VARIAÇÕES DO TEOREMA DE BANACH STONE

Janaina Baldan Santos

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática

Área de Concentração: **Análise**

Orientadora: **Profª Drª Daniela Mariz Silva Vieira**

-São Paulo, 26 de setembro de 2016-

VARIAÇÕES DO TEOREMA DE BANACH STONE

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/07/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Eloi Medina Galego - IME-USP
- Profa. Dra. Cristiane de Andrade Mendes - UFJF

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela saúde, capacidade, grandes oportunidades para chegar tão longe e pela maravilhosa família que tenho.

Também quero agradecer a toda minha família pelo apoio, atenção e confiança. Principalmente agradeço à minha mãe pela ajuda, pela paciência, por ter me mostrado que só se chega onde se quer com perseverança e ter me ensinado a importância do estudo na vida. Agradeço também por me proporcionar um lar feliz, tranquilo e propício ao estudo.

Agradeço a minha orientadora Daniela Mariz, pela disponibilidade, pela atenção e por sempre me incentivar a seguir em frente. Muito obrigada pelas dicas de livros, de cursos e sobretudo pela ótima orientação. Agradeço também pelo projeto que desenvolvemos durante a graduação, durante a iniciação científica.

Agradeço ao professor Eloi de Medina Galego, pela ajuda e pelas valiosas dicas no desenvolvimento da minha dissertação.

Agradeço a professora Zara Issa Abud, por ter me orientado na minha primeira iniciação científica. Também agradeço a professora Cláudia Cueva Candido pelo maravilhoso projeto que desenvolvemos sobre o ensino superior.

Também agradeço a todos os professores que tive durante minha formação, inclusive minha orientadora. Agradeço pelas maravilhosas aulas e disponibilidade para tirarem dúvidas fora do horário de aulas.

Agradeço aos meus amigos que sempre estiveram comigo nos bons e maus momentos. Agradeço pela ajuda nos estudos, pelo apoio nas minhas decisões e pelos momentos de diversão. Também agradeço pelos ombros e pelos ouvidos que me emprestaram. Mesmo que a vida nos separem jamais os esquecerei e nem dos momentos que tivemos.

Muito obrigada a todos que passaram pela minha vida.

Resumo

Santos, J. B. **Variações do teorema de Banach Stone**. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Este trabalho tem por objetivo estudar algumas variações do teorema de Banach- Stone. Elas podem ser encontradas no artigo Variations on the Banach- Stone Theorem, [14]. Além disso, apresentamos um resultado, provado por D. Amir em [1], que generaliza a versão clássica do Teorema de Banach- Stone. Consideramos os espaços $\mathcal{C}(K)$ e $\mathcal{C}(L)$, que representam os espaços de funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ e de L em $\mathbb{R}$ respectivamente, onde K e L são espaços Hausdorff compactos. O enunciado da versão clássica do teorema de Banach- Stone é a seguinte: "Sejam K e L espaços Hausdorff compactos. Então $\mathcal{C}(K)$ é isométrico a $\mathcal{C}(L)$ se e somente se, K e L são homeomorfos". Apresentamos a primeira das variações que considera isomorfismo entre álgebras e foi feita por Gelfand e Kolmogoroff em [15], no ano de 1939. A segunda versão apresentada trata de isomorfismo isométrico e a demostração é originalmente devida a Arens e Kelley e é encontrada em [2]. Finalmente, estudamos o teorema provado por D. Amir e apresentado em [1]. Este teorema generaliza o teorema clássico de Banach- Stone e tem o seguinte enunciado: Se K e L são espaços Hausdorff compactos e T é um isomorfismo linear de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$, com $\|T\| \cdot \left\|T^{-1}\right\| < 2$ então K e L são homeomorfos".

Palavras-chave: Banach- Stone, funções contínuas, estrutura extremal.

Abstract

Santos, J. B. **Variations Banach- Stone Theorem**. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

This work aims to study some variations of the Banach- Stone theorem. They can be found in the article Variations on the Banach- Stone Theorem, [14]. In addition, we present a result, proved by D. Amir in [1], that generalizes the classic version of the Theorem Banach- Stone. We consider the spaces $\mathcal{C}(K)$ and $\mathcal{C}(L)$, representing the spaces of continuous functions from K into $\mathbb{R}$ and from L into $\mathbb{R}$ respectively, where K and L are compact Hausdorff spaces. The wording of the classic version of the Banach- Stone theorem is as follows: "Let K e L be compact Haudorff spaces. Then $\mathcal{C}(K)$ is isometric to $\mathcal{C}(L)$ if, and only if, K and L are homeomorphic". Here the first of the variations that considers isomorphism between algebras and was made by Gelfand and Kolmogoroff in [15], in 1939. The second version presented is about isometric isomorphisms and the demonstration is originally due to Arens and Kelley and it is found in [2]. Finally, we study the theorem proved by D. Amir and presented in [1]. This theorem generalizes the classical theorem Banach- Stone and states the following: "Let K e L be compact Haudorff spaces and let T be a linear isomorphism from $\mathcal{C}(K)$ into $\mathcal{C}(L)$, with $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 2$. Then K and L are homeomorphic".

Keywords: Banach- Stone, continuous functions, extremal structure.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números inteiros estritamente positivos
$\mathbb{R}$	o corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	o corpo dos números complexos
$\mathbb{K}$	os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
B_X	a bola unitária fechada de X
S_X	a esfera unitária de X
K, L	espaços Hausdorff compactos
$\mathcal{C}(K)$	o espaço das funções contínuas de K em $\mathbb{K}$

Introdução

O teorema de Banach- Stone, ao longo do tempo, tem encontrado várias extensões e generalizações, além de resultados que o fortalecem. Esta dissertação tem como objetivo apresentar algumas destas versões do teorema de Banach- Stone.

Em 1932, em [4], Banach demonstrou o seguinte resultado: "Sejam K e L espaços métricos compactos. Então $\mathcal{C}(K)$ é isométrico a $\mathcal{C}(L)$ se e somente se K e L são homeomorfos". Já em 1937, Stone em [24] generalizou o resultado para espaços compactos arbitrários e esta generalização é conhecido como Teorema Clássico de Banach- Stone.

Estudamos a demonstração feita pelos matemáticos Gelfand e Kolmogoroff em 1939 que trabalharam separadamente. Outra versão estudada aqui é devida originalmente a Arens e Kelley [2] e pode ser encontrada em [13]. Também enunciamos e apresentamos a demonstração do teorema provado por Amir [1], em 1966, que generaliza a versão clássica de Banach- Stone. Neste trabalho, foram utilizados os artigos [1], [14] e o livro texto [13].

Vamos apresentar agora um resumo de cada capítulo deste trabalho.

O objetivo do capítulo 1 é fazer uma apresentação dos resultados básicos de topologia e de análise funcional necessários para o bom entendimento desta dissertação.

O capítulo 2 tem por objetivo apresentar o teorema de Banach- Stone para isomorfismos álgebricos. Esta versão do teorema foi feita por Gelfand e Kolmogoroff em [15] no ano de 1939. Vamos dar uma visão geral de cada seção deste capítulo, lembrando que os resultados encontrados em cada seção são os necessários para o bom andamento desta dissertação.

A seção 2.2 tem como tema Álgebras de Banach. Nesta seção, o objetivo principal é introduzir a álgebra de Banach mais utilizada nesta dissertação, $\mathcal{C}(K)$, que é o conjuntos de todas funções contínuas $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$, onde K é um espaço topológico Hausdorff compacto, com a norma do supremo. Outro objetivo desta seção é definir os termos homomorfismos escalares e isomorfismos entre álgebras. Além disso, foram enunciados alguns resultados sobre esses assuntos, que são fundamentais para a próxima seção do capítulo 2.

Na seção 2.3, o objetivo principal é enunciar e demonstrar teorema de Banach- Stone para isomorfismos álgebricos. O enunciado deste teorema é o seguinte: "Sejam K e L espaços Hausdorff compactos. Então $\mathcal{C}(K)$ e $\mathcal{C}(L)$ são álgebras isomorfas se e somente se, K e L são homeomorfos. Além disso, todo isomorfismo de álgebra $T : \mathcal{C}(L) \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ é da forma $T(f) = f \circ h$, onde $h : K \longrightarrow L$ é um homeomorfismo". E para isso, são ncessários alguns resultados sobre álgebras de Banach e ideais.

O objetivo do capítulo 3 é apresentar o teorema clássico de Banach- Stone. A demonstração desta versão, aqui apresentada, é devida originalmente a Arens e Kelley [2] e precisa da teoria de estrutura extremal que pode ser encontrada no livro [13]. Por esse motivo, a seção 3.2 é dedicada ao estudo de estrutura extremal e para isso são necessárias as teorias de topologia fraca e de topologia fraca estrela, assuntos abordados nas seções 1.4 e 1.5 respectivamente. Na seção 3.3 é enunciado e demonstrado o Teorema de Banach- Stone, juntamente com alguns resultados necessários para a demonstração.

