados disjuntos. Já que S é normal, existem vizinhanças disjuntas G_1 e G_2 de F_1 e F_2, respectivamente. Se G é uma vizinhança de $F_1 \cup F_2$ então $\lambda(G) \geq \lambda(G \cap G_1) + \lambda(G \cap G_2)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\mu_1(F_1 \cup F_2) &= \inf_{G \supset (F_1 \cup F_2)} \lambda(G) \\
&\geq \inf_{G \supset (F_1 \cup F_2)} (\lambda(G \cap G_1) + \lambda(G \cap G_2)) \\
&\geq \inf_{G \supset (F_1 \cup F_2)} \lambda(G \cap G_1) + \inf_{G \supset (F_1 \cup F_2)} \lambda(G \cap G_2) \\
&\geq \inf_{(G \cap G_1) \supset F_1} \lambda(G \cap G_1) + \inf_{(G \cap G_2) \supset F_2} \lambda(G \cap G_2) \\
&= \mu_1(F_1) + \mu_1(F_2).
\end{aligned}$$

Agora, sejam E e F conjuntos arbitrários de S, com F fechado, e F_1 variando sobre os subconjuntos fechados de $E \cap F$ enquanto F_2 varia sobre os subconjuntos fechados de $E \setminus F$. Pela desigualdade anterior temos

$$\begin{aligned}
\mu_2(E) &= \sup_{C \subset E} \mu_1(C), \qquad \text{para } C \text{ fechado} \\
&\geq \sup_{(F_1 \cup F_2) \subset E} \mu_1(F_1 \cup F_2) \\
&\geq \sup_{(F_1 \cup F_2) \subset E} (\mu_1(F_1) + \mu_1(F_2)).
\end{aligned}$$

Como F_1 e F_2 estão sempre contidos em $E \cap F$ e $E \setminus F$ respectivamente, temos

$$\sup_{(F_1 \cup F_2) \subset E} (\mu_1(F_1) + \mu_1(F_2)) = \sup_{F_1 \subset (E \cap F)} \mu_1(F_1) + \sup_{F_2 \subset (E \setminus F)} \mu_1(F_2).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mu_2(E) &\geq \sup_{(F_1 \cup F_2) \subset E} (\mu_1(F_1) + \mu_1(F_2)) \\
&= \sup_{F_1 \subset (E \cap F)} \mu_1(F_1) + \sup_{F_2 \subset (E \setminus F)} \mu_1(F_2) \\
&= \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E \setminus F),
\end{aligned}$$

donde segue (2.3). Por (2.2) e (2.3) temos que

$$\mu_2(E) = \mu_2(F \cap E) + \mu_2(E \setminus F), \quad E \subset S, \quad F \text{ fechado.} \tag{2.4}$$

Assim, como a função μ_2 está definida na álgebra de todos os subconjuntos de S, todo conjunto fechado F é um μ_2-conjunto pela Definição 1.3.21. Então, se μ é a restrição de

μ_2 à álgebra determinada pelos conjuntos fechados, segue da Proposição 1.3.22 que μ é aditiva. Pela definição de μ_1 e μ_2 temos que $\mu_1(F) = \mu_2(F) = \mu(F)$ para F fechado, e daí

$$\mu(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F).$$

Isto mostra que μ é regular. De fato, dados E na álgebra gerada pelos subconjuntos fechados de S e $\varepsilon > 0$, existem F fechado e G aberto tais que $F \subset E \subset G$,

$$\mu(E) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu(F) \quad \text{e} \quad \mu(E^c) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu(G^c).$$

Desta forma,

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(E \cap F) \leq \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2} - \mu(F) = \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\mu(G \setminus E) = \mu(E^c \setminus G^c) = \mu(E^c) - \mu(E^c \cap G^c) \leq \mu(G^c) + \frac{\varepsilon}{2} - \mu(G^c) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, para $C \subset G \setminus F$ segue que

$$\mu(C) \leq \mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Agora, como $\mu(S) = \lambda(S) < \infty$ temos $\mu \in rba(S)$.

Tudo o que falta ser mostrado então é que

$$\int_S f(s)\lambda(ds) = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S). \tag{2.5}$$

Observe que é suficiente provar (2.5) para uma função real e, já que uma função real em $C(S)$ é a diferença de duas funções não-negativas em $C(S)$, é sufiente provar (2.5) para funções f não-negativas. Finalmente, já que toda f em $C(S)$ é limitada, podemos restrigir a prova de (2.5) ao caso onde $0 \leq f(s) \leq 1$.

Suponha então que f é contínua em S e $0 \leq f(s) \leq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, considere uma cobertura aberta $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de $f(S)$ de conjuntos com diâmetros menores que $\frac{\varepsilon}{\|\mu\|}$. Sejam

$$A_1 = B_1, \quad A_i = B_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_i, \; i = 2, \ldots, n.$$

Já que B_i é aberto, $f^{-1}(B_i)$ também é aberto, e assim o conjunto $E_i = f^{-1}(A_i)$ pertence ao domínio de μ. Se E_i é não-vazio, escolha $a_i = \inf_{s \in E_i} f(s)$, e se E_i é vazio, tome $a_i = 0$. Então

$$f(s) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(a_j + \frac{\varepsilon}{\|\mu\|} \right) \chi_{E_j}(s), \quad s \in S,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_S f(s)\mu(ds) &\leq \int_S \sum_{i=1}^{n} \left(a_j + \frac{\varepsilon}{\|\mu\|}\right) \chi_{E_j}(s)\mu(ds) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a_j + \frac{\varepsilon}{\|\mu\|}\right) \mu(E_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_j\mu(E_j) + \frac{\varepsilon}{\|\mu\|} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_j\mu(E_j) + \frac{\varepsilon}{\|\mu\|} \cdot \mu(S) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_j\mu(E_j) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Já que μ é regular, existem conjuntos fechados $F_i \subset E_i$ tais que $\mu(E_i \setminus F_i) \leq \frac{\varepsilon}{n}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_S f(s)\mu(ds) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(E_i) + \varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(\mu(E_i \cap F_i) + \mu(E_i \setminus F_i)) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(F_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \setminus F_i) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(F_i) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Agora, pela normalidade de S, existem conjuntos abertos disjuntos $H_1, \ldots, H_n$ tais que $H_i \supset F_i$, $i = 1, \ldots, n$. E pela continuidade de f temos que $f^{-1}\left(\left(a_i - \frac{\varepsilon}{n\|\mu\|}, +\infty\right)\right)$ é aberto. Tomando $G_i = H_i \cap f^{-1}\left(\left(a_i - \frac{\varepsilon}{n\|\mu\|}, +\infty\right)\right)$, segue que existem conjuntos abertos disjuntos $G_1, \ldots, G_n$ com $G_i \supset F_i$, $i = 1, \ldots, n$, e tais que

$$b_i = \inf_{s \in G_i} f(s) \geq a_i - \frac{\varepsilon}{n\|\mu\|}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_S f(s)\mu(ds) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(F_i) + 2\varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(b_i + \frac{\varepsilon}{n\|\mu\|}\right) \mu(F_i) + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(F_i) + \frac{\varepsilon}{n\|\mu\|} \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) + 2\varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(F_i) + \frac{\varepsilon}{n\|\mu\|} n\|\mu\| + 2\varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(F_i) + 3\varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(G_i) + 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Agora, se um conjunto aberto G contém um conjunto fechado F então

$$\mu(F) = \mu_2(F) = \mu_1(F) \leq \lambda(G).$$

Assim, já que μ é regular, dado G aberto e $\delta > 0$ qualquer, existe $F \subset G$ fechado tal que $\mu(G \setminus F) < \delta$ e

$$\mu(G) = \mu(G \cap F) + \mu(G \setminus F) < \mu(F) + \delta \leq \lambda(G) + \delta.$$

Sendo δ arbitrário, $\mu(G) \leq \lambda(G)$ para todo G aberto. Portanto temos

$$\int_S f(s)\mu(ds) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(G_i) + 3\varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda(G_i) + 3\varepsilon \leq \int_S f(s)\lambda(ds) + 3\varepsilon,$$

e daí

$$\int_S f(s)\mu(ds) \leq \int_S f(s)\lambda(ds). \tag{2.6}$$

Como $\mu(S) = \lambda(S)$, segue de (2.6) que

$$\int_S (1 - f(s))\lambda(ds) \leq \int_S (1 - f(s))\mu(ds).$$

Mas, já que $0 \leq 1 - f(s) \leq 1$, a função f pode ser trocada pela $(1 - f)$ na desigualdade anterior e assim

$$\int_S f(s)\lambda(ds) \leq \int_S f(s)\mu(ds). \tag{2.7}$$

Logo, (2.6) e (2.7) mostram que

$$\int_S f(s)\lambda(ds) = \int_S f(s)\mu(ds).$$

□

O teorema anterior mostrou que se S é normal então $C^*(S)$ e $rba(S)$ são isometricamente isomorfos. A seguir provaremos que $C^*(S)$ é isometricamente isomorfo a $rca(S)$, caso S seja um espaço Hausdorff compacto.

Teorema 2.1.4 (Representação de Riesz; [5], Teorema IV.6.3)**.** *Se S é um espaço Hausdorff compacto, existe um isomorfismo isométrico entre $C^*(S)$ e $rca(S)$ que corresponde a cada elemento $x^* \in C^*(S)$ um único elemento $\mu \in rca(S)$ satisfazendo a identidade*

$$x^*f = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S). \tag{2.8}$$

Demonstração. Lembremos primeiramente que todo espaço Hausdorff compacto é normal, pelo Teorema 1.2.5. Daí, a demonstração do teorema anterior mostra que cada $\mu \in rca(S)$ determina um $x^* \in C^*(S)$ pela fórmula (2.8), que $\|x^*\| = \|\mu\|$ e que a correspondência entre x^* e μ é linear. Assim, para provar o presente teorema, precisamos apenas mostrar que cada $\lambda \in rba(S)$ determina um $\mu \in rca(S)$ tal que

$$\int_S f(s)\lambda(ds) = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S). \tag{2.9}$$

Pelo Teorema da Decomposição de Jordan (1.3.9), λ pode ser escrito como $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i(\lambda_3 - \lambda_4)$, onde λ_i é aditiva, regular, limitada e não-negativa, $i = 1, \ldots, 4$. Daí, é suficiente considerar o caso em que λ é não-negativa e encontrar uma $\mu \in rca(S)$ tal que (2.9) seja satisfeita. Consideremos então $\lambda \in rba(S)$ não-negativa. Pelo Teorema 1.3.26, λ tem uma única extensão regular σ-aditiva μ na σ-álgebra de Borel. Agora, dada $f \in C(S)$, sabemos que f é λ-integrável. Então, pelo Teorema 1.3.18, f é μ-integrável e

$$\int_S f(s)\mu(ds) = \int_S f(s)\lambda(ds),$$

como queríamos demonstrar. □

O teorema abaixo encontra-se parcialmente demonstrado nas páginas 141 e 142 de [5]. A seguir apresentaremos sua demonstração completa.

Teorema 2.1.5. *Seja $I = [a, b]$ um intervalo finito. Existe um isomorfismo isométrico entre $NBV(I)$ e $rba(I)$ que corresponde a cada elemento $f \in NBV(I)$ um único elemento $\mu \in rba(I)$ satisfazendo*

$$\mu([a, d]) = f(d) - f(a) \quad \text{e} \quad \mu((c, d]) = f(d) - f(c)$$

para $a < c < d \leq b$.