Em 1966, D. Amir, provou em [1] um teorema que generaliza o teorema clássico de Banach-Stone. Este teorema tem o seguinte enunciado: "Se K e L são espaços Hausdorff compactos e T é um isomorfismo linear de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$, com $\|T\| \cdot \left\|T^{-1}\right\| < 2$ então K e L são homeomorfos. O capítulo 4 tem como objetivo estudar esse teorema, utilizando o artigo [1] como base.

Na seção 4.2 são apresentados dois exemplos em que o teorema não vale se $\|T\| \cdot \left\|T^{-1}\right\| = 2$. Já na seção 4.3 são enunciados e demonstrados lemas necessários para demonstração do teorema principal deste capítulo, que é enunciado e provado logo em seguida na mesma seção.

Por último, no capítulo 5 damos uma visão geral dos avanços obtidos sobre o Teorema de Banach- Stone apresentando alguns resultados de generalização e extensão obtidos depois do resultado apresentado por Amir [1] que foi abordado no capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é dar uma visão geral dos temas básicos necessários para o andamento desta dissertação.

A seção 1.2 tem como finalidade dar as definições e resultados necessários de topologia geral e teoria de conjuntos. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [12].

Na seção 1.3, estão os resultados básicos sobre espaços de Banach. As demonstrações dos resultados, além de mais detalhes sobre o tema, podem ser encontrados em [11], [20], [22] e [23]. Na seção 1.4, damos a definição de topologia fraca, além dos resultados que dependem de topologia fraca, necessários para essa dissertação. As demonstrações são encontradas em [22]. Finalmente, a seção 1.5 versa sobre topologia fraca estrela, assunto necessário quando falarmos sobre estrutura extremal no capítulo 3. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontrados em [13] e [23].

1.2 Teoria dos conjuntos e Topologia Geral

O conteúdo apresentado nesta seção pode ser encontrado em [12] e [17].

Definição 1.2.1. *Uma* **ordem parcial** *num conjunto A é uma relação binária $\preceq$ em A satisfazendo as seguintes condições, para todos $a, b, c \in A$:*

(a) $a \preceq a$*;*

(b) *Se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, então $a \preceq c$; e*

(c) *Se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então $a = b$.*

Um conjunto com uma ordem parcial é chamado **conjunto parcialmente ordenado***.*

Definição 1.2.2. *Seja A um conjunto parcialmente ordenado.*

(a) *Uma* **cadeia** *em A é um subconjunto C de A tal que para todo a, b em C, ou $a \preceq b$ ou $b \preceq a$.*

(b) *Uma* **cota superior** *de um subconjunto B de A é um elemento $u \in A$ tal que $b \preceq u$ para todo $b \in B$.*

(c) *Um elemento m de A é* **maximal** *se $m \preceq a$ implica que $m = a$ para $a \in A$.*

Lema 1.2.3 (Lema de Zorn). *Um conjunto* **parcialmente ordenado** *em que cada cadeia tem uma cota superior contém pelo menos um elemento maximal.*

Demonstração. Vide [17], página 62. ■

Definição 1.2.4. *Uma* **relação de ordem total sobre um conjunto A** *é uma relação de ordem parcial $\preceq$ sobre A com a propriedade que para quaisquer x, y em A ou $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Neste caso A é denominado conjunto* **totalmente ordenado** *ou* **cadeia**

Definição 1.2.5. *Uma* **topologia** *num conjunto X é uma coleção τ de partes de X, chamados* **abertos** *da topologia com as seguintes propriedades:*

(a) $\varnothing$ e X *pertencem a τ;*

(b) *Se $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$; e*

(c) *Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, com $A_\lambda \in \tau$ para cada $\lambda \in L$ tem-se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.*

Um **espaço topológico** *é um par (X, τ), onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X.*

Definição 1.2.6. *Seja X um espaço topológico. O* **interior** *de um conjunto $A \subset X$ é a união de todos conjuntos abertos contidos em A. Vamos denotar o interior do conjunto A, por $intA$.*

Observação 1.2.7. *Um conjunto B é aberto se, e somente se $B = intB$.*

Definição 1.2.8. *Seja X um espaço topológico. Seja $A \subset X$ um subconjunto. Definimos a* **fronteira** *de A como sendo o conjunto:*

$$\partial A = \overline{A} \bigcap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus intA$$

Definição 1.2.9. *Um espaço topológico X é um* **espaço** T_1 *se satisfaz o seguinte axioma: Dado um par de pontos distintos $a, b \in X$, existem abertos U, V tais que $a \in U, b \notin U, a \notin V, b \in V$. Os abertos U e V não são necessariamente disjuntos.*

Definição 1.2.10. *Um espaço topológico X, chama-se* **espaço de Hausdorff** *quando, para cada par de pontos distintos x, y em X, existem abertos U e V tais que $x \in U, y \in V$ e $U \bigcap V = \varnothing$.*

Observação 1.2.11. *Um espaço de Hausdorff é um espaço T_1.*

Definição 1.2.12. *Um espaço topológico X chama-se* **normal** *quando X é T_1 e dados $F, G \subset X$ fechados, com $F \cap G = \emptyset$ existem abertos $U, V \subset X$ com $F \subset U$, $G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 1.2.13. *Uma* **cobertura** *de um conjunto X é uma família $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{s \in S} A_s = X$. Se X é um espaço topológico, $\{A_s\}_{s \in S}$ é uma* **cobertura aberta** *de X se todos os conjuntos A_s são abertos.*

Definição 1.2.14. *Um espaço topológico Haudorff X é* **compacto** *se todo recobrimento aberto de X possui um sub- recobrimento finito, isto é, para toda cobertura aberta, $\{A_s\}_{s\in S}$ do espaço X existe um conjunto finito $\{s_1, ..., s_k\} \subset S$ tal que $X = A_{s_1} \bigcup ... \bigcup A_{s_k}$.*

Proposição 1.2.15. *Todo espaço de Hausdorff compacto é normal.*

Definição 1.2.16. *Um espaço topológico X é* **completamente regular** *se e somente se satisfaz o seguinte axioma: Se F é um subconjunto fechado de X e $p \in X$ não pertence a F, então existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(p) = 0$ e $f(F) = 1$.*

Lema 1.2.17 (Lema de Urysohn)**.** *Se X é um espaço topológico normal e $A, B \subseteq X$ são fechados disjuntos então existe $f : X \to [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.*

Demonstração. Vide [12], página 41. ∎

Observação 1.2.18. *Segue do Lema de Urysohn 1.2.17 que todo espaço normal é completamente regular.*

Definição 1.2.19. *Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ um subconjunto. Definimos a* **função característica** *como:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Proposição 1.2.20. *Sejam X espaço topológico e $A \subset X$. A função característica de A é descontínua no ponto $k \in A$ se e somente se k pertence a fronteira de A, ou seja, em ∂A.*

Demonstração. De fato, seja $k \in \partial A$. Vamos provar que χ_A é descontínua em A. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Seja V_k vizinhança de k. Como $k \in \partial A$, existem $x, y \in V_k$, tais que $x \in A$ e $y \notin A$. Se $k \in A$, tome $z = y$. Se $k \notin A$, tome $z = x$. Assim $|\chi_A(z) - \chi_A(k)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Agora, vamos provar que se χ_A é descontínua em k, então $k \in \partial A$. Seja $\varepsilon > 0$. Suponha que $k \notin \partial A$, logo $k \in int(A)$ ou $k \in int(X \setminus A)$. Se $k \in int(A)$, então existe $V_k \subset A$ vizinhança de k tal que para todo $x \in V_k$, $|\chi_A(x) - \chi_A(k)| = 0 < \varepsilon$, ou seja, χ_A é contínua em k o que é um absurdo. Analogamente, mostramos que χ_A é contínua em $k \in int(X \setminus A)$, o que contradiz a hipótese. Portanto $k \in \partial A$.

∎

Agora, daremos uma noção básica de rede, necessária para o desenvolvimento desta dissertação. Mais detalhes deste conteúdo podem ser encontrados em [12]

Definição 1.2.21. *Diremos que I é um* **conjunto dirigido** *se I é um conjunto parcialmente ordenado tal que, dados $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $k \geq i$ e $k \geq j$.*

Definição 1.2.22. *Chamaremos de* **rede** *em X a toda aplicação da forma $i \in I \to x_i \in X$, sendo I um conjunto dirigido. Esta aplicação será denotada por $(x_i)_{i\in I}$.*

Definição 1.2.23. *Seja X um espaço topológico. Diremos que uma rede $(x_i)_{i\in I}$ em X* **converge** *a um ponto $x \in X$ e escreveremos $x_i \longrightarrow x$, se dada $V \in \mathcal{V}_x$, onde $\mathcal{V}_x$ é uma vizinhança de x, existe $i_0 \in I$ tal que $x_i \in V$ para todo $i \geq i_0$.*

Exemplo 1.2.24. **(a)** *Cada conjunto totalmente ordenado é um conjunto dirigido. Em particular* $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{R}$ *são conjuntos dirigidos.*

(b) *Cada sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* X *é uma rede.*

Proposição 1.2.25. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos.*

(a) *Se* $A \subset X$*, então um ponto* $x \in X$ *pertence a* $\overline{A}$ *se e somente se existe uma rede* $(x_i)_{i\in I} \subset A$ *que converge a* x*.*

(b) *Uma aplicação* $f : X \to Y$ *é contínua se e somente se , para cada rede* $(x_i)_{i\in I}$ *que converge a um ponto* $x \in X$*, a rede* $(f(x_i))_{i\in I}$ *converge a* $f(x) \in Y$*.*

(c) X *é Hausdorff se e somente se cada rede convergente tem um limite único.*

Demonstração. **(a)** Vide [12], páginas 50, 51.

(b) Vide [12], página 51.

(c) Vide [12], página 51.

■

Definição 1.2.26. *Sejam* I, J *conjunto dirigidos*

(a) *Uma aplicação* $\phi : J \to I$ *é dita* **crescente** *se* $j_1 \leq j_2$ *implica* $\phi(j_1) \leq \phi(j_2)$*.*

(b) *Uma aplicação* $\phi : J \to I$ *é dita* **cofinal** *se dado* $i \in I$ *existe* $j \in J$ *tal que* $\phi(j) \geq i$*.*

(c) *Diremos que uma rede* $(y_j)_{j\in J}$ *é uma* **subrede** *de uma rede* $(x_i)_{i\in I}$ *se existir uma aplicação crescente e cofinal* $\phi : J \to I$*, tal que* $y_j = x_{\phi(j)}$*, para cada* $j \in J$*.*

Teorema 1.2.27. *Um espaço topológico não vazio* X *é compacto se, e somente se, cada rede em* X *admite uma subrede convergente.*

Demonstração. Vide [12], página 128.

■

O objetivo agora é definir uma topologia para produto infinito de espaços topológicos $\{X_s; s \in S\}$.

Definição 1.2.28. *Dados um conjunto* S *e uma família* $\{X_s; s \in S\}$*, definimos o* **produto cartesiano** *de* $\{X_s; s \in S\}$*, denotado por* $\prod_{s\in S} X_s$ *como*

$$\prod_{s\in S} X_s = \Big\{x : S \longrightarrow \bigcup_{s\in S} X_s;\ x(s) \in X_s,\ \text{para cada } s \in S\Big\}.$$

O valor $x(s)$ da função x é usualmente denotado por x_s e chamado de s-ésima coordenada de x. Ainda muitas vezes escrevemos $x = \{x_s\}_{s\in S}$.

Definição 1.2.29. *Dado $t \in S$, a função $\pi_t : \prod_{s \in S} X_s \longrightarrow X_t$ definida por $\pi_t(f) = f(t)$ é chamada de* **projeção de $\prod_{s \in S} X_s$ na coordenada t**.

Definição 1.2.30. *Seja $\mathcal{F} = \{X_s; s \in S\}$ uma família de espaços topológicos. Dizemos que a topologia gerada pela base*

$$\left\{ \prod_{s \in S} U_s;\ U_s \text{ é aberto em } X_s \text{ e } \{s \in S; U_s \neq X_s\} \text{ é finito} \right\}$$

é o **produto de Tychonoff** *da família $\mathcal{F}$. Este espaço topológico é geralmente denotado por $\prod_{s \in S} X_s$, e esta topologia é chamanda de* **topologia produto**.

Proposição 1.2.31. *Para cada família de conjuntos $\{A_s\}_{S \in S}$, onde A_s é um subconjunto de um espaço topológico X_s, no produto $\prod_{s \in S} X_s$, temos $\overline{\prod_{s \in S} A_s} = \prod_{s \in S} \overline{A}_s$.*

Demonstração. Vide [12], página 78. ■

Proposição 1.2.32. *Seja $\{X_s;\ s \in S\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod_{s \in S} X_s$. Então uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a $x \in X$ se e somente se a rede $(\pi_s(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ converge a $\pi_s(x)$ em X_s, para cada $s \in S$.*

Demonstração. Vide [12], página 78. ■

Teorema 1.2.33 (de Tychonoff). *Se X_s é compacto para cada $s \in S$, então o produto $\prod_s X_s$ é também compacto quando equipado com a topologia produto.*

Demonstração. Vide [12], página 138. ■

1.3 Espaços de Banach

Definição 1.3.1. *Um conjunto não vazio X é um* **espaço vetorial** *sobre um corpo $\mathbb{K}$ com seus elementos, denominados* **vetores**, *se estiverem definidas as seguintes duas operações:*

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

tais que para todos $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$ e $x, y, z \in X$ temos

(a) $x + y = y + x$;

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(c) *Existe* $0 \in X$ *tal que* $x + 0 = x$*;*

(d) *Existe* $-x \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$*;*

(e) $1 \cdot x = x$*;*

(f) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$*;*

(g) $(\lambda + \eta) \cdot x = \lambda \cdot x + \eta \cdot x$*;*

(h) $\lambda(\eta \cdot x) = (\lambda \cdot \eta) \cdot x$*.*

Definição 1.3.2. *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*. Uma* **norma** *em* X *é uma função real* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que para todos* $x, y \in X$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *satisfaz as seguintes condições:*

(a) $\|x\| \geq 0$*;*

(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

(c) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$*;*

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*;*

Definição 1.3.3. *Um* **espaço normado** *é um par* $(X, \|\cdot\|)$ *consistindo de um espaço vetorial* X *e uma norma* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

Definição 1.3.4. *Um espaço vetorial normado* X *é um* **espaço de Banach** *se* X*, com a métrica induzida pela norma, é completo.*

Teorema 1.3.5. *Um espaço vetorial normado* X *é um espaço de Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em* X *é também convergente em* X*.*

Demonstração. Vide [22], página 105. ∎

Definição 1.3.6. *Sejam* X *e* Y *espaços vetoriais.*

(a) *A aplicação* $T : X \longrightarrow Y$ *é uma* **aplicação linear** *se, para todos* $x_1, x_2 \in X$*, e para todos escalares* λ*,* $\gamma \in \mathbb{K}$*,*

$$T(\lambda x_1 + \gamma x_2) = \lambda T(x_1) + \gamma T(x_2). \tag{1.1}$$

(b) *Uma aplicação linear* $T : X \longrightarrow Y$ *é chamada* **limitada** *se existe uma constante* $M > 0$ *tal que*

$$\|T(x)\| \leq M \|x\| \text{ para todo } x \in X. \tag{1.2}$$

Definição 1.3.7. *Sejam* X *e* Y *espaços normados. Então* $\mathcal{L}(X, Y)$ *denota o conjunto de todas aplicações lineares limitadas de* X *em* Y*. Se* $Y = \mathbb{K}$*, então denotamos* $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ *por* X^* *e o chamamos* **dual** *de* X*.*

Teorema 1.3.8. *Sejam X e Y espaços normados.*

(a) *Seja $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Então a norma de A é definida como $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|A(x)\|}{\|x\|}$, onde 0 é o elemento nulo de X.*

(b) *Se Y é um espaço de Banach então $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach com a norma dada em (a).*

Demonstração. **(a)** Vide [22], página 114.

(b) Vide [22], página 114.

■

Definição 1.3.9. *Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é uma* **isometria** *se $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in X$ e se T for sobrejetora. Os espaços X e Y são chamados* **isométricos** *se existe uma isometria T de X sobre Y.*

Lema 1.3.10. *Sejam X e Y espaços normados. Se T é uma isometria de X sobre Y, então $T(B_X) = B_Y$.*

Demonstração. Seja $x \in B_X$. Veremos que $T(x) \in B_Y$. De fato, pela definição de T, vem que $T(x) \in Y$. Como T é isometria e $\|x\| \leq 1$, então $\|T(x)\| = \|x\| \leq 1$, logo $T(x) \in B_Y$. Então $T(B_X) \subseteq B_Y$.