Demonstração. Fixemos $f \in NBV(I)$. Seja Σ a família que consiste de todas as uniões finitas de intervalos tendo uma das duas formas $[a, d]$ ou $(c, d]$, onde $a < c < d \leq b$. É fácil ver que Σ é uma álgebra. Para um conjunto $E \in \Sigma$ com a forma

$$E = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n, \tag{2.10}$$

onde I_j, $j = 1, \ldots, n$, são intervalos disjuntos dos tipos descritos acima, defina $\mu(E)$ pela equação

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_j),$$

onde $\mu([a, d]) = f(d) - f(a)$ e $\mu((c, d]) = f(d) - f(c)$ para $a < c < d \leq b$. Claramente $\mu(E)$ independe do conjunto $\{I_j\}$ escolhido para representar E e μ é aditiva em Σ. Como f é de variação limitada temos

$$\begin{aligned} \|\mu\| = v(\mu, I) &= \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| && (2.11) \\ &= \sup \sum_{j=1}^{m} |\mu(I_j)| && (2.12) \\ &= \sup \sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| && (2.13) \\ &= v(f, I) < \infty, \end{aligned}$$

onde o supremo em (2.11) é tomado sobre todas as sequências finitas $\{E_i\}$ de conjuntos disjuntos em Σ, o supremo em (2.12) é tomado sobre todas as sequências finitas $\{I_j\}$ de intervalos disjuntos em Σ, e o supremo em (2.13) é tomado sobre todos os conjuntos finitos de pontos $a_j, b_j \in I$ com $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq b$. Assim, μ é limitada. Podemos afirmar ainda mais, $v(\mu, E) = v(f, E)$ para todo intervalo E de uma das formas descritas anteriormente. Desta última afirmação e da Proposição 1.4.24, a regularidade de μ em Σ pode ser vista como segue: seja E dado por

$$E = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n,$$

onde $I_j = (a_j, b_j]$ e $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq b$. Dado $\varepsilon > 0$, considere

$$F(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j + \varepsilon, b_j] \quad \text{e} \quad G(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j + \varepsilon].$$

(Nestas expressões, caso $a_1 = a$, os intervalos $(a_1, b_1]$, $(a_1 + \varepsilon, b_1]$ e $(a_1, b_1 + \varepsilon]$ devem ser trocados por $[a, b_1]$, $(a + \varepsilon, b_1]$ e $[a, b_1 + \varepsilon]$, respectivamente.) Observemos que $F(\varepsilon)$ e $G(\varepsilon) \in \Sigma$, e que E está contido no interior de $G(\varepsilon)$ e contém o fecho de $F(\varepsilon)$. Pela

Proposição 1.4.24,

$$\begin{aligned} v(\mu, G(\varepsilon) \setminus F(\varepsilon)) &= v\left(\mu, \bigcup_{j=1}^{n} \{(a_j, a_j+\varepsilon] \cup (b_j, b_j+\varepsilon]\}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \{v(\mu, (a_j, a_j+\varepsilon]) + v(\mu, (b_j, b_j+\varepsilon])\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \{v(f, (a_j, a_j+\varepsilon]) + v(f, (b_j, b_j+\varepsilon])\} \to 0 \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0^+$. Logo, μ é regular em Σ. Segue do Teorema 1.3.26 que μ possui uma única extensão regular σ-aditiva μ_f à σ-álgebra gerada por Σ, ou seja, à σ-álgebra de Borel de $[a, b]$. Considerando μ_f definida na álgebra gerada pelos subconjuntos fechados de $[a, b]$ temos $\mu_f \in rba(I)$. Ainda, pela Observação 1.3.27, temos $\mu_f = \widehat{\mu^+} - \widehat{\mu^-}$. Daí,

$$\|\mu_f\| = v(\mu_f, I) = \widehat{\mu^+}(I) + \widehat{\mu^-}(I) = \mu^+(I) + \mu^-(I) = v(\mu, I) = \|\mu\| = \|f\|.$$

Reciprocamente, dada $\mu \in rba(I)$, considere $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \mu([a, x]) - \mu(\{a\}) & , \ x \in (a, b] \\ -\mu(\{a\}) & , \ x = a \end{cases}$$

Então, pela Proposição 1.3.20, para $x \in (a, b)$ temos que dada uma sequência $\varepsilon_n \to 0^+$ vale que

$$\lim_{n\to\infty} f(x+\varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} \mu([a, x+\varepsilon_n]) - \mu(\{a\}) = \mu([a, x]) - \mu(\{a\}) = f(x),$$

ou seja, f é contínua à direita de cada ponto interior de I. Além disso, dada uma sequência $x_n \to a^+$ segue que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu([a, x_n]) - \mu(\{a\}) = \mu(\{a\}) - \mu(\{a\}) = 0,$$

isto é, $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$. Ainda, para $a < c < d \leq b$ temos

$$f(d) - f(a) = \mu([a, d]) - \mu(\{a\}) + \mu(\{a\}) = \mu([a, d])$$

e

$$f(d) - f(c) = \mu([a, d]) - \mu(\{a\}) - \mu([a, c]) + \mu(\{a\}) = \mu([a, d]) - \mu([a, c]) = \mu((c, d]).$$

Por fim, pelo Lema 1.3.6, μ é de variação limitada. Assim,

$$\begin{aligned} v(f, I) &= \sup \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| \qquad (2.14)\\ &= \sup \sum_{j=1}^{n} |\mu(I_j)| \qquad (2.15)\\ &\leq \sup \sum_{i=1}^{m} |\mu(E_i)| \qquad (2.16)\\ &= v(\mu, I) < \infty, \end{aligned}$$

onde o supremo em (2.14) é tomado sobre todos os conjuntos finitos de pontos $a_j, b_j \in I$ com $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq b$, o supremo em (2.15) é tomado sobre todas as sequências finitas $\{I_j\}$ de intervalos disjuntos das formas $[a, d]$ ou $(c, d]$ com $a < c < d \leq b$, e o supremo em (2.16) é tomado sobre todas as sequências finitas $\{E_i\}$ de conjuntos disjuntos na σ-álgebra de Borel de I. Logo, f é de variação limitada. Portanto, f pertence a $NBV(I)$, o que prova o teorema. □

Quando $\mu \in rba[a, b]$ e $g \in NBV[a, b]$ estão relacionadas pelo isomorfismo acima, é comum a integral

$$\int_a^b f(s)\mu(ds)$$

ser escrita como

$$\int_a^b f(s)dg(s).$$

Corolário 2.1.6 ([5], Exercício IV.13.35)**.** *Existe um isomorfismo isométrico entre $C^*[0, 1]$ e $NBV[0, 1]$ que corresponde a cada elemento $x^* \in C^*[0, 1]$ um único elemento $g \in NBV[0, 1]$ satisfazendo a identidade*

$$x^* f = \int_0^1 f(s)dg(s), \quad f \in C[0, 1].$$

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 2.1.3 e 2.1.5. □

2.2 Representação de Operadores em $C(S)$

Teorema 2.2.1 ([5], Teorema VI.7.1)**.** *Sejam S um espaço Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e $T : X \to C(S)$ um operador linear limitado. Então existe uma aplicação $\tau : S \to X^*$ que é contínua com a topologia fraca* de X^* e tal que*

(1) $Tx(s) = \tau(s)x, x \in X, s \in S$;

(2) $\|T\| = \sup_{s\in S} \|\tau(s)\|$.

Reciprocamente, se uma tal aplicação τ é dada, então o operador T definido por (1) é um operador linear limitado de X em $C(S)$ com norma dada por (2). O operador T é fracamente compacto se, e somente se, τ é contínua com a topologia fraca em X^*. O operador T é compacto se, e somente se, τ é contínua com a topologia da norma em X^*.

Demonstração. Seja T uma aplicação limitada de X em $C(S)$. Então, seu adjunto T^* leva $C^*(S)$ em X^* e, pelo Lema 1.4.39, é contínuo com as topologias fraca*. Agora, pela Proposição 1.4.36, a aplicação $\pi : S \to C^*(S)$, definida pela equação

$$\pi(s)(f) = f(s), \quad f \in C(S), \quad s \in S$$

é um homeomorfismo de S em $C^*(S)$, onde $C^*(S)$ tem a topologia fraca*. Assim, a aplicação $\tau : S \to X^*$ definida por $\tau = T^* \circ \pi$ é contínua com a topologia fraca* em X^*. Além disso,

$$\tau(s)x = T^* \circ \pi(s)x = T^*(\pi(s))x = (\pi(s))(Tx) = Tx(s), \quad x \in X, \quad s \in S,$$

e

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{s\in S} |Tx(s)| = \sup_{s\in S} \sup_{\|x\|\leq 1} |\tau(s)x| = \sup_{s\in S} \|\tau(s)\|.$$

Donde seguem *(1)* e *(2)*.

Reciprocamente, se $\tau : S \to X^*$ é contínua com a topologia fraca* em X^*, então $\tau(S)$ é fraco* compacto. Assim, pela Proposição 1.4.15, $\tau(S)$ é limitado. Daí, a equação *(1)* define claramente uma aplicação linear limitada $T : X \to C(S)$ cuja norma é

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{s\in S} |Tx(s)| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{s\in S} |\tau(s)x| \\
&= \sup_{s\in S} \sup_{|x|\leq 1} |\tau(s)x| \\
&= \sup_{s\in S} \|\tau(s)\|\,.
\end{aligned}$$

E isto completa a prova da primeira parte do teorema.

Se T é fracamente compacto, então o Lema 1.4.43 implica que $T^* : C^*(S) \to X^*$ é contínuo com a topologia fraca* em $C^*(S)$ e a topologia fraca em X^*. Assim, como π é um homeomorfismo com a topologia fraca*, temos $\tau = T^* \circ \pi$ contínua com a topologia fraca em X^*. Reciprocamente, se τ é contínua na topologia fraca e $s_\alpha \to s_0$ em S, então $\tau(s_\alpha) \to \tau(s_0)$ fracamente. Agora, como $\tau(S)$ é limitado e $\widehat{\tau(S)} \subset (X^*)^{**}$, temos que $\widehat{\tau(s_\alpha)}$ e $\widehat{\tau(s_0)}$ pertencem a $C(B)$, onde B é a bola unitária fechada em X^{**} munida com a topologia fraca*. Já que B é Hausdorff compacta e $\widehat{\tau(s_\alpha)} \to \widehat{\tau(s_0)}$ para cada ponto em B, temos pelo Teorema de Arzelà (1.4.30) que a convergência é quase-uniforme em B, e assim em B_X, a bola unitária fechada em X. Então, dado $\varepsilon > 0$ e α_0, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq \alpha_0$ tais que

$$\min_{1\leq i\leq n} |\tau(s_{\alpha_i})(x) - \tau(s_0)(x)| < \varepsilon,$$

para cada $x \in B_X$. Por este fato e pela equação *(1)*, dado $\varepsilon > 0$ e α_0, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq \alpha_0$ tais que

$$\min_{1\leq i\leq n} |Tx(s_{\alpha_i}) - Tx(s_0)| < \varepsilon.$$

Daí, concluímos que o conjunto limitado $T(B_X)$ é uma coleção quase-equicontínua de funções em $C(S)$. Segue do Teorema 1.4.32 que $T(B_X)$ é fracamente sequencialmente compacto, ou seja, que T é um operador fracamente compacto.

Finalmente, se T é compacto então, pelo Teorema 1.4.47, T^* transforma redes limitadas que convergem na topologia fraca* em redes que convergem em norma. Agora, pelo Teorema 1.4.36, $\pi : S \to C^*(S)$ é uma função contínua com a topologia fraca* em $C^*(S)$ e, assim, $\pi(S)$ é fraco* compacto. Por consequência, $\pi(S)$ é limitado, pela Proposição 1.4.15. Daí, dada uma rede $s_\alpha \to s_0$ em S, temos $\pi(s_\alpha) \to \pi(s_0)$ na topologia fraca* e $\{\pi(s_\alpha)\}$ limitado. Então, $T^*(\pi(s_\alpha))$ converge em norma para $T^*(\pi(s_0))$, ou seja, $\tau(s_\alpha)$ converge em norma para $\tau(s_0)$. Logo, τ é contínua com a topologia da norma em X^*. Reciprocamente, seja τ contínua com a topologia da norma em X^*. Então, dados $\varepsilon > 0$ e $s_0 \in S$, existe uma vizinhança N de s_0 tal que, se $s \in N$ então $\|\tau(s) - \tau(s_0)\| < \varepsilon$. Daí,

$$\sup_{x \in B_X} |Tx(s) - Tx(s_0)| = \|\tau(s) - \tau(s_0)\| < \varepsilon, \quad s \in N,$$

ou seja, se s pertence a N então $|Tx(s) - Tx(s_0)| < \varepsilon$ para todo x em B_X. Segue da Definição 1.4.27 que $T(B_X)$ é um conjunto equicontínuo em $C(S)$. Já que $T(B_X)$ é limitado temos, pelo Teorema 1.4.28, que este é relativamente compacto. Assim, T é um operador compacto. □

O teorema anterior provou resultados a respeito de operadores com imagem em $C(S)$. Agora nos voltaremos para a questão de representar operadores T definidos em $C(S)$. Motivados pelo Teorema da Representação de Riesz para funcionais lineares em $C(S)$, somos levados a esperar que a representação de operadores esteja ligada com as medidas vetoriais cujos valores pertencem a X. Este será o caso para operadores fracamente compactos; para operadores em geral a medida tem seus valores em X^{**}.

A seguir, $\mathcal{B}$ denota a σ-álgebra de Borel de S, isto é, a σ-álgebra gerada pelos conjuntos fechados de S. Se μ é uma função em $\mathcal{B}$ com valores em um espaço de Banach, então o símbolo $[\mu](E)$ denota a semi-variação de μ em $E \in \mathcal{B}$, que foi definida na Seção 1.3.

Teorema 2.2.2 ([5], Teorema VI.7.2)**.** *Seja S um espaço Hausdorff compacto e seja $T : C(S) \to X$ um operador linear limitado. Então existe uma única função conjunto μ, definida sobre os conjuntos de Borel em S e tendo valores em X^{**}, tal que*

(a) $\mu(\cdot)x^*$ pertence a $rca(S)$ para cada x^* em X^*;

(b) a aplicação $x^* \mapsto \mu(\cdot)x^*$ de X^* em $rca(S)$ é contínua, com a topologia fraca em X^* e com a topologia fraca* de $C^*(S)$ em $rca(S)$;*

(c) $x^*Tf = \int_S f(s)\mu(ds)x^*, f \in C(S), x^* \in X^*$;

(d) $\|T\| = [\mu](S)$.

Reciprocamente, se μ é uma função conjunto da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de S com valores em X^{**} que satisfaz (a) e (b), então a equação (c) define uma aplicação linear T de $C(S)$ para X, cuja norma é dada por (d), e tal que $T^*x^* = \mu(\cdot)x^*$.

Demonstração. Pelo Teorema da Representação de Riesz 2.1.4 existe um isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi: & C^*(S) & \to & rca(S) \\ & y^* & \mapsto & \mu_{y^*} \end{array}$$

que associa y^* e μ_{y^*} satisfazendo a identidade

$$y^*(f) = \int_S f(s)\mu_{y^*}(ds).$$

Para $E \in \mathcal{B}$, defina $\phi_E : C^*(S) \to \mathbb{K}$ por

$$\phi_E(y^*) = \mu_{y^*}(E), \quad y^* \in C^*(S).$$

Observemos que $\phi_E \in C^{**}(S)$, pois

$$\begin{aligned} \phi_E(x^* + \alpha y^*) &= \mu_{x^*+\alpha y^*}(E) = \psi(x^* + \alpha y^*)(E) = \psi(x^*)(E) + \alpha\psi(y^*)(E) \\ &= \mu_{x^*}(E) + \alpha\mu_{y^*}(E) = \phi_E(x^*) + \alpha\phi_E(y^*) \end{aligned}$$

e

$$|\phi_E(x^*)| = |\mu_{x^*}(E)| \le v(\mu_{x^*}, E) \le v(\mu_{x^*}, S) = \|\mu_{x^*}\| = \|x^*\|.$$

Defina então a função conjunto $\mu : \mathcal{B} \to X^{**}$ pela equação

$$\mu(E) = T^{**}(\phi_E), \quad E \in \mathcal{B}.$$

Segue do Teorema da Representação de Riesz 2.1.4 que T^*x^* está associado a uma medida $\lambda_{x^*} \in rca(S)$. Assim,

$$\mu(E)x^* = T^{**}(\phi_E)x^* = \phi_E(T^*x^*) = \lambda_{x^*}(E),$$

ou seja, $\mu(\cdot)x^* = \lambda_{x^*} \in rca(S)$. Daí, vale (a). Esta equação também mostra que

$$x^*Tf = T^*x^*(f) = \int_S f(s)\lambda_{x^*}(ds) = \int_S f(s)\mu(ds)x^*,$$

donde segue (c).

Para provar (b), seja $x^*_\alpha \longrightarrow x^*$ fraca* em X^*. Como, pelo Lema 1.4.39, $T^* : X^* \to C^*(S)$ é contínuo com as topologias fraca*, temos $T^*x^*_\alpha \to T^*x^*$ com a topologia fraca* de $C^*(S)$. Agora, como ψ identifica isometricamente os elementos de $C^*(S)$ e de $rca(S)$, podemos dizer que $\psi(T^*x^*_\alpha) \to \psi(T^*x^*)$ com a topologia fraca* de $C^*(S)$. Logo, $\mu(\cdot)x^*_\alpha \to \mu(\cdot)x^*$ com a topologia fraca* de $C^*(S)$. Portanto, vale (b).

Além disso, considerando que os supremos que não estão indicados abaixo são tomados sobre todas as coleções finitas disjuntas de conjuntos de Borel em S e todos os conjuntos finitos de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $|\alpha_i| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
[\mu](S) &= \sup \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) \right\| \leq \sup \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \, \|\mu(E_i)\| \\
&\leq \sup \sum_{i=1}^n \|\mu(E_i)\| = \sup \sum_{i=1}^n \left(\sup_{\|x^*\| \leq 1} |\mu(E_i)x^*| \right) \\
&= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sup \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)x^*| \right) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|\mu(\cdot)x^*\| \\
&= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|T^*x^*\| = \|T^*\| = \|T\|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} \|Tf\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \left(\sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*Tf| \right) \\
&= \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \int_S f(s)\mu(ds)x^* \right| \\
&\leq \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left\{ \left(\mu(\cdot)x^*\text{-ess } \sup_{s \in S} |f(s)| \right) \cdot [\mu(\cdot)x^*](S) \right\} \\
&\leq \left(\sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{s \in S} |f(s)| \right) \cdot \left(\sup_{\|x^*\| \leq 1} [\mu(\cdot)x^*](S) \right) \qquad (2.17) \\
&\leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sup \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) x^* \right| \right) \\
&= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|x^*\| \cdot \left(\sup \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) \right\| \right) \\
&= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|x^*\| \cdot [\mu](S) \leq [\mu](S),
\end{aligned}$$

onde (2.17) vale pela Observação 1.3.32. Assim, vale (d).

Por fim, suponha que existe uma função conjunto $\lambda : \mathcal{B} \to X^{**}$ satisfazendo (a),(b),(c) e (d). Então

$$\int_S f(s)\lambda(ds)x^* = x^*Tf = \int_S f(s)\mu(ds)x^*, \quad f \in C(S),\ x^* \in X^*.$$

Daí, $\lambda(E)x^* = \mu(E)x^*$, para todo $x^* \in X^*$ e $E \in \mathcal{B}$. Logo, $\lambda = \mu$. Portanto, μ é única.

Reciprocamente, se (a) e (b) são satisfeitas pela aplicação $x^* \mapsto \mu(\cdot)x^*$ então, para cada $f \in C(S)$ fixado, a aplicação

$$x^* \mapsto \int_S f(s)\mu(ds)x^* \tag{2.18}$$

é contínua na topologia fraca* de X^*, ou seja, pertence a $(X^*, w^*)^*$. De fato, se $x^*_\alpha \to x^*$ fraca*, então $\mu(\cdot)x^*_\alpha \to \mu(\cdot)x^*$ com a topologia fraca* de $C^*(S)$, ou seja, $\int_S f(s)\mu(ds)x^*_\alpha \to \int_S f(s)\mu(ds)x^*$. Agora, pela Proposição 1.4.14, $(X^*, w^*)^* = \widehat{X}$. Assim, a função dada por (2.18) é gerada por algum elemento x_f de X, isto é,

$$x^*(x_f) = \int_S f(s)\mu(ds)x^*.$$

Então, pelo Teorema de Hahn-Banach 1.4.2, a aplicação $T : f \to x_f$ definida por (c) é uma aplicação linear de $C(S)$ para X, pois

$$\begin{aligned} x^*T(\alpha f + g) &= \int_S [\alpha f(s) + g(s)]\mu(ds)x^* = \alpha \int_S f(s)\mu(ds)x^* + \int_S g(s)\mu(ds)x^* \\ &= \alpha x^*Tf + x^*Tg = x^*(\alpha Tf + Tg). \end{aligned}$$

E, analogamente à primeira parte da demonstração, a norma de T é dada por (d). Por fim, dada $f \in C(S)$ temos

$$T^*x^*(f) = x^*Tf = \int_S f(s)\mu(ds)x^*.$$

Daí, $T^*x^* \cong \mu(\cdot)x^*$, pelo Teorema da Representação de Riesz 2.1.4. $\square$

Teorema 2.2.3 ([5], Teorema VI.7.3)**.** *Seja S um espaço Hausdorff compacto e seja $T : C(S) \to X$ um operador fracamente compacto. Então existe uma medida vetorial μ definida nos conjuntos de Borel de S e tendo valores em $\widehat{X}$ tal que*

(a) $x^* \circ \mu \in rca(S), x^* \in X^*$;

(b) $Tf = \int_S f(s)\mu(ds), f \in C(S)$;

(c) $\|T\| = [\mu](S)$;

(d) $T^*x^* = x^* \circ \mu, x^* \in X^*$.

Reciprocamente, se μ é uma medida vetorial dos conjuntos de Borel em S em X que satisfaz (a), então o operador T definido por (b) é um operador fracamente compacto de $C(S)$ para X cuja norma é dada por (c) e cujo adjunto é dado por (d).