Seja agora $y \in B_Y$. Como T é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$. Vamos provar que $\|x\| \leq 1$. Temos que $\|y\| = \|T(x)\| = \|x\|$, pois T é isometria e como $\|y\| \leq 1$, vem $\|x\| \leq 1$. Logo $B_Y \subseteq T(B_X)$. Portanto $T(B_X) = B_Y$. ■

Teorema 1.3.11. *O dual X^* de um espaço normado X é sempre um espaço de Banach sob a norma:*

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|};\, x \neq 0\right\}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Vide [22], página 115. ■

Definição 1.3.12. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Definimos o* **adjunto de T** *como $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ tal que para $f \in Y^*$:*

$$T^*(f) : x \longmapsto f(T(x));\ \textit{para todo } x \in X. \tag{1.4}$$

Teorema 1.3.13. *Seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Considere o adjunto de T, $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$. Então:*

(a) *T^* é linear;*

(b) *T^* é limitado;*

(c) *$\|T\| = \|T^*\|$;*

(d) *Se T é bijeção então T^* é bijeção; e*

(e) *Se T é isometria então T^* é isometria.*

Demonstração. **(a)** Vide [23], página 285.

(b) Vide [23], página 284.

(c) Vide [23], página 284.

(d) Vide [23], página 290.

(e) Vide [23], página 290.

■

Definição 1.3.14. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Chamamos o espaço $(X^*)^*$ de* **espaço bidual** *a X e usamos a notação X^{**}.*

Definição 1.3.15. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Para cada $x \in X$, associamos naturalmente um elemento $\delta_x \in X^{**}$ da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} \delta_x : X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \delta_x(f) = f(x). \end{aligned}$$

Teorema 1.3.16 (Hahn- Banach)**.** **(a)** *Se $X \neq \{0\}$ é um espaço vetorial normado e $x_0 \in X$ então existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.*

(b) *Se X é um espaço vetorial normado e $x \in X$ é tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$ então $x = 0$.*

(c) *Seja C um conjunto convexo fechado num espaço normado X. Se $x_0 \notin C$ então existe $f \in X^*$ tal que*

$$Re(f(x_0)) > \sup\{Re(f(x)); x \in C\}. \tag{1.5}$$

(d) *Seja X espaço vetorial. Então X^* separa pontos.*

Demonstração. **(a)** Vide [22], página 135.

(b) Vide [22], página 135.

(c) Vide [13], página 43.

(d) Sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$. Suponha que para todo $f \in X^*$, $f(x) = f(y)$, logo $f(x - y) = 0$. Pelo item (b) deste teorema, $x - y = 0$, ou seja, $x = y$. Absurdo. Portanto existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

■

Teorema 1.3.17 (Banach- Steinhaus). *Se* (A_n) *é uma sequência de operadores lineares limitados definidos de um espaço de Banach* X *num espaço normado* Y *e*

$$\limsup_n \|A_n(x)\| < \infty \tag{1.6}$$

para todo $x \in X$*, então* $\sup_n \|A_n\| < \infty$*, isto é, a sequência* $(\|A_n\|)$ *é limitada.*

Demonstração. Vide [22], página 123. ∎

Vamos dar a definição e alguns resultados sobre envoltória convexa, que serão utéis nos próximos capítulos.

Definição 1.3.18. *Seja* X *um espaço vetorial.*

(a) *Seja* A *um subconjunto de* X*.* A **envoltória convexa** *de* A*, denotado por* $conv(A)$ *é o menor conjunto convexo que contém* A*, ou seja, a interseção de todos os conjuntos convexos que contém* A*.*

(b) *Se* X *tem uma topologia, então a* **envoltória convexa fechada***, ou gerador convexo fechado de* A*, denotado por* $\overline{conv}(A)$*, é o menor conjunto convexo fechado que contém* A*, ou seja, a interseção de todos conjuntos convexos fechados que contém* A*.*

Lema 1.3.19. *Suponha que* $C_1, ..., C_n$ *são subconjuntos convexos não vazios de um espaço vetorial. Então* $conv(C_1 \bigcup ... \bigcup C_n)$ *consiste de todas as somas* $\sum_{j=1}^{n} t_j \cdot x_j$ *tal que* $t_1, ..., t_n$ *são números reais não negativos onde* $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$ *e* $x_j \in C_j$ *quando* $j = 1, ..., n$

Demonstração. Vide [23], página 268. ∎

Observação 1.3.20. *Segue de 1.3.19 para* $n = 1$ *que* $conv(A)$ *é a coleção de todas as combinações convexas de elementos de* A*, isto é, somas da forma,* $\sum_{j=1}^{n} t_j \cdot x_j$*, tal que* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_1, ..., x_n \in A$*,* $t_1, ..., t_n \geq 0$ *e* $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$*.*

Agora para encerrar a seção, vamos dar a definição de espaço vetorial topológico e um lema que serão úteis para o desenvolvimento da teoria do capítulo 3.

Definição 1.3.21. *Seja* X *um espaço vetorial, com uma topologia* τ *tal que a adição de vetores é uma operação contínua de* $X \times X$ *sobre* X *e a multiplicação de vetores por escalar é uma operação contínua de* $\mathbb{K} \times X$ *sobre* X*. Então* τ *é um topologia vetorial de* X *e o par ordenado* (X, τ) *é um espaço vetorial topológico.*

Lema 1.3.22. *Suponha que* $K_1, ..., K_n$ *são subconjuntos convexos compactos de um espaço vetorial topológico. Então* $conv(K_1 \bigcup ... \bigcup K_n)$ *é compacto.*

Demonstração. Vide [23], página 268.

∎

1.4 Topologia Fraca

Considere um espaço vetorial normado qualquer $(X, \|\cdot\|)$ e defina a métrica d por $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$. Usualmente a topologia métrica é chamada de **topologia (ou métrica) da norma** de X, já que d é expressada em termos da norma de X. Contudo, existem outras topologias sobre X que também são úteis e vamos considerar a chamada **topologia fraca** de X.

Denotaremos a topologia da norma de X por $\|\cdot\|$, onde $\|\cdot\|$ é a classe de todos conjuntos abertos de X, dados pela métrica d. Para evitar trivialidade denotamos por G um elemento não vazio de $\|\cdot\|$. Portanto dizer que $G \in \|\cdot\|$ é dizer que:

$$\text{Para todo } a \in G \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(a, r) \subset G.$$

Equivalentemente: Para todo $a \in G$ existe $r > 0$ tal que se $x \in X$ e $\|x - a\| < r$ então $x \in G$.

Definição 1.4.1. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$* **converge fortemente** *para $x \in X$ se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x na topologia da norma $\|\cdot\|$, ou seja, se $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Também escrito como $x_n \longrightarrow x$ (fortemente).*

Para um dado espaço normado X, agora desejamos introduzir a nova topologia sobre X determinada por X^*, onde X^* é o espaço dual de X, que consiste de todos os funcionais lineares limitados f sobre X com a norma

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|};\ x \neq 0\right\} = \sup\{|f(x)|;\ \|x\| \leq 1\} \tag{1.7}$$

para cada $f \in X^*$.

Definição 1.4.2. *Sejam $a \in X$, $f_1, f_2, ..., f_n \in X^*$ e $\varepsilon > 0$. Definimos o seguinte subconjunto de X:*

$$U = U(a, f_1, f_2, ..., f_n, \varepsilon) = \left\{x \in X;\ \sup_{1\leq k\leq n} |f_k(x - a)| < \varepsilon\right\} \tag{1.8}$$

Por $\sigma(X, X^*)$ denotamos a classe de todos os subconjuntos U, definidos acima unido com o conjunto vazio.

Teorema 1.4.3. *O conjunto $\sigma(X, X^*)$ é uma topologia Hausdorff para o espaço normado X.*

Demonstração. Vide [22], páginas 143 e 147.

■

Note que $a \in U(a, f_1, f_2, ..., f_n, \varepsilon)$, de modo que U é uma vizinhança de a. Iremos nos referir a $U = U(a, f_1, f_2, ..., f_n, \varepsilon)$ como uma vizinhança fraca de a. Segue do teorema 1.4.3 que $\sigma(X, X^*)$ é uma topologia para X e chamamos $\sigma(X, X^*)$ de **topologia fraca** em X determinada por X^*.