Demonstração. Consideremos os funcionais ϕ_E, $E \in \mathcal{B}$, definidos na demonstração do teorema anterior. Vimos que $\phi_E \in C^{**}(S)$. Agora, como T é fracamente compacto temos, pelo Teorema 1.4.42, que $T^{**}(C^{**}(S))$ está contido em $\widehat{X}$. Assim, tomando μ como no teorema anterior, dado $E \in \mathcal{B}$ temos $\mu(E) = T^{**}(\phi_E) \in \widehat{X}$, ou seja, μ está definida sobre os conjuntos de Borel $\mathcal{B}$ e tem seus valores em $\widehat{X}$. Além disto, ainda pelo teorema anterior, $x^* \circ \mu = \mu(\cdot)x^* \in rca(S)$. Então, μ é uma medida vetorial fracamente σ-aditiva. Donde segue, pelo Teorema 1.3.28, que μ é σ-aditiva. Daí, toda $f \in C(S)$ é μ-mensurável e μ-essencialmente limitada. Logo, pelo Teorema 1.3.35, a integral da equação (b) existe e pertence a X. Da equação (c) do teorema anterior obtemos

$$x^*Tf = \int_S f(s)\mu(ds)x^* = \int_S f(s)(x^* \circ \mu)(ds) = x^* \int_S f(s)\mu(ds), \quad x^* \in X^*.$$

Assim,

$$Tf = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S).$$

Além disso, segue que $T^*x^* \cong x^* \circ \mu$, pelo Teorema da Representação de Riesz 2.1.4. Por fim, a validade de (c) segue do item (d) do teorema anterior.

Reciprocamente, seja μ uma medida com valores em X, definida nos conjuntos de Borel de S, com a propriedade que $x^* \circ \mu \in rca(S)$ para todo $x^* \in X^*$. Então o operador T, definido por (b), é um operador linear limitado de $C(S)$ em X, e como

$$T^*x^*f = x^*Tf = x^* \int_S f(s)\mu(ds) = \int_S f(s)(x^* \circ \mu)(ds),$$

o adjunto de T satisfaz (d), pelo Teorema da Representação de Riesz 2.1.4. Além disto, a norma de T é dada por (c), pois pelo Teorema 1.3.35 e pela Observação 1.3.32 temos que

$$\begin{aligned} \|Tf\| = \left\| \int_S f(s)\mu(ds) \right\| &\leq \left\{\mu\text{-ess sup}_{s\in S} |f(s)|\right\}\left\{[\mu]\,(S)\right\} \\ &\leq \left\{\sup_{s\in S} |f(s)|\right\} \cdot \left\{[\mu](S)\right\} = [\mu](S) \cdot \|f\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[\mu](S) &= \sup \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \right\| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|\mu(E_i)\| \\
&\leq \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\| = \sup \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^* \mu(E_i)| \right) \\
&= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sup \sum_{i=1}^{n} |x^* \mu(E_i)| \right) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|x^* \circ \mu(\cdot)\| \\
&= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|T^* x^*\| = \|T^*\| = \|T\|
\end{aligned}$$

onde os supremos que não estão indicados acima são tomados sobre todas as coleções finitas disjuntas de conjuntos de Borel em S e todos os conjuntos finitos de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $|\alpha_i| \leq 1$. Por fim, do Corolário 1.4.34, segue que T^* leva a bola unitária fechada de X^* em um conjunto fracamente sequencialmente compacto de $rca(S)$. Assim, pelo Teorema de Eberlein (1.4.20), T^* é um operador fracamente compacto. Logo, pelo Teorema 1.4.44, T é fracamente compacto. □

Finalmente consideremos operadores em $C[0,1]$.

Teorema 2.2.4. *Sejam $C = C[0,1]$ e $T \in B(C, C)$. Então existe uma função escalar $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ tal que*

(a) para cada $s \in [0,1]$ a função $k(s, \cdot)$ pertende a $NBV[0,1]$;

(b) $Tf(s) = \int_0^1 f(t) dk(s,t), 0 \leq s \leq 1, f \in C$;

(c) $\|T\| = \sup_{s \in [0,1]} v(k(s,\cdot), [0,1])$.

Demonstração. Seja T uma aplicação em $B(C, C)$. Então T^* leva C^* em C^*. Considere a aplicação $\pi : [0,1] \to C^*$, definida por

$$\pi(s)(f) = f(s), \quad f \in C[0,1], \quad s \in [0,1].$$

Observemos que $T^*(\pi(s))$ pertence a C^* para todo $s \in [0,1]$. Assim, pelo Corolário 2.1.6, existe $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $k(s, \cdot) \in NBV[0,1]$ para todo $s \in [0,1]$ e tal que, para todo $f \in C$ e $s \in [0,1]$ vale

$$T^*(\pi(s))(f) = \int_0^1 f(s) dk(s,t),$$

ou seja,

$$Tf(s) = \int_0^1 f(t)dk(s,t).$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|f\|\leq 1} \|Tf\| \\
&= \sup_{\|f\|\leq 1} \sup_{s\in[0,1]} |Tf(s)| \\
&= \sup_{\|f\|\leq 1} \sup_{s\in[0,1]} |T^*(\pi(s))(f)| \\
&= \sup_{s\in[0,1]} \sup_{|f|\leq 1} |T^*(\pi(s))(f)| \\
&= \sup_{s\in[0,1]} \|T^*(\pi(s))\| \\
&= \sup_{s\in[0,1]} v(k(s,\cdot),[0,1]).
\end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO 3

Propriedade de Daugavet em $C(S)$

Este capítulo será destinado a apresentar resultados à respeito da equação de Daugavet originalmente demonstrados por H. Kamowitz em [11], por J. R. Holub em [8] e por D. Werner em [15].

Iniciaremos introduzindo a equação de Daugavet e alguns resultados básicos sobre esta. Em seguida usaremos as caracterizações dos operadores compactos e fracamente compactos em $C(S)$ do Capítulo 2 para determinar algumas classes de operadores que satisfazem tal equação.

3.1 Equação de Daugavet

Definição 3.1.1. Sejam X um espaço de Banach e $T \in B(X)$. Dizemos que T satisfaz a **equação de Daugavet** se

$$\|I + T\| = 1 + \|T\| .$$

Observemos que sempre vale $\|I + T\| \leq 1 + \|T\|$, pela desigualdade triangular.

A seguir apresentamos exemplos de operadores que não satisfazem a equação de Daugavet.

Exemplos 3.1.2.

(a) Em qualquer espaço de Banach existe um operador T para o qual $\|I+T\| < 1+\|T\|$. Basta escolher $T=-I$.

(b) Se X é um espaço de Hilbert e $\{e_n\}$ é uma base ortonormal então $T : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \to -a_1 e_1$ é um operador contínuo para o qual

$$\begin{aligned}\|I+T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|x+Tx\| \\ &= \sup_{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \leq 1} \left(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \\ &\leq 1 < 1+\|T\|.\end{aligned}$$

Proposição 3.1.3 ([11], Observação (c))**.** *Seja X um espaço de Banach. Se todo operador compacto (fracamente compacto) $R : X^* \to X^*$ satisfaz*

$$\|I+R\| = 1+\|R\|,$$

então $\|I+T\| = 1+\|T\|$ para todo operador T compacto (fracamente compacto) em X.

Demonstração. De fato, se T é um operador compacto (fracamente compacto) em X, então T^* é compacto (fracamente compacto) em X^*. Daí, $\|I+T^*\| = 1+\|T^*\|$. Assim,

$$\|I+T\| = \|(I+T)^*\| = \|I^*+T^*\| = 1+\|T^*\| = 1+\|T\|.$$

□

Observação 3.1.4. A recíproca da proposição anterior não é verdadeira, um contra-exemplo será mostrado na Observação 3.3.6.

Definição 3.1.5. Um espaço topológico S é dito **perfeito** se não possui pontos isolados.

Exemplos 3.1.6.

(a) Todo intervalo é um espaço topológico perfeito.

(b) Toda bola ou esfera num espaço de métrico é um espaço topológico perfeito.

Vejamos agora um exemplo de um espaço topológico que não é perfeito.

Exemplo 3.1.7. Considere o espaço $X = \{0, 1\}$ com a topologia $\tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}$. Este espaço topológico é conhecido como **Espaço de Sierpinski** e não é perfeito, pois 0 é um ponto isolado de X.

Ao longo deste capítulo $C(S)$ será considerado um espaço complexo, a menos que seja dito o contrário.

Teorema 3.1.8 ([11], Teorema A)**.** *Seja S um espaço Hausdorff compacto. Se S não é perfeito então existe um operador compacto (fracamente compacto) $T : C(S) \to C(S)$ que não satisfaz a equação de Daugavet.*

Demonstração. Considere s_0 um ponto isolado de S. Defina $f_0 : S \to \mathbb{C}$ por

$$f_0(s) = \begin{cases} 1 & , \ s = s_0 \\ 0 & , \ s \neq s_0 \end{cases} .$$

Então $f_0 \in C(S)$. Agora defina $T : C(S) \to C(S)$ por $Tf = -f(s_0)f_0$ para $f \in C(S)$. Daí, T é um operador compacto (fracamente compacto), pois a imagem de T é unidimensional. Além disso, se $f \in C(S)$ então $(I + T)f(s) = f(s)$ para $s \neq s_0$ e $(I + T)f(s_0) = 0$. Assim $\|I + T\| = 1 < 1 + \|T\|$. Logo, T é um operador compacto (fracamente compacto) em $C(S)$ que não satisfaz a equação de Daugavet. $\square$

Seja S um espaço Hausdorff compacto. Identificando $C^*(S)$ e $rca(S)$ pelo Teorema da Representação de Riesz 2.1.4, temos que $\pi(s)$ (Definição 1.4.35) em $C^*(S)$ é identificado com um certo $\delta_s \in rca(S)$ tal que

$$f(s) = \pi(s)(f) = \int_S f(t)\delta_s(dt), \quad \forall f \in C(S). \tag{3.1}$$

A família $\{\delta_s\}_{s \in S}$ é chamada **família de medidas de Dirac**. Note que o operador identidade sobre $C(S)$ é representado por esta família, segundo a equação (3.1).

Seja $T : C(S) \to C(S)$ um operador linear limitado. Pelo Teorema 2.2.1, existe uma aplicação $\tau : S \to C^*(S)$, definida por $\tau = T^* \circ \pi$, tal que

$$Tf(s) = \tau(s)f, \quad f \in C(S), \quad s \in S.$$

Identificando $\tau(s) \in C^*(S)$ com $\mu_s \in rca(S)$ através do Teorema da Representação de Riesz 2.1.4, obtemos uma família $\{\mu_s\}_{s \in S}$ de funções conjunto em S tais que

$$Tf(s) = \tau(s)f = \int_S f(t)\mu_s(dt), \quad f \in C(S), \quad s \in S.$$

Esta família $\{\mu_s\}_{s\in S}$ é chamada **núcleo estocástico** de T. Assim, novamente pelo Teorema 2.2.1, se representarmos T pelo seu núcleo estocástico $\{\mu_s\}_{s\in S}$, então:

1. $\|T\| = \sup_{s\in S} \|\mu_s\|$;
2. a função $s \mapsto \mu_s$ é contínua com a topologia fraca* de $rca(S) \cong C^*(S)$;
3. T é fracamente compacto se, e somente se, $s \mapsto \mu_s$ é contínua na topologia fraca;
4. T é compacto se, e somente se, $s \mapsto \mu_s$ é contínua na topologia da norma.