Teorema 1.4.4. *Todo conjunto fracamente aberto é aberto na topologia da norma.*

Demonstração. Seja $G \in \sigma(X, X^*)$ e seja $a \in G$. Então existe $U(a, f_1, f_2, ..., f_n, \varepsilon) \subseteq G$. Como f_k é contínuo em a, segue que existe $\delta_k > 0$ tal que $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon$ se $\|x - a\| < \delta_k$. Defina $\delta = \min(\delta_1, ..., \delta_n)$. Então $x \in B(a, \delta)$ implica $\|x - a\| < \delta \leq \delta_k$, para $1 \leq k \leq n$, e assim $\sup_{1 \leq k \leq n} |f_k(x - a)| < \varepsilon$ o que implica que $x \in U(a, f_1, f_2, ..., f_n, \varepsilon) \subset G$. Segue que $B(a\ ,\delta) \subset U(a, f_1, f_2, ..., f_n, \varepsilon) \subset G$. Portanto $G \in \gamma(X)$. Assim $\sigma(X, X^*) \subset \gamma(X)$. ∎

Observação 1.4.5. *Escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$ para indicar que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x com respeito a $\sigma(X, X^*)$.*

Observação 1.4.6. *Num espaço normado X temos $x_n \xrightarrow{w} x$ se e somente se*

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \text{ quando } n \longrightarrow \infty \text{ para todo } f \in X^*.$$

Demonstração. Suponha que $x_n \xrightarrow{w} x$. Seja $f \in X^*$ e seja $\varepsilon > 0$. Então como $U(x, f, \varepsilon) \in \sigma(X, X^*)$ e como $x_n \xrightarrow{w} x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U(x, f, \varepsilon)$ para todo $n > n_0$ donde para tal n temos $|f(x_n - x)| < \varepsilon$ o que implica

$$f(x) \longrightarrow f(x) \text{ quando } n \longrightarrow \infty \text{ para todo } f \in X^*.$$

Reciprocamente suponha que para todo $f \in X^*$, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Vamos provar que $x_n \xrightarrow{w} x$. Sejam $f_1, ..., f_k \in X^*$ e $\varepsilon > 0$. Tome $U(x, f_1, ..., f_k, \varepsilon)$. Como $f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x), 1 \leq i \leq k$. Existe $n_{0_i} \in \mathbb{N}$ tal que $|f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_{0_i}$ para cada i. Seja $n_0 = \max\{n_{0_i}; 1 \leq i \leq n\}$, logo $\sup\{|f_i(x_n) - f_i(x)|; 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $x_n \in U(x, f_1, ..., f_k, \varepsilon)$. Assim $x_n \xrightarrow{w} x$. ∎

Em geral, convergência fraca e convergência forte não são equivalentes, como pode-se ver no próximo exemplo. Mas precisamos antes da seguinte definição.

Definição 1.4.7. *Seja $1 < p < \infty$. Definimos ℓ_p como o conjunto de todas as sequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, munido da norma $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.*

Exemplo 1.4.8. *Seja X o espaço normado ℓ_p $(1 < p < \infty)$. Sabemos que para todo $f \in \ell_p^*$, podemos escrever $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, para todo $x \in \ell_p$, onde $a \in \ell_q$, com $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = 1$. Então escrevendo $e_1 = (1, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...), ...,$ temos*

$$\|e_n - e_m\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

para $n \neq m$, portanto (e_n) não converge na topologia da norma. Contudo, (e_n) converge fracamente a $0 = (0, 0, ...)$ uma vez que $f \in \ell_p^*$ implica $f(e_n) = a_n$ e uma vez que $a \in \ell_q$ temos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < \infty$, logo, $a_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto $f(e_n) \longrightarrow f(0) = 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Para um estudo mais detalhado sobre os espaços ℓ_p, vide [11] e [20].

Teorema 1.4.9. *Seja X um espaço normado e suponha que $x_n \xrightarrow{w} x$. Então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada na norma de X, isto é, $\sup_n \|x_n\| < \infty$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $f \in X^*$, considere $\delta_n(f) = \delta_{x_n}(f) = f(x_n)$. Então δ_n é um funcional linear contínuo no espaço de Banach X^*. Também, como $x_n \xrightarrow{w} x$, segue da observação 1.4.6 que existe

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(f) \text{ para todo } f \in X^*.$$

Portanto pelo teorema de Banach- Steinhauss 1.3.17, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|\delta_n(f)| \leq M \cdot \|f\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } f \in X^*.$$

Agora pelo teorema de Hahn- Banach, 1.3.16(a), existe $f_n \in X^*$ com $\|f_n\| = 1$ e $f_n(x_n) = \|x_n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\| = |f_n(x_n)| \leq M \cdot \|f_n\| = M$$

o que implica $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

■

1.5 Topologia Fraca Estrela

Considere X um espaço normado e X^* seu dual. Vamos introduzir uma topologia sobre X^* determinada por X. Essa topologia será chamada de **topologia fraca estrela**.

Essa topologia será útil para a demonstração do Teorema de Alaoglu, 1.5.5 que afirma que B_{X^*} é compacta com essa topologia.

Definição 1.5.1. *Sejam $g \in X^*$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e qualquer $\varepsilon > 0$. Definimos o seguinte subconjunto de X^*:*

$$V = V(g, x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) = \left\{ f \in X^*; \sup_{1\leq k\leq n} |f(x_k) - g(x_k)| < \varepsilon \right\} \tag{1.9}$$

Por $\sigma(X^*, X)$ denotamos a classe de todos os subconjuntos V definidos acima unido com o conjunto vazio.

Teorema 1.5.2. *O conjunto $(X^*, \sigma(X^*, X))$ é um espaço topológico de Hausdorff.*

Demonstração. Vide [22], páginas 147,148.

■

Note que $g \in V(g, x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon)$, de modo que V é uma vizinhança de g. Iremos nos referir a $V = V(g, x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon)$ como uma vizinhança fraca estrela de g. Segue do teorema 1.5.2 que $\sigma(X^*, X)$ é uma topologia para X^* e chamamos $\sigma(X^*, X)$ de **topologia fraca estrela** em X^* determinada por X.

Observação 1.5.3. *Escrevemos $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ para indicar que a rede $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge a f com respeito a $\sigma(X^*, X)$.*

Proposição 1.5.4. *Se $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ é uma rede em X^* e $f \in X^*$ então $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ se e somente se $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponha que $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$. Tome $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $V(f, x, \varepsilon) \in \sigma(X^*, X)$ e $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $f_\alpha \in V(f, x, \varepsilon)$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Assim $|f_\alpha(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $\alpha \geq \alpha_0$. Portanto $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$, para todo $x \in X$.

Reciprocamente, suponha que para todo $x \in X$, $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$. Vamos provar que $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$. Sejam $x_1, ..., x_k \in X$ e $\varepsilon > 0$. Considere o aberto $U(f, x_1, ..., x_k, \varepsilon)$. Como $f_\alpha(x_i) \longrightarrow f(x_i)$, para $1 \leq i \leq k$ existe $\alpha_{0_i} \in I$ tal que $|f_\alpha(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \geq \alpha_{0_i}$ e para cada $1 \leq i \leq k$. Seja $\alpha_0 = \max\{\alpha_{0_i}; 1 \leq i \leq k\}$. Assim $\sup\{|f_\alpha(x_i) - f(x_i)|; 1 \leq i \leq k\} < \varepsilon$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Portanto $f_\alpha \in U(f, x_1, ..., x_k, \varepsilon)$. Assim $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$. ∎

Para a prova do Teorema de Alaoglu a seguir, precisamos do teorema de Tychonoff 1.2.33.

Teorema 1.5.5 (Alaoglu)**.** *Se X é um espaço normado, então a bola fechada unitária em X^**

$$B_{X^*} = \{f \in X^*; \|f\| \leq 1\}$$

é um espaço Hausdorff compacto na topologia fraca estrela $\sigma(X^*, X)$.

Demonstração. Sabemos que $\sigma(X^*, X)$ é Hausdorff em B_{X^*}, pois é subespaço de espaço Hausdorff. Agora para cada $x \in X$ defina,

$$D(x) = \left\{ z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \|x\| \right\} \text{ e } D = \prod_{x \in X} D(x),$$

onde o produto é tomado para todo $x \in X$. Dizer que $f \in D$ é dizer que $f : X \to \mathbb{C}$ e que $f(x) \in D(x)$ para todo $x \in X$, ou seja $|f(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Ainda podemos dizer que $B_{X^*} \subset D$, pois dado $f \in B_{X^*}$, vem que $f : X \to \mathbb{C}$ e como é linear $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\| \cdot 1 = \|x\|$, ou seja $f(x) \in D(x)$ para todo $x \in X$, logo $f \in D$.

Como cada $D(x)$ é um subconjunto fechado e limitado, pois é uma bola fechada de centro 0 e raio $\|x\|$, temos que $D(x)$ é compacto em $\mathbb{C}$. Assim D é compacto pelo Teorema de Tychonoff 1.2.33. Assim, desde que possamos mostrar que B_{X^*} é um subconjunto fechado do espaço compacto D, seguirá que B_{X^*} é compacto com a topologia produto de D.

Temos que a topologia fraca estrela em B_{X^*} coincide com a topologia produto em B_{X^*}, quando B_{X^*} é considerado como subespaço de D. De fato, defina $\psi : B_{X^*} \to D$, por $\psi(f) = (f(x))_{x \in X}$. Temos que ψ está bem definida, pois $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ com $\|f\| = 1$ e assim $\psi(f) \in D$.

Note que ψ é injetora, pois dado $f, g \in B_{X^*}$, tais que $\psi(f) = \psi(g)$ então $(f(x))_{x \in X} = (g(x))_{x \in X}$, assim $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$ e logo $f = g$. Alem disso, ψ é contínua, pois dada a rede $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ que converge a $f \in B_{X^*}$ na topologia fraca estrela, temos que $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$. Mas esta é a convergência na topologia produto em D assim pela proposição 1.2.32, $\psi(f_\alpha) \longrightarrow \psi(f)$.

Também $\psi^{-1} : \psi(B_{X^*}) \longrightarrow B_{X^*}$ é contínua, pois dada a rede $((f_\alpha(x))_{x \in X})_{\alpha \in I}$ que converge a $(f(x))_{x \in X}$, vem que $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$, para todo $x \in X$, pois D tem a topologia produto. Mas isto é equivalente a $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$. Finalmente ψ é sobrejetora sobre sua imagem. Portanto ψ é homeomorfismo. Assim as topologias coincidem.

Assim B_{X^*} será compacto se provarmos que B_{X^*} é fechado na topologia fraca estrela, isto é, $\overline{B_{X^*}}^{\omega^*} = B_{X^*}$. É óbvio que $B_{X^*} \subseteq \overline{B_{X^*}}^{\omega^*}$. Resta provar então que $\overline{B_{X^*}}^{\omega^*} \subseteq B_{X^*}$. Seja $f \in \overline{B_{X^*}}^{\omega^*}$, logo existe rede $(f_i)_i \subseteq B_{X^*}$ tal que $f_i \xrightarrow{w^*} f$. Vamos mostrar então que f é limitado e que $\|f\| \leq 1$.

Como $f_i \xrightarrow{w^*} f$, então $f_i(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$, assim $|f_i(x)| \longrightarrow |f(x)|$ para todo $x \in X$. Para $x \neq 0$, temos $\frac{|f_i(x)|}{\|x\|} \longrightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|}$. Por hipótese $f_i \in B_{X^*}$ para todo i, logo $\|f_i\| \leq 1$, isto é, $\frac{|f_i(x)|}{\|x\|} \leq 1$ para todo i. Dessa forma, $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$. Portanto f é limitado e $\|f\| \leq 1$.

Logo $f \in B_{X^*}$. Assim $B_{X^*} = \overline{B_{X^*}}^{\omega^*}$, isto é, B_{X^*} é subespaço fechado de um compacto D. Dessa forma, B_{X^*} é compacto. ■

Lema 1.5.6. *Seja X um espaço vetorial normado.*

(a) *Se $f \in X^*$, então $\sup_B(f) = \sup_{\overline{conv}^{\omega}(B)}(f)$.*

(b) *Se $\delta_x \in X^{**}$, então $\sup_B(\delta_x) = \sup_{\overline{conv}^{\omega^*}(B)}(\delta_x)$.*

Demonstração. **(a)** Como $B \subset \overline{conv}(B)$, vem que $\sup_B(f) \leq \sup_{\overline{conv}(B)}(f)$. Agora vamos provar que $\sup_{\overline{conv}(B)}(f) \leq \sup_B(f)$. Seja $x \in \overline{conv}(B)$, assim existe uma rede $(x_i) \subset conv(B)$ tal que $x_i \longrightarrow x$. Mas $x_i \in conv(B)$, para todo i, temos $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot x_j^i$, com $x_j^i \in B$ e $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i = 1$. Dessa forma $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot x_j^i \longrightarrow x$ e como f é contínuo, $f(x_i) \longrightarrow f(x)$, ou seja $f(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot x_j^i) \longrightarrow f(x)$.

Como f é linear, vem que: $f(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot x_j^i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot f(x_j^i) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot \sup\{f(x_j^i);\, x_j^i \in B\} \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot \sup\{f(y);\, y \in B\} = 1 \cdot \sup\{f(y);\, y \in B\} = \sup\{f(y);\, y \in B\}$. Assim $f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot f(x_j^i) \leq \sup_B(f)$, para todo i, então $f(x) \leq \sup_B(f)$ para $x \in \overline{conv}(B)$, logo $\sup_B(f)$ é cota superior de $\{f(x);\, x \in \overline{conv}(B)\}$. Assim $\sup_{\overline{conv}(B)}(f) \leq \sup_B(f)$. Portanto $\sup_{\overline{conv}(B)}(f) = \sup_B(f)$.

(b) Por uma construção análoga ao do item anterior provamos este item

■

Teorema 1.5.7. *Seja X um espaço de Banach real. Se A é um conjunto convexo fraco estrela fechado de X^* e $f \in X^* \setminus A$, então existe $x \in X$ tal que*

$$f(x) > \sup\{g(x); g \in A\} \tag{1.10}$$

Demonstração. Vide [13], página 70. ■

Lema 1.5.8. *Suponha que X e Y sejam espaços normados. Se $T \in B(X, Y)$ então T^* é $\omega^* - \omega^*-$ contínua.*

Demonstração. Vide [23], página 287.

■

Capítulo 2

O teorema de Banach- Stone para isomorfismos algébricos

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar a versão do teorema de Banach- Stone para isomorfismos algébricos.

Os primeiros a demonstrarem essa versão foram Gelfand e Kolmogoroff [15] separadamente, no ano de 1939. Para a demonstração eles consideraram o espaço de ideais maximais de $\mathcal{C}(X)$ e também utilizaram o lema 2.3.5 devido a Stone [24].

2.2 Álgebras de Banach

Definição 2.2.1. *Uma* **álgebra** X *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *munido de uma operação interna de multiplicação de elementos de* X*,*

$$\begin{aligned} \cdot : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

tais que, para todos x, y, z *em* X *e todo escalar* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

(a) $x \cdot y \in X$*;*

(b) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$*;*

(c) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$*;*

(d) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$*; e*

(e) $(\lambda \cdot x) \cdot y = \lambda \cdot (x \cdot y) = x \cdot (\lambda \cdot y)$.

Em algumas álgebras existe um elemento não nulo **e** tal que $\mathbf{e} \cdot x = x \cdot \mathbf{e} = x$. Se tal elemento **e** existe ele é único. Esse elemento é chamado **identidade** da álgebra.

Uma álgebra é chamada **comutativa** se tem a seguinte propriedade: $x \cdot y = y \cdot x$, para todos x, y em X.

Definição 2.2.2. *Uma* **álgebra normada** *é uma álgebra X equipada com uma norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que faz com que X seja um espaço normado submultiplicativo, ou seja, para todos a, b em X temos:*

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Definição 2.2.3. *Uma* **álgebra de Banach** *é uma álgebra normada que é um espaço de Banach.*

Exemplo 2.2.4. *Seja X um espaço normado. Então $\mathcal{L}(X, X)$, o conjunto de todos operadores lineares limitados de X em X é um espaço vetorial normado. Agora, definamos a multiplicação de A_1, $A_2 \in \mathcal{L}(X, X)$ através da composição de operadores:*

$$(A_1 \circ A_2)(x) = A_1(A_2(x))$$

para todo $x \in X$.

É claro que $A_1 \circ A_2$ é linear sempre que A_1 e A_2 são lineares. Além disso, quando A_1 e A_2 são limitados,

$$\|(A_1 \circ A_2)(x)\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2(x)\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\| \cdot \|x\|$$

e assim $\|A_1 \cdot A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|$. Como I, definido por $I(x) = x$ para todo $x \in X$, está em $\mathcal{L}(X, X)$, vemos que $\mathcal{L}(X, X)$ é uma álgebra normada não comutativa com identidade.

Se X for um espaço de Banach, pelo teorema 1.3.8, concluímos que $\mathcal{L}(X, X)$ é uma álgebra de Banach com identidade.

Exemplo 2.2.5. *Seja K um espaço topológico Hausdorff compacto. O conjunto $\mathcal{C}(K)$ de todas as funções $f : K \to \mathbb{K}$ contínuas em K munido das operações definidas ponto a ponto e com a norma do supremo é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.*

Demonstração. Vamos provar que $\mathcal{C}(K)$ é um espaço vetorial. Como as operações são definidas ponto a ponto e sabemos que em $\mathbb{K}$ valem as propriedades de espaço vetorial, temos apenas que provar que se $f, g \in \mathcal{C}(K)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $f + g \in \mathcal{C}(K)$ e $\lambda \cdot f \in \mathcal{C}(K)$ e a função $h \equiv 0 \in \mathcal{C}(K)$

Temos que $h \equiv 0 \in \mathcal{C}(K)$, pois a função nula é contínua.