Proposição 3.1.9. *Se S é um espaço Hausdorff compacto e $T : C(S) \to C(S)$ um operador linear limitado então*

$$\max_{|\lambda|=1} \|I + \lambda T\| = 1 + \|T\| .$$

Demonstração. Seja $\{\mu_s\}_{s\in S}$ o núcleo estocástico de T. Temos que

$$(I + \lambda T)f(s) = f(s) + \lambda T f(s) = \int_S f(t)\delta_s(dt) + \lambda \int_S f(t)\mu_s(dt) = \int_S f(t)[\delta_s + \lambda\mu_s](dt),$$

para todo λ em $\mathbb{C}$. Assim, $\{\delta_s + \lambda\mu_s\}_{s\in S}$ é o núcleo estocástico de $I + \lambda T$. Então

$$\begin{aligned}
\max_{|\lambda|=1} \|I + \lambda T\| &= \max_{|\lambda|=1} \sup_{s\in S} \|\delta_s + \lambda\mu_s\| && (3.2)\\
&= \max_{|\lambda|=1} \sup_{s\in S} v(\delta_s + \lambda\mu_s, S)\\
&= \sup_{s\in S} \max_{|\lambda|=1} \big(v(\delta_s + \lambda\mu_s, \{s\}) + v(\delta_s + \lambda\mu_s, S \setminus \{s\})\big) && (3.3)\\
&= \sup_{s\in S} \max_{|\lambda|=1} \big(v(\delta_s + \lambda\mu_s, \{s\}) + |\lambda| v(\mu_s, S \setminus \{s\})\big)\\
&= \sup_{s\in S} \big(1 + v(\mu_s, \{s\}) + v(\mu_s, S \setminus \{s\})\big)\\
&= \sup_{s\in S} (1 + v(\mu_s, S)) && (3.4)\\
&= \sup_{s\in S} (1 + \|\mu_s\|) = 1 + \|T\| , && (3.5)
\end{aligned}$$

onde (3.2) e (3.5) valem pelo Teorema 2.2.1 e, (3.3) e (3.4) valem pois a variação total de uma função conjunto aditiva é aditiva, pelo Lema 1.3.7. □

Observe que no caso em que $C(S)$ é um espaço real temos o seguinte:

Proposição 3.1.10 ([15], Proposição 1)**.** *Se S é um espaço Hausdorff compacto e $T : C(S) \to C(S)$ um operador linear limitado então*

$$\max\{\|I + T\| , \|I - T\|\} = 1 + \|T\| .$$

3.2 Operadores Compactos em $C(S)$

Nesta seção mostraremos que se T é um operador compacto em $C(S)$, com S um espaço Hausdorff compacto perfeito, então $\|I+T\| = 1 + \|T\|$.

Lema 3.2.1. *Sejam S um espaço Hausdorff compacto e $f \in C(S)$ com $\|f\| = 1$. Dados A e B fechados disjuntos, existe $F \in C(S)$ tal que $\|F\| = 1$, $F(B) = 1$ e $F(t) = f(t)$ para todo $t \in A$.*

Demonstração. Seja $f \in C(S)$ com $\|f\| = 1$. Como S é Hausdorff compacto segue que S é normal. Então, dados A e B fechados disjuntos, temos que existe uma função contínua $g : S \to [0,1]$ tal que $g(A) = 0$ e $g(B) = 1$, pelo Lema de Urysohn (1.2.4). Consideremos então a função $F : S \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(t) = g(t) + (1 - g(t))f(t), \quad t \in S.$$

Esta função é claramente contínua. Além disto, $F(B) = 1$, $F(t) = f(t)$ para todo $t \in A$ e

$$|F(t)| = |g(t) + (1-g(t))f(t)| \leq g(t) + (1-g(t))\,|f(t)| \leq 1, \quad t \in S,$$

donde segue $\|F\| = 1$. □

Teorema 3.2.2 ([11], Teorema A)**.** *Seja S um espaço Hausdorff compacto perfeito. Então todo operador compacto $T : C(S) \to C(S)$ que atinge a norma satisfaz $\|I+T\| = 1+\|T\|$.*

Demonstração. Representando T pelo seu núcleo estocástico $\{\mu_s\}_{s\in S}$, obtemos

$$Tf(s) = \int_S f(t)\mu_s(dt), \quad f \in C(S), \quad s \in S;$$

e ainda, como T é compacto, segue do observado na Seção 3.1 que a aplicação $s \mapsto \mu_s$ é contínua na topologia da norma em $C^*(S)$. Daí, dados $\varepsilon > 0$ e $s_0 \in S$, existe uma vizinhança aberta V de s_0 tal que se $s \in V$ então $\|\mu_s - \mu_{s_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disto, como μ_{s_0} é regular, existem F e G em $\mathcal{B}$ tais que $\overline{F} \subset \{s_0\} \subset \text{int}(G)$ e $|\mu_{s_0}(C)| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo C em $\mathcal{B}$ com $C \subset G \setminus F$. Tomando $U = V \cap \text{int}(G)$ temos que U é uma vizinhança aberta de s_0 tal que

$$s \in U \Rightarrow \|\mu_s - \mu_{s_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$|\mu_{s_0}(U \setminus \{s_0\})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Agora seja $g \in C(S)$ com $\|g\| = 1$ e $\|Tg\| = \|T\|$; tal g existe pois por hipótese T atinge a norma. Então, como S é compacto e Tg é contínua,

$$\|T\| = \|Tg\| = \sup_{s \in S} |Tg(s)| = |Tg(s_0)| = \left| \int_S g(t)\mu_{s_0}(dt) \right|$$

para algum $s_0 \in S$. Multiplicando g por uma constante apropriada de módulo unitário, podemos assumir que $\int_S g(t)\mu_{s_0}(dt) > 0$ e daí

$$\|T\| = \int_S g(t)\mu_{s_0}(dt).$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então, como observado anteriormente, existe um conjunto aberto U tal que $s_0 \in U$, $|\mu_{s_0}(U \backslash \{s_0\})| < \frac{\varepsilon}{4}$ e, $s \in U$ implica $\|\mu_s - \mu_{s_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Já que s_0 não é um ponto isolado de S, existe $s_1 \in U$ com $s_1 \neq s_0$. Assim, pelo Lema 3.2.1, existe uma função $F \in C(S)$ com $\|F\| = 1$, $F(s_1) = 1$, $F(s_0) = g(s_0)$ e $F(t) = g(t)$ para $t \notin U$; basta tomar $A = \{s_0\} \cup S \backslash U$ e $B = \{s_1\}$. Daí,

$$\|I + T\| \geq \|(I+T)F\| \geq |(I+T)F(s_1)| = \left| F(s_1) + \int_S F(t)\mu_{s_1}(dt) \right|.$$

Agora,

$$\begin{aligned} F(s_1) + \int_S F(t)\mu_{s_1}(dt) = F(s_1) &+ \int_S F(t)[\mu_{s_1} - \mu_{s_0}](dt) \\ &+ \int_S [F(t) - g(t)]\mu_{s_0}(dt) + \int_S g(t)\mu_{s_0}(dt). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left| \int_S F(t)[\mu_{s_1} - \mu_{s_0}](dt) \right| \leq \|F\| \, \|\mu_{s_1} - \mu_{s_0}\| = \|\mu_{s_1} - \mu_{s_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_S [F(t) - g(t)]\mu_{s_0}(dt) \right| &= \left| \int_{U \backslash \{s_0\}} [F(t) - g(t)]\mu_{s_0}(dt) \right| \\ &\leq \sup_{t \in U \backslash \{s_0\}} |F(t) - g(t)| \cdot |\mu_{s_0}(U \backslash \{s_0\})| \\ &\leq 2\, |\mu_{s_0}(U \backslash \{s_0\})| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo, como $F(s_1) = 1$ e $\int_S g(t)\mu_{s_0}(dt) = \|T\|$, segue que

$$\begin{aligned} \|I + T\| &\geq \left| F(s_1) + \int_S F(t)\mu_{s_1}(dt) \right| \\ &\geq \left| F(s_1) + \int_S g(t)\mu_{s_0}(dt) \right| - \left| \int_S F(t)[\mu_{s_1} - \mu_{s_0}](dt) \right| - \left| \int_S [F(t) - g(t)]\mu_{s_0}(dt) \right| \\ &> 1 + \|T\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 + \|T\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Como isto ocorre para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\|I + T\| \geq 1 + \|T\|.$$

Mas sempre vale $\|I + T\| \leq 1 + \|T\|$. Portanto, $\|I + T\| = 1 + \|T\|$ para todo operador compacto T sobre $C(S)$ que atinge a norma. $\square$

A seguir apresentamos o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2.3. *Seja S um espaço Hausdorff compacto. Então todo operador compacto $T : C(S) \to C(S)$ satisfaz a equação de Daugavet se, e somente se, S é um conjunto perfeito.*

Demonstração. Suponha S perfeito e seja $T : C(S) \to C(S)$ um operador compacto. Pelo Teorema 1.4.49, o conjunto dos operadores de posto finito que atingem a norma é denso (em norma) no espaço de todos os operadores compactos de C(S) em C(S). Então, existe uma sequência (T_n) de operadores de posto finito, e portanto compactos, que atingem a norma tal que $T_n \to T$. Pelo Teorema 3.2.2, temos que $\|I + T_n\| = 1 + \|T_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\|I + T\| = \|I + \lim_{n\to\infty} T_n\| = \lim_{n\to\infty} \|I + T_n\| = \lim_{n\to\infty} (1 + \|T_n\|) = 1 + \|T\|.$$

Logo, se S é perfeito então T satisfaz a equação de Daugavet.

A recíproca segue pelo Teorema 3.1.8. $\square$

3.3 Operadores Fracamente Compactos em $C(S)$

Neste capítulo apresentaremos resultados relativos à equação de Daugavet para operadores fracamente compactos em $C(S)$. Na Seção 3.3.1, apresentaremos a demonstração dada por J. R. Holub em [8] para o caso $S = [0, 1]$, e na Seção 3.3.2 apresentaremos a demonstração de D. Werner em [15] para o caso geral em que S é perfeito.

Apesar dos resultados da Seção 3.3.2 incluírem os resultados das Seções 3.3.1 e 3.2, optamos por apresentar todas as demonstrações no intuito de ilustrar um pouco da evolução histórica das técnicas empregadas para resolver o problema da Equação de Daugavet.

Antes de iniciar as Subseções 3.3.1 e 3.3.2 consideremos um lema necessário para as demonstrações dos teoremas principais de ambas subseções.

Lema 3.3.1. *Seja S um espaço topológico. Se T é um operador linear limitado em $C(S)$ então $\|T^* \circ \pi(\cdot)\|$ é uma função semi-contínua inferiormente em S.*

Demonstração. Considere $c \in \mathbb{R}$. Desejamos provar que $U = \{s \in S : \|T^* \circ \pi(s)\| > c\}$ é aberto. Se $U = \varnothing$, então não temos o que provar. Suponhamos que U é não-vazio. Seja então $s_0 \in U$. Queremos uma vizinhança aberta V de s_0 tal que se $s \in V$ então $\|T^* \circ \pi(s)\| > c$. Agora

$$\|T^* \circ \pi(s_0)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |T^*(\pi(s_0))(f)|.$$

Então existe $f_0 \in C(S)$, $\|f_0\| \leq 1$, tal que $|T^*(\pi(s_0))(f_0)| > c$, ou seja, $|Tf_0(s_0)| > c$. Agora, como $|Tf_0(\cdot)|$ é uma função contínua, segue que existe uma vizinhança V de s_0 tal que

$$\begin{aligned} s \in V &\Rightarrow |Tf_0(s)| > c \\ &\Rightarrow |T^*(\pi(s))(f_0)| > c \\ &\Rightarrow \sup_{\|f\| \leq 1} |T^*(\pi(s))(f)| > c \\ &\Rightarrow \|T^* \circ \pi(s)\| > c. \end{aligned}$$

Logo $\|T^* \circ \pi(\cdot)\|$ é semi-contínua inferiormente em S. $\square$

3.3.1 O caso $S = [0, 1]$

O propósito desta subseção é mostrar que operadores fracamente compactos em $C[0, 1]$ satisfazem a equação de Daugavet.