Sejam $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Para mostrar que $f + g \in \mathcal{C}(K)$, temos que provar que $f + g$ é contínua. Seja, $\varepsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{C}(K)$, existe vizinhança U de $x \in K$ tal que se $y \in U$ então $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Também $g \in \mathcal{C}(K)$, logo existe uma vizinhança V de $x \in K$ tal que se $y \in V$ então $|g(x) - g(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tome a vizinhança $U \bigcap V$ de K. Temos que se $y \in U \bigcap V$, então

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim $f + g \in \mathcal{C}(K)$.

Agora vamos provar que $\lambda \cdot f \in \mathcal{C}(K)$, onde $f \in \mathcal{C}(K)$. Se $\lambda = 0$, então $\lambda \cdot f \equiv 0 \in \mathcal{C}(K)$, como já vimos. Se $\lambda \neq 0$, seja $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$. Como $f \in \mathcal{C}(K)$ então existe vizinhança U de $x \in K$ tal que se $y \in U$ então $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$, logo $|\lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(y)| < |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| < |\lambda| \cdot \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$. Portanto $\lambda \cdot f \in \mathcal{C}(K)$.

Dessa forma $\mathcal{C}(K)$ é um espaço vetorial.

Provaremos agora que $\mathcal{C}(K)$ é uma álgebra comutativa com unidade. Sejam, $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Defina $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Como as propriedades de álgebra são válidas em $\mathbb{K}$, basta verificar que $f \cdot g \in \mathcal{C}(K)$ e que $h(x) = 1$, para todo $x \in K$ é a unidade em $\mathcal{C}(K)$.

Sejam, $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Afirmamos que $f \cdot g$ é contínua. Por hipótese, $f \in \mathcal{C}(K)$, logo dado $\varepsilon_1 > 0$ existe uma vizinhança aberta U_f de $x \in K$ tal que se $y \in U_f$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$. Além disso, $g \in \mathcal{C}(K)$, logo existe uma vizinhança aberta U_g de $x \in K$ tal que se $y \in U_g$ então $|g(x) - g(y)| < \varepsilon_1$. Como interseção de vizinhanças é vizinhança, tome $U = U_f \bigcap U_g$ a vizinhança de $x \in K$, logo se : $y \in U$ então

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| = |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| =$$
$$|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g(y) - g(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot f(y) - f(y) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(y)| =$$
$$|(f(x) - f(y)) \cdot (g(x) - g(y)) + g(y) \cdot (f(x) - f(y)) + f(y)(g(x) - g(y))| \leq$$
$$|f(x) - f(y)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| + |f(y)| \cdot |g(x) - g(y)|$$

Então se $\varepsilon_1 < 1$ e como por hipótese $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$ e $|g(x) - g(y)| < \varepsilon_1$, vem que

$$|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| < {\varepsilon_1}^2 + |g(y)| \cdot \varepsilon_1 + |f(y)| \cdot \varepsilon_1 < \varepsilon_1 \cdot (1 + |g(y)| + |f(y)|)$$

Tomando $\varepsilon = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon_1}{1 + |f(y)| + g(y)|}\right\}$, temos que se $y \in U$ então $|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| < \varepsilon$. Portanto, $f \cdot g \in \mathcal{C}(K)$.

Também, como $h(x) = 1$, para todo $x \in K$ é contínua, vem que $h \in \mathcal{C}(K)$ e $f \cdot h = h \cdot f = f$. Portanto $\mathcal{C}(K)$ é álgebra comutativa com unidade.

Provemos agora que $\|f\| = \sup\{|f(t)|;\ t \in K\}$ é norma em $\mathcal{C}(K)$. Temos que $\|f\| < \infty$, onde $f \in \mathcal{C}(K)$. De fato, como X é compacto e f é contínua, vem que f é limitada e portanto $\|f\| < \infty$. Agora vamos verificar as propriedades de norma:

(a) Suponha que $f = 0$. Sabemos que $\|f\| \geq 0$, pois é o supremo de números positivos. Mas como $f = 0$, vem que $|f(t)| = 0$ para todo $t \in K$, logo $\|f\| = 0$, já que encontramos alguém que atinge o zero.

Reciprocamente, suponha que $\|f\| = 0$, assim $|f(t)| = 0$, para todo $t \in K$, pois, $0 = \|f\| \geq |f(t)|$, para todo $t \in K$, assim $f(t) = 0$, para todo $t \in K$, ou seja $f \equiv 0$ como queríamos

Portanto $\|f\| = 0$ se e somente se $f \equiv 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Para cada $t \in K$, vale $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\| + \|g\|$. Assim $\|f\| + \|g\|$ é cota superior do conjunto $\{|f(t) + g(t)|; t \in X\}$. Logo $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

(c) Sejam $f \in \mathcal{C}(K)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $\lambda = 0$, então $\|\lambda \cdot f\| = \|0\| = 0 = 0 \cdot \|f\|$. Agora se $\lambda \neq 0$, então $\|\lambda \cdot f\| \geq |\lambda \cdot f(x)|$, para todo $x \in K$, logo $\dfrac{\|\lambda \cdot f\|}{|\lambda|} \geq |f(x)|$, para todo $x \in K$, ou seja $\dfrac{\|\lambda \cdot f\|}{|\lambda|}$ é cota superior de $\{|f(x)|; x \in K\}$, logo $\dfrac{\|\lambda \cdot f\|}{|\lambda|} \geq \|f\|$, isto é $\|\lambda \cdot f\| \geq |\lambda| \cdot \|f\|$. Por outro lado, temos que $|\lambda| \cdot \|f\| \geq |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda \cdot f(x)|$, para todo $x \in K$, ou seja,$|\lambda| \cdot \|f\|$ é cota superior de $|\lambda \cdot f(x)|$, assim $|\lambda| \cdot \|f\| \geq \|\lambda \cdot f\|$. Portanto $|\lambda| \cdot \|f\| = \|\lambda \cdot f\|$.

Dessa forma $\|f\| = \sup\{|f(t)|; t \in K\}$ é norma em $\mathcal{C}(K)$. Portanto $\mathcal{C}(X)$ é álgebra normada.

Finalmente, vamos provar que $\mathcal{C}(K)$ é completo. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(K)$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > k$, então $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, pela definição da norma $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K$. Portanto $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é completo, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{C}$ para todo $x \in K$. Seja $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x))$. Precisamos provar que $f \in \mathcal{C}(K)$ e que $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$.

Para provar que $f \in \mathcal{C}(K)$ temos que mostrar que f é contínua em $y \in K$. Para $k_0 \geq k$, sabemos que f_{k_0} é contínua, logo existe uma vizinhança aberta U de $x \in K$ tal que se $y \in U$ então $|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Assim:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_{k_0}(x) + f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y) + f_{k_0}(y) - f(y)| <$$
$$|f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| + |f_{k_0}(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

De fato, fixando $k_0 \geq k$, vem que $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$, $n > k$. Logo $\lim\limits_{n\to+\infty}(|f_n(x) - f_{k_0}(x)|) = |f(x) - f_{k_0}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Portanto f é contínua em $y \in K$. Assim, $f \in \mathcal{C}(K)$.

Temos que $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$. De fato, como $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, para todo $x \in K$, fixando $m \geq k$, vem que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, logo $\lim\limits_{n\to+\infty}(|f_n(x) - f_m(x)|) = |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Assim $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Portanto $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$.

Logo $\mathcal{C}(K)$ é completo. Dessa forma $\mathcal{C}(K)$ é álgebra de Banach comutativa com unidade. ∎

Definição 2.2.6. *Numa álgebra X com identidade* $\mathbf{e}$*, um elemento que tem inverso é chamado de* **invertível***, isto é, x é invertível se existe $y \in X$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = \mathbf{e}$. Escrevemos $y = x^{-1}$. Por* $\mathbf{U}$ *denotamos o conjunto de todos os elementos invertíveis de X.*

Observação 2.2.7. *Quando o inverso existe ele é único.*

Definição 2.2.8. *Uma* **álgebra de divisão** *é uma álgebra com identidade em que todo elemento não nulo é invertível.*

Transformações entre álgebras que preservam as operações lineares e multiplicativas tem uma importância especial.

Definição 2.2.9. *Sejam X, Y álgebras sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada* **homomorfismo** *se $f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos $x, y \in X$ e para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, isto é, f é linear e multiplicativa.*

Definição 2.2.10. *Um* **isomorfismo** *entre álgebras é definido como* **homomorfismo bijetor***. Um homomorfismo $f : X \to \mathbb{K}$ é usualmente denominado* **homomorfismo escalar***.*

Definição 2.2.11. *O conjunto $\hat{X}$ de todos os homomorfismos escalares não nulos em X é denominado* **espectro de X***.*

Lema 2.2.12. *Seja X uma álgebra de Banach e suponha que $x \in X$ é tal que $\|x\| < 1$. Então, existe $y \in X$ tal que $x \cdot y = x + y$.*

Demonstração. Como X é uma álgebra de Banach, vale a propriedade $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ para todos $a, b \in X$, logo $\left\|x^k\right\| \leq \|x\|^k$, $k \in \mathbb{N}$ e como $\|x\| < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1) \cdot x^n)$ é absolutamente convergente, pois $\sum_{n=1}^{\infty}(\|(-1)\cdot x^n\|) = \sum_{n=1}^{\infty}\|x^n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|}$, já que a série é geométrica. Mas X é um espaço de Banach, logo toda série absolutamente convergente é convergente, assim a série $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)\cdot x^n)$ converge. Seja então y a soma da série. Assim, $-x-x^2-x^3-...=y$, então $-x^2-x^3-x^4-...=x+y$. Por outro lado, $x\cdot(-x-x^2-x^3-...)=x\cdot y$ ou seja, $-x^2-x^3-x^4-...=x\cdot y$. Portanto $x+y=x\cdot y$. ∎

Teorema 2.2.13. *Seja X uma álgebra de Banach e $f: X\to\mathbb{C}$ um homomorfismo escalar. Então $|f(x)|\leq\|x\|$ para todo $x\in X$. Assim todo homomorfismo escalar sobre uma álgebra de Banach é necessariamente um funcional contínuo.*

Demonstração. Suponha que exista $z\in X$, $z\neq 0$ tal que $|f(z)|>\|z\|$. Então $f(z)\neq 0$ e podemos escrever $x=\dfrac{z}{f(z)}$, de modo que $f(x)=1$ e $\|x\|<1$. Pelo lema 2.2.12, existe y tal que $x\cdot y=x+y$, donde $f(x)\cdot f(y)=f(x)+f(y)$, isto é, $f(y)=1+f(y)$, já que $f(x)=1$, o que é um absurdo. Portanto $|f(x)|\leq\|x\|$ para todo $x\in X$. ∎

Observação 2.2.14. *Sabemos que se uma álgebra de Banach X tem dimensão finita, então todo funcional linear é contínuo. Mas se X tem dimensão infinita, a afirmação é falsa. De fato, seja (b_n) uma sequência linearmente independente em S_X, seja $\mathcal{B}$ uma base normalizada do espaço vetorial de X que inclui (b_n). Defina $T_{\mathcal{B}}:\mathcal{B}\to\mathbb{C}$ por $T_{\mathcal{B}}(b_n)=n$ para cada $n\in\mathbb{N}$ e $T_{\mathcal{B}}(b)=0$ para os outros membros b em $\mathcal{B}$. Então $T_{\mathcal{B}}$ pode ser estendido a um membro T em $B(X,Y)$ e T é não limitado já que $T(S_X)$ é um conjunto não limitado.*

Proposição 2.2.15. *Se X é uma álgebra de Banach com unidade* **e** *e $\varphi: X\to\mathbb{C}$ é um homomorfismo escalar não nulo então φ $(\mathbf{e})=1$.*

Demonstração. Como φ é não nulo, existe $a\in X$ tal que $\varphi(a)\neq 0$, logo $\varphi(a)=\varphi(a\cdot e)=\varphi(a)\cdot\varphi(e)$, assim $\varphi(e)=1$ como queríamos. ∎

Corolário 2.2.16. *Se f é um homomorfismo escalar não nulo em uma álgebra de Banach X com unidade, então $\|f\|=1$, ou seja $\hat{X}\subset S_{X^*}$.*

Demonstração. Como f é um homomorfismo escalar, então pelo teorema 2.2.13, $|f(x)|\leq\|x\|$ para todo $x\in X$. Para $x\neq 0$, $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}\leq 1$, ou seja, 1 é cota superior de $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$, para todo $x\in X$, $x\neq 0$, logo $1\geq\sup_{x\in X, x\neq 0}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$. Portanto $\|f\|\leq 1$. Além disso, pela proposição 2.2.15, vem que $f(\mathbf{e})=1$. Portanto $\|f\|=1$. ∎

Proposição 2.2.17. *Seja X uma álgebra de Banach com unidade. O espectro $\hat{X}$ é um espaço topológico compacto com a topologia fraca estrela.*

Demonstração. Considere $\hat{X}=\{\varphi: X\to\mathbb{K};\ \varphi$ é linear, multiplicativo e $\varphi\neq 0\}$ um subespaço topológico de $(X^*,\sigma(X^*,X))$.

Vamos então provar que $\hat{X}$ é compacto. Seja S o conjunto de todos os funcionais lineares multiplicativos em X. Vamos mostrar que S é fechado na topologia fraca estrela, ou seja, que $S=\overline{S}^{\omega^*}$. Como $S\subset\overline{S}^{\omega^*}$, basta provar que $\overline{S}^{\omega^*}\subset S$. Seja $\phi\in\overline{S}^{\omega^*}$, então existe uma rede

$(\phi_i)_{i\in I} \subset S$ tal que $\phi_i \xrightarrow{w^*} \phi$. Vamos mostrar que $\phi \in S$. Temos que $\phi_i \xrightarrow{w^*} \phi$ se e somente se $\phi_i(x) \longrightarrow \phi(x)$, para todo $x \in X$.

Sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo

(a) $\phi(x+y) = \lim(\phi_i(x+y)) = \lim(\phi_i(x) + \phi_i(y)) = \lim \phi_i(x) + \lim \phi_i(y) = \phi(x) + \phi(y)$;

(b) $\phi(\lambda \cdot x) = \lim \phi_i(\lambda \cdot x) = \lim \lambda \cdot \phi_i(x) = \lambda \cdot \lim \phi_i(x) = \lambda \cdot \phi(x)$; e

(c) $\phi(x \cdot y) = \lim \phi_i(x \cdot y) = \lim(\phi_i(x) \cdot \phi_i(y)) = \lim \phi_i(x) \cdot \lim \phi_i(y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.

Portanto $\phi \in S$. Assim $S = \overline{S}^{\omega^*}$.

Pelo teorema de Alaoglu 1.5.5, $B_{X^*} = \{f \in X^*, \|f\| \leq 1\}$ é fraco estrela compacto. Como $\|\phi\| = 1$, para todo $\phi \in S \setminus \{0\}$, vem que $S \subset B_{X^*}$ e como S é fraco estrela fechado, vem que S é fraco estrela compacto.

Além disso, $\phi = 0$ é ponto isolado de S. De fato, tome a vizinhança $V\left(\phi, \mathbf{e}, \frac{1}{2}\right) = \left\{g \in \hat{X}; |g(\mathbf{e})| < \frac{1}{2}\right\}$. Nesta vizinhança existe apenas $\phi = 0$, já que $|g(\mathbf{e})| = 1$ para $g \neq 0$ em $\hat{X}$. Então $\hat{X}$ é fechado em S, pois $\hat{X} = S \setminus \{0\}$. Portanto, $\hat{X}$ é compacto. ■

A partir de agora X denotará uma álgebra de Banach comutativa com identidade $\mathbf{e}$.

Definição 2.2.18. *Um* **ideal** *I em X é um subespaço vetorial de X tal que para todo $x \in X$ e para todo $i \in I$, vale que $x \cdot i \in I$ e $i \cdot x \in I$.*

Exemplo 2.2.19. *Para um $t \in [0,1]$ fixo, considere o conjunto $I = \{x \in C[0,1]; x(t) = 0\}$. Temos que I é um ideal na álgebra de Banach $C[0,1]$. De fato, seja $f \in C[0,1]$ e $g \in I$. Logo $g(t) = 0$, para $t \in [0,1]$ fixo. Assim, $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t) = f(t) \cdot 0 = 0$ e $(g \cdot f)(t) = g(t) \cdot f(t) = 0 \cdot f(t) = 0$, logo $f \cdot g \in I$ e $g \cdot f \in I$.*

Definição 2.2.20. *Um ideal I em X é chamado* **próprio** *se $I \neq X$. Um ideal próprio M em X é chamado* **maximal** *se quando $M \subset I$, onde I é um ideal, então $I = X$ ou $I = M$.*

Lema 2.2.21 (Krull)**.** *Cada ideal próprio I está contido em algum ideal maximal M.*

Demonstração. Vide [3], página 4. ■

Teorema 2.2.22. *Seja X uma álgebra de Banach comutativa com identidade* $\mathbf