A seguir, utilizaremos a seguinte notação

$$f(a-) = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

para uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um valor $a \in \mathbb{R}$ qualquer.

A seguir apresentamos uma série de lemas preparatórios, que serão utilizados para demonstrar o teorema principal.

Lema 3.3.2 ([8], Lema)**.** *Sejam h pertencente a $NBV[0, 1]$, s_0 em $(0, 1)$, e*

$$g_{s_0}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 \leq t < s_0 \\ 1 & , \text{ se } s_0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Se $h(s_0-) \leq h(s_0)$ então $v(g_{s_0} + h, [0, 1]) = 1 + v(h, [0, 1])$.

Demonstração. Claramente

$$v(g_{s_0}+h,[0,1]) \leq v(g_{s_0},[0,1]) + v(h,[0,1]) = 1 + v(h,[0,1]).$$

Logo, basta mostrar que $v(g_{s_0}+h,[0,1]) \geq 1 + v(h,[0,1])$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Escolha uma partição $\{t_i\}_{i=0}^n$ de $[0,1]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |h(t_i) - h(t_{i-1})| > v(h,[0,1]) - \frac{\varepsilon}{2}$$

e $s_0 \in (t_{k-1}, t_k)$ para algum k, isto é possível pela definição de $v(h,[0,1])$. Agora, como $h(s_0-) \leq h(s_0)$, para o ε dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$s \in (s_0 - \delta, s_0) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{4} < h(s_0-) - h(s) \leq h(s_0) - h(s).$$

Daí, existe um ponto p tal que $t_{k-1} < p < s_0$ e $h(s_0) - h(p) > -\frac{\varepsilon}{4}$. Assim, se $h(s_0) - h(p) > 0$ então

$$-|h(s_0) - h(p)| + |1 + h(s_0) - h(p)| = 1 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

e se $h(s_0) - h(p) < 0$ então

$$\begin{aligned} -|h(s_0) - h(p)| + |1 + h(s_0) - h(p)| &\geq -|h(s_0) - h(p)| + 1 - |h(s_0) - h(p)| \\ &> -\frac{\varepsilon}{4} + 1 - \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} v(g_{s_0}+h,[0,1]) \geq& \sum_{i \neq k} |(g_{s_0}+h)(t_i) - (g_{s_0}+h)(t_{i-1})| + |(g_{s_0}+h)(p) - (g_{s_0}+h)(t_{k-1})| \\ &+ |(g_{s_0}+h)(s_0) - (g_{s_0}+h)(p)| + |(g_{s_0}+h)(t_k) - (g_{s_0}+h)(s_0)| \\ =& \sum_{i \neq k} |(g_{s_0}+h)(t_i) - (g_{s_0}+h)(t_{i-1})| + |h(p) - h(t_{k-1})| \\ &+ |1 + h(s_0) - h(p)| + |1 + h(t_k) - 1 - h(s_0)| \\ =& \sum_{i \neq k} |h(t_i) - h(t_{i-1})| + |h(p) - h(t_{k-1})| + |1 + h(s_0) - h(p)| \\ &+ |h(t_k) - h(s_0)| \\ =& \sum_{i \neq k} |h(t_i) - h(t_{i-1})| + \big(|h(p) - h(t_{k-1})| + |h(s_0) - h(p)| + |h(t_k) - h(s_0)|\big) \\ &- |h(s_0) - h(p)| + |1 + h(s_0) - h(p)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i=1}^{n} |h(t_i) - h(t_{i-1})| - |h(s_0) - h(p)| + |1 + h(s_0) - h(p)| \\
&> \sum_{i=1}^{n} |h(t_i) - h(t_{i-1})| + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> v(h, [0,1]) - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 1 + v(h, [0,1]) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos

$$v(g_{s_0} + h, [0,1]) \geq 1 + v(h, [0,1]),$$

e o lema está provado. □

Lema 3.3.3. *Sejam $f \in C[0,1]$, $s \in (0,1)$ e g_s a função definida no lema anterior. Então*

$$\int_0^1 f(t) dg_s(t) = f(s).$$

Demonstração. Seja $\mu_s \in rba[0,1]$ a função conjunto associada a g_s pelo Teorema 2.1.5. Então

$$\int_0^1 f(t) dg_s(t) = \int_0^1 f(t) \mu_s(dt),$$

e para $0 < a < b \leq 1$, tem-se

$$\mu_s((a,b]) = g_s(b) - g_s(a) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } a < b < s \\ 1 & , \text{ se } a < s \leq b \\ 0 & , \text{ se } s \leq a < b \end{cases}$$

e

$$\mu_s([0,b]) = g_s(b) - g_s(0) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 \leq b < s \\ 1 & , \text{ se } s \leq b \leq 1 \end{cases}.$$

Considere $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função constante dada por $h(t) = f(s)$, para todo $t \in [0,1]$. Mostraremos que $(f - h)$ é uma função μ_s-nula. Dado $\alpha > 0$, como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \alpha.$$

Daí,

$$|f(t) - h(t)| > \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(s)| > \alpha \quad \Rightarrow \quad |t - s| \geq \delta.$$

Assim, como μ_s é uma função não-negativa,

$$\begin{aligned} v(\mu_s, \{t \in [0,1] : |f(t) - h(t)| > \alpha\}) &= \mu_s(\{t \in [0,1] : |f(t) - h(t)| > \alpha\}) \\ &\leq \mu_s([0, s-\delta] \cup [s+\delta, 1]) \\ &\leq \mu_s\left([0, s-\delta] \cup \left(s + \frac{\delta}{2}, 1\right]\right) \\ &= \mu_s([0, s-\delta]) + \mu_s\left(\left(s + \frac{\delta}{2}, 1\right]\right) = 0. \end{aligned}$$

Então $(f - h)$ é uma função μ_s-nula, pois

$$v(\mu_s, \{t \in [0,1] : |f(t) - h(t)| > \alpha\}) = 0, \text{ para todo } \alpha > 0.$$

De acordo com a Definição 1.3.12, segue que f é uma função μ_s-simples integrável e

$$\int_0^1 f(t)\mu_s(dt) = \int_0^1 h(t)\mu_s(dt) = f(s)\mu_s([0,1]) = f(s).$$

Portanto,

$$\int_0^1 f(t)dg_s(t) = f(s).$$

□

Lema 3.3.4. *Sejam $I = [0,1]$ e K um subconjunto fracamente sequencialmente compacto de $NBV(I)$. Então existe uma $g \in NBV(I)$ de forma que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|g(s) - g(t)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(s) - f(t)| < \varepsilon \text{ para toda } f \in K.$$

Demonstração. Usando a identificação do Teorema 2.1.5 temos que $K \subset rba(I)$. Como $rba(I) \subset ba(I)$ segue que K é um subconjunto fracamente sequencialmente compacto de $ba(I)$. Então, pela Proposição 1.4.33, existe $\mu_0 \in ba(I)$ de forma que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu_0(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) < \varepsilon \text{ para toda } \lambda \in K \text{ e todo } E \in \Sigma. \tag{3.6}$$

A partir de $\mu_0 \in ba(I)$, defina

$$\mu_1(F) = \inf_{G \supset F} \mu_0(G), \quad \mu_2(E) = \sup_{F \subset E} \mu_1(F),$$

onde F é fechado, G é aberto e E é um subconjunto qualquer de I. Pela demonstração do Teorema 2.1.3, se μ é a restrição de μ_2 a álgebra determinada pelos conjuntos fechados em I então $\mu \in rba(I)$ e $\mu_0(F) = \mu_1(F) = \mu_2(F) = \mu(F)$, para todo F fechado. Assim, se $\mu(F) < \delta$ então $\mu_0(F) < \delta$, para todo F fechado. Em particular, para intervalos da forma $[s,t] \subset I$ temos que

$$\mu([s,t]) < \delta \Rightarrow \mu_0([s,t]) < \delta.$$

Usando novamente a identificação feita no Teorema 2.1.5, sejam $g, g_0 \in NBV(I)$ associadas a μ e μ_0, respectivamente. Então temos que

$$|g(s) - g(t)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g_0(s) - g_0(t)| < \varepsilon \text{ para todo } s,t \in I.$$

Daí, segue por (3.6) que $g \in NBV(I)$ é uma função tal que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que

$$|g(s) - g(t)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(s) - f(t)| < \varepsilon \text{ para toda } f \in K.$$

□

A seguir apresentamos o principal resultado desta subseção.

Teorema 3.3.5 ([8], Teorema)**.** *Seja T um operador linear limitado em $C = C[0,1]$. Então*

(i) ou T ou $-T$ satisfaz a equação de Daugavet;

(ii) se T é fracamente compacto então $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.4 sabemos que o operador T pode ser representado por

$$Tf(s) = \int_0^1 f(t)dk(s,t), \quad 0 \le s \le 1, f \in C[0,1],$$

onde $k(s,\cdot)$ pertence a $NBV[0,1]$ para todo $s \in [0,1]$ e

$$\|T\| = \sup_{s\in[0,1]} v(k(s,\cdot),[0,1]) = \sup_{s\in[0,1]} \|k(s,\cdot)\|. \tag{3.7}$$

Ainda mais, identificando $C^*[0,1]$ e $NBV[0,1]$ pelo Corolário 2.1.6, temos que, para cada $s \in (0,1)$, a função escada g_s do Lema 3.3.2 é igual a $\pi(s) \in C^*[0,1]$, pois

$$\int_0^1 f(t)dg_s(t) = f(s) = \pi(s)(f), \quad f \in C[0,1],$$

pelo Lema 3.3.3. Daí, pela demonstração do Teorema 2.2.4 temos

$$k(s,\cdot) = T^*(\pi(s)) = T^*(g_s).$$

Agora mostraremos que (i) ocorre. Sejam $\varepsilon > 0$ dado e $s_1 \in [0,1]$ um ponto tal que $\|k(s_1,\cdot)\| > \|T\| - \frac{\varepsilon}{4}$; isto é possível por (3.7). Como $\|k(s,\cdot)\| = \|T^*(\pi(s))\|$, temos $\|k(s,\cdot)\|$ semi-contínua inferiormente em $s \in [0,1]$, pelo Lema 3.3.1. Assim, existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $\|k(s_0,\cdot)\| \geq \|k(s_1,\cdot)\| - \frac{\varepsilon}{4}$. Daí, segue que

$$\|k(s_0,\cdot)\| \geq \|k(s_1,\cdot)\| - \frac{\varepsilon}{4} > \|T\| - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \|T\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Suponha que $k(s_0, s_0-) \leq k(s_0,s_0)$. Então, tomando $h(t) = k(s_0,t)$ no Lema 3.3.2, temos

$$\begin{aligned}\|g_{s_0} + k(s_0,\cdot)\| &= v(g_{s_0} + k(s_0,\cdot),[0,1])\\ &= 1 + v(k(s_0,\cdot),[0,1])\\ &= 1 + \|k(s_0,\cdot)\|\\ &> 1 + \|T\| - \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Como

$$\|g_{s_0} + k(s_0,\cdot)\| = \sup_{\|f\|\leq 1}\left|\int_0^1 f(t)d(g_{s_0}(t) + k(s_0,t))\right|,$$

existe uma $f \in C[0,1]$ com $\|f\| \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)d(g_{s_0}(t) + k(s_0,t))\right| &> \|g_{s_0} + k(s_0,\cdot)\| - \frac{\varepsilon}{2}\\ &> 1 + \|T\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\\ &> 1 + \|T\| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Multiplicando f por uma constante apropriada de módulo unitário, podemos assumir $\int_0^1 f(t)d(g_{s_0}(t) + k(s_0,t)) > 0$ e daí

$$\int_0^1 f(t)d(g_{s_0}(t) + k(s_0,t)) > 1 + \|T\| - \varepsilon.$$

Mas então

$$\begin{aligned}\|f + Tf\| = \sup_s |f(s) + Tf(s)| &= \sup_s \left|f(s) + \int_0^1 f(t)dk(s,t)\right|\\ &\geq f(s_0) + \int_0^1 f(t)dk(s_0,t)\\ &= \int_0^1 f(t)dg_{s_0}(t) + \int_0^1 f(t)dk(s_0,t)\\ &= \int_0^1 f(t)d(g_{s_0}(t) + k(s_0,t))\\ &> 1 + \|T\| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Assim, $\|I+T\| > 1 + \|T\| - \varepsilon$. Por outro lado, se $k(s_0, s_0-) > k(s_0, s_0)$, então temos $-k(s_0, s_0-) < -k(s_0, s_0)$. Daí, pelo mesmo argumento (aplicado a $h(t) = -k(s_0, t)$) obtemos $\|I - T\| > 1 + \|T\| - \varepsilon$. Isto é verdade para cada $\varepsilon > 0$, então sejam $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, e para cada n escolha s_n em $(0,1)$ tal que $\|k(s_n, \cdot)\| > \|T\| - \frac{\varepsilon_n}{2}$. Como mostramos, para cada n ou $\|I+T\| > 1+\|T\|-\frac{1}{n}$ ou $\|I-T\| > 1+\|T\|-\frac{1}{n}$. Considerando subsequências segue que $\|I+T\| \geq 1 + \|T\|$ ou $\|I-T\| \geq 1 + \|T\|$, o que prova (i).

Para provar (ii), suponha que T é um operador fracamente compacto. Novamente, dado $\varepsilon > 0$ escolha s_0 em $(0,1)$ para o qual $\|k(s_0, \cdot)\| > \|T\| - \frac{\varepsilon}{4}$. Já que $\|k(s, \cdot)\|$ é semi-contínua inferiormente em $s \in [0,1]$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|s - s_0| < \delta$ então $\|k(s, \cdot)\| \geq \|k(s_0, \cdot)\| - \frac{\varepsilon}{4} > \|T\| - \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, como $\|g_s\| = 1$ para todo $s \in (0,1)$, temos $\{k(s,\cdot)\}_s = \{T^*(g_s)\}_s \subset T^*(B_{C^*})$, onde B_{C^*} é a bola unitária fechada em $C^*[0,1]$, e como T^* é fracamente compacto temos $\overline{T^*(B_{C^*})}^{\sigma(C,C^*)}$ fracamente compacto. Daí, $\overline{\{k(s,\cdot)\}_{s\in(0,1)}}^{\sigma(C,C^*)}$ é fracamente compacto em $NBV[0,1]$, e assim $\{k(s,\cdot)\}_{s\in(0,1)}$ é um conjunto fracamente sequencialmente compacto, pelo Teorema de Smulian (1.4.18). Segue então pelo Lema 3.3.4 que existe uma função $g \in NBV[0,1]$ tal que: dado $\delta > 0$, existe um $\beta > 0$ de forma que

$$r, w \in (0,1) \text{ e } |g(r) - g(w)| < \beta \quad \Rightarrow \quad |k(s,r) - k(s,w)| < \delta$$

para todo $s \in (0,1)$. Em particular, se $g(t)$ é contínua em um ponto $t = s_1$, então $k(s,t)$ é também contínua em $t = s_1$ para todo $s \in (0,1)$. De fato, sendo $g(t)$ contínua em $t = s_1$, dado $\beta > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$|r - s_1| < \alpha \Rightarrow |g(r) - g(s_1)| < \beta.$$

Assim, fixado $s \in (0,1)$ e dado $\delta > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$|r - s_1| < \alpha \Rightarrow |k(s,r) - k(s,s_1)| < \delta.$$

Logo, $k(s,t)$ é contínua em $t = s_1$.

Pela Proposição 1.4.23, $g(t)$ é contínua em $(0,1)$, a menos de uma quantidade enumerável de pontos. Daí, podemos encontrar (para o δ dado acima) um ponto $s_1 \in (0,1)$ para o qual $|s_0 - s_1| < \delta$ e no qual $g(t)$ é contínua. Mas então, como mostrado acima, $k(s_1, t)$ é também contínua em $t = s_1$, e assim $k(s_1, s_1-) = k(s_1, s_1)$. Segue pelo Lema 3.3.2 que $\|g_{s_1} + k(s_1, \cdot)\| = 1 + \|k(s_1, \cdot)\|$. Agora, sendo $|s_0 - s_1| < \delta$ temos

$$\|g_{s_1} + k(s_1, \cdot)\| = 1 + \|k(s_1, \cdot)\| > 1 + \|T\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, como na prova de (i), existe uma $f \in C[0,1]$ com $\|f\| \leq 1$ tal que

$$\int_0^1 f(t)d(g_{s_1}(t) + k(s_1,t)) > \|g_{s_1} + k(s_1,\cdot)\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí,

$$\int_0^1 f(t)d(g_{s_1}(t) + k(s_1,t)) > 1 + \|T\| - \varepsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|I+T\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \|h + Th\| \geq \|f + Tf\| \\
&= \sup_s |f(s) + Tf(s)| \\
&= \sup_s \left| f(s) + \int_0^1 f(t)dk(s,t) \right| \\
&\geq f(s_1) + \int_0^1 f(t)dk(s_1,t) \\
&= \int_0^1 f(t)dg_{s_1}(t) + \int_0^1 f(t)dk(s_1,t) \\
&= \int_0^1 f(t)d(g_{s_1}(t) + k(s_1,t)) \\
&> 1 + \|T\| - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\|I+T\| = 1 + \|T\|$, e (ii) fica provado. $\square$

Observação 3.3.6. Provamos na Proposição 3.1.3 que se X é um espaço de Banach e todo operador compacto (fracamente compacto) $R : X^* \to X^*$ satisfaz a equação de Daugavet, então $\|I+T\| = 1 + \|T\|$ para todo operador T compacto (fracamente compacto) em X. Mostraremos agora que a recíproca de tal afirmação não é verdadeira, ou seja, mesmo se $\|I+T\| = 1 + \|T\|$ para todos operadores compactos (fracamente compactos) em um espaço de Banach X, esta propriedade pode falhar em X^*. De fato, considere $X = C[0,1]$. Então $X^* = NBV[0,1]$. Ainda, pelo Teorema 3.2.3 (ou Teorema 3.3.5) $\|I+T\| = 1+\|T\|$ para todo operador T compacto (fracamente compacto) em X. Defina $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_0(s) = \begin{cases} 1 & , \ s = 0 \\ 0 & , \ s \neq 0 \end{cases}.$$

Daí, $f_0 \in NBV[0,1]$. Agora defina $R : NBV[0,1] \to NBV[0,1]$ por $Rg = -g(0)f_0$ para $g \in NBV[0,1]$. Como a imagem de R é unidimensional temos que R é um operador compacto (fracamente compacto). Além disso, se $g \in NBV[0,1]$ então $(I+R)g(s) = g(s)$ para $s \neq 0$ e $(I+R)g(0) = 0$. Assim $\|I+R\| = 1 < 1 + \|R\|$. Logo, R é um operador compacto (fracamente compacto) em X^* que não satisfaz a equação de Daugavet.

3.3.2 O caso S perfeito

Nesta subseção consideraremos $C(S)$ real e provaremos que um operador fracamente compacto em $C(S)$ satisfaz a equação de Daugavet se, e somente se, S é um espaço Hausdorff compacto perfeito. A demonstração deste resultado baseia-se essencialmente nos dois lemas seguintes.

Lema 3.3.7 ([15], Lema 3)**.** *Sejam S um espaço Hausdorff compacto e $T : C(S) \to C(S)$ um operador linear limitado com núcleo estocástico $\{\mu_s\}_{s\in S}$. Se o núcleo satisfaz*

$$\sup_{s\in U} \mu_s(\{s\}) \geq 0 \text{ para todo aberto não-vazio } U \subset S \tag{3.8}$$

então

$$\|I+T\| = 1 + \|T\|\,.$$

De fato, uma condição necessária e suficiente para que T satisfaça a equação de Daugavet é

$$\sup_{\{s:\|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \mu_s(\{s\}) \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.9}$$

Demonstração. Consideremos a família de medidas de Dirac $\{\delta_s\}_{s\in S}$. Lembrando que a variação total de uma função conjunto aditiva é também aditiva (Lema 1.3.7), temos que

$$\|I+T\| = \sup_{s\in S} \|\delta_s + \mu_s\| = \sup_{s\in S}(|1+\mu_s(\{s\})| + v(\mu_s, S\setminus\{s\}))$$

e

$$1 + \|T\| = \sup_{s\in S}(1+\|\mu_s\|) = \sup_{s\in S}(1 + |\mu_s(\{s\})| + v(\mu_s, S\setminus\{s\})).$$

Então os problemas em provar a equação de Daugavet surgem somente quando algum dos $\mu_s(\{s\})$ é negativo.

Provaremos a seguir que se

$$\sup_{s\in U} \mu_s(\{s\}) \geq 0 \text{ para todo aberto não-vazio } U \subset S$$

e em particular

$$\sup_{\{s:\|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \mu_s(\{s\}) \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

então

$$\|I+T\| = 1 + \|T\|.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Considere o conjunto

$$U = \{s : \|\mu_s\| > \|T\| - \varepsilon\}.$$

Através da identificação $\mu_s = T^*(\pi(s))$, temos que U é aberto, já que $\|T^* \circ \pi(\cdot)\|$ é semi-contínua inferiormente, pelo Lema 3.3.1. Agora aplicando (3.8) ao conjunto U (isto é, aplicando (3.9)) obtemos

$$\{s \in U : \mu_s(\{s\}) \geq -\varepsilon\} \neq \varnothing.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|I+T\| &\geq \sup_{s\in U} \|\delta_s + \mu_s\| \\
&= \sup_{s\in U}(|1+\mu_s(\{s\})| + v(\mu_s, S\setminus\{s\})) \\
&\geq \sup_{\{s\in U:\ \mu_s(\{s\})\geq -\varepsilon\}} (|1+\mu_s(\{s\})| + v(\mu_s, S\setminus\{s\})) \\
&= \sup_{\{s\in U:\ \mu_s(\{s\})\geq -\varepsilon\}} \begin{cases} 1+\|\mu_s\| & ,\mu_s(\{s\}) \geq 0 \\ 1-|\mu_s(\{s\})| + v(\mu_s, S\setminus\{s\}) & ,\mu_s(\{s\}) < 0 \end{cases} \\
&= \sup_{\{s\in U:\ \mu_s(\{s\})\geq -\varepsilon\}} \begin{cases} 1+\|\mu_s\| & ,\mu_s(\{s\}) \geq 0 \\ 1+\|\mu_s\| - 2|\mu_s(\{s\})| & ,\mu_s(\{s\}) < 0 \end{cases} \\
&= \sup_{\{s\in U:\ \mu_s(\{s\})\geq -\varepsilon\}} (1+\|\mu_s\| + \mu_s(\{s\}) - |\mu_s(\{s\})|) \\
&\geq 1 + \|T\| - \varepsilon + \sup_{\mu_s(\{s\})\geq -\varepsilon} (\mu_s(\{s\}) - |\mu_s(\{s\})|) \\
&\geq 1 + \|T\| - 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Daí, como ε é arbitrário, concluímos que

$$\|I+T\| \geq 1 + \|T\|.$$

Logo, T satisfaz a equação de Daugavet.

Provaremos agora que se $\|I+T\| \geq 1 + \|T\|$ então

$$\sup_{\{s:\|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \mu_s(\{s\}) \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Fixemos então $\varepsilon > 0$. Dado $\delta > 0$ (podemos supor $\delta < \varepsilon$), como

$$\|I+T\| = \sup_{s\in S}(|1+\mu_s(\{s\})| + v(\mu_s, S\setminus\{s\})),$$

existe $s_0 \in S$ tal que

$$\|I+T\| - \delta < |1+\mu_{s_0}(\{s_0\})| + v(\mu_{s_0}, S\setminus\{s_0\}).$$

Daí,

$$\begin{aligned} 1+|\mu_{s_0}(\{s_0\})| + v(\mu_{s_0}, S\setminus\{s_0\}) - \delta &= 1 + \|\mu_{s_0}\| - \delta \\ &\le 1+\|T\| - \delta \\ &= \|I+T\| - \delta \\ &< |1+\mu_{s_0}(\{s_0\})| + v(\mu_{s_0}, S\setminus\{s_0\})). \end{aligned}$$

Então

$$1+|\mu_{s_0}(\{s_0\})| - \delta < |1+\mu_{s_0}(\{s_0\})|. \tag{3.10}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} 1+\|T\| - \varepsilon &< 1+\|T\| - \delta \\ &< |1+\mu_{s_0}(\{s_0\})| + v(\mu_{s_0}, S\setminus\{s_0\}) \\ &\le 1+|\mu_{s_0}(\{s_0\})| + v(\mu_{s_0}, S\setminus\{s_0\}) \\ &= 1+\|\mu_{s_0}\| \end{aligned}$$

temos $\|\mu_{s_0}\| > \|T\| - \varepsilon$, ou seja, $s_0 \in \{s : \|\mu_s\| > \|T\| - \varepsilon\}$. Assim, se $\mu_{s_0}(\{s_0\}) \ge 0$ então

$$\sup_{\{s:\|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \mu_s(\{s\}) \ge 0.$$

Agora se $\mu_{s_0}(\{s_0\}) < 0$ então (3.10) implica $-1 < \mu_{s_0}(\{s_0\})$. Caso contrário obteríamos

$$1-\mu_{s_0}(\{s_0\}) - \delta < -1-\mu_{s_0}(\{s_0\}),$$

isto é, $2 < \delta$, mas isto é absurdo já que δ foi escolhido arbitrariamente. Daí, como $-1 < \mu_{s_0}(\{s_0\}) < 0$ temos, ainda por (3.10),

$$1-\mu_{s_0}(\{s_0\}) - \delta < 1+\mu_{s_0}(\{s_0\}),$$

que implica $\mu_{s_0}(\{s_0\}) > -\frac{\delta}{2} > -\delta$. Então

$$\sup_{\{s:\|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \mu_s(\{s\}) \ge \mu_{s_0}(\{s_0\}) > -\delta.$$

Logo, como δ é arbitrário, obtemos

$$\sup_{\{s:\|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \mu_s(\{s\}) \geq 0.$$

$\square$

Lema 3.3.8 ([15], Lema 4)**.** *Se S é um espaço Hausdorff compacto perfeito e $T : C(S) \to C(S)$ é fracamente compacto, então T satisfaz (3.8) do Lema 3.3.7.*

Demonstração. Para provar este lema argumentaremos por contradição. Suponha então que existe um conjunto aberto não-vazio $U \subset S$ e algum $\beta > 0$ tal que

$$\mu_s(\{s\}) < -2\beta \quad \forall s \in U.$$

Notemos agora que, para cada $t \in S$, a função $s \mapsto \mu_s(\{t\})$ é contínua, já que T é fracamente compacto. De fato, como T é fracamente compacto temos que $s \mapsto \mu_s$ é fracamente contínua, pelo Teorema 2.2.1. Além disso, $\mu \mapsto \mu(\{t\})$ pertence a $rca^*(S)$, pois $|\mu(\{t\})| \leq \|\mu\|$. Daí,

$$s_\alpha \to s_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{s_\alpha} \xrightarrow{w} \mu_{s_0} \quad \Rightarrow \quad \mu_{s_\alpha}(\{t\}) \to \mu_{s_0}(\{t\}).$$

Assim, $s \mapsto \mu_s(\{t\})$ é contínua.

Voltando ao nosso argumento, escolha $s_0 \in U$ e considere o conjunto

$$U_1 = \{s \in U : |\mu_s(\{s_0\}) - \mu_{s_0}(\{s_0\})| < \beta\},$$

que é uma vizinhança aberta de s_0, como acabamos de observar. Já que s_0 não é isolado, existe algum $s_1 \in U_1$, $s_1 \neq s_0$. Como $s_1 \in U$ temos

$$\mu_{s_1}(\{s_1\}) < -2\beta,$$

e como $s_1 \in U_1$ temos

$$\mu_{s_1}(\{s_0\}) < \mu_{s_0}(\{s_0\}) + \beta < -2\beta + \beta = -\beta.$$

No próximo passo escolhemos

$$U_2 = \{s \in U_1 : |\mu_s(\{s_1\})) - \mu_{s_1}(\{s_1\})| < \beta\}.$$

Analogamente, esta é uma vizinhança aberta de s_1, então existe $s_2 \in U_2$, $s_2 \neq s_1$ e $s_2 \neq s_0$. Concluímos, usando que $s_2 \in U$, $s_2 \in U_2$ e $s_2 \in U_1$, que $\mu_{s_2}(\{s_2\}) < -2\beta$,

$\mu_{s_2}(\{s_1\}) < -\beta$ e $\mu_{s_2}(\{s_0\}) < -\beta$, respectivamente. Assim, definimos indutivamente uma sequência decrescente de conjuntos abertos $U_n \subset U$ e de pontos distintos $s_n \in U$ por

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \{s \in U_n : |\mu_s(\{s_n\}) - \mu_{s_n}(\{s_n\})| < \beta\} \\ s_{n+1} &\in U_{n+1} \setminus \{s_0, \ldots, s_n\}, \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\mu_{s_n}(\{s_j\}) < -\beta \quad \forall j = 0, \ldots, n-1.$$

Consequentemente,

$$\|T\| \geq \|\mu_{s_n}\| \geq v(\mu_{s_n}, \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}) \geq n\beta \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

que nos leva a uma contradição. □

A seguir apresentamos o principal teorema desta seção.

Teorema 3.3.9 ([15], Teorema 5)**.** *Seja $T : C(S) \to C(S)$ um operador fracamente compacto. Então T satisfaz a equação de Daugavet se, e somente se, S é um espaço Hausdorff compacto perfeito.*

Demonstração. Se T é fracamente compacto então o resultado segue dos Lemas 3.3.7 e 3.3.8. A recíproca segue do Teorema 3.1.8. □

Observações 3.3.10.

(a) Se T é compacto, a prova do Lema 3.3.8 pode ser simplificada. De fato, se $\mu_s(\{s\}) < -2\beta < 0$ em um conjunto aberto não-vazio U, escolha $s \in U$ e considere o conjunto

$$U_1 = \{t \in U : \|\mu_s - \mu_t\| < \beta\}.$$

Já que T é compacto, $s \mapsto \mu_s$ é contínua. Daí, U_1 é uma vizinhança aberta de s, e para $t \in U_1$ temos

$$\begin{aligned} \mu_s(\{t\}) &\leq \mu_t(\{t\}) + |\mu_t(\{t\}) - \mu_s(\{t\})| \\ &< -2\beta + \|\mu_s - \mu_t\| < -2\beta + \beta = -\beta. \end{aligned}$$

Como s não é isolado, existem infinitos pontos distintos $t_1, t_2, \ldots \in U_1$, e então obtemos

$$v(\mu_s, \{t_1, t_2, \ldots\}) = \infty,$$

o que é absurdo.

(b) Por fim, não podemos deixar de observar que segundo D. Werner [15] todos os resultados desta subseção são válidos para o caso onde $C(S)$ é um espaço complexo, fazendo as mudanças necessárias nas demonstrações. Neste caso, (3.8) no Lema 3.3.7 deve ser trocada por

$$\sup_{s\in U}\big(|1+\mu_s(\{s\})| - (1+|\mu_s(\{s\})|)\big) \geq 0 \quad \text{para todo aberto não-vazio } U \subset S.$$

Trabalhos Futuros

Futuramente pretendemos trabalhar com diversos resultados recentes sobre a equação de Daugavet.

Gostaríamos de estender os resultados de Choi et al. [3] a outros espaços de Banach, como por exemplo $L_1[0,1]$. Ou seja, fixado um espaço de Banach, queremos saber se os polinômios fracamente compactos neste espaço satisfazem a equação de Daugavet.

Também pretendemos estender os resultados de Kadets et al. [10] ao caso polinomial. Mais precisamente, se X é um espaço de Banach com a propriedade que cada operador de posto um em X satisfaz a equação de Daugavet, desejamos saber se cada polinômio fracamente compacto em X também satisfaz a equação de Daugavet.

Outro objetivo futuro é o estudo da equação de Daugavet para aplicações holomorfas. Em primeiro lugar gostaríamos de saber se cada aplicação holomorfa na bola aberta unitária de $C[0,1]$, com imagem relativamente compacta, satisfaz a equação de Daugavet. Se a resposta for afirmativa, poderemos abordar o problema correspondente em outros espaços de Banach, como por exemplo o espaço $C(S)$, sendo S um espaço Hausdorff compacto perfeito, ou o espaço $L_1[0,1]$.

Referências Bibliográficas

[1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis. *An Invitation to Operator Theory.* Graduate Studies in Mathematics **50**, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2002.

[2] V. F. Babenko, S. A. Pichogov. *A property of compact operators in Banach spaces.* Ukrainian Math. J. **33** (1981), 374-376.

[3] Y. S. Choi, D. García, M. Maestre, M. Martín. *The Daugavet equation for polynomials.* Studia Math. **178** (2007), 63-82.

[4] I. K. Daugavet. *On a property of completely continuous operators in the space C.* Uspekhi Mat. Nauk **18** (1963), 157-158 (em russo).

[5] N. Dunford & J. T. Schwartz. *Linear Operators, Part I: General Theory.* New York: Wiley Classics Library, 1988.

[6] C. Foias, I. Singer. *Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions.* Math. Z. **87** (1965), 434-450.

[7] G. B. Folland. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications.* 2nd ed. New York: J. Wiley, 1999.

[8] J. R. Holub. *A property of weakly compact operators on $C[0,1]$.* Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 396-398.

[9] J. Johnson and J. Wolfe. *Norm attaining operators on $C(S)$ spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Banach Spaces of Analytic Functions (1977), 41-43.

[10] V. M. Kadets, R. V. Shvidkoy, G. G. Sirotkin, D.Werner. *Banach spaces with the Daugavet property.* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (1999), 855-873.

[11] H. Kamowitz. *A property of compact operators.* Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 231-236.

[12] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* New York: J. Wiley, 1989.

[13] G. Y. Lozanovsky. *On almost integral operators in KB-spaces.* Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astronom. **7** (1966), 35-44 (em russo).

[14] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* New York: Springer, 1998.

[15] D. Werner. *An elementary approach to the Daugavet equation.* Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability. Lecture Notes in Pure and Applied Math. **175** (1996), 449-454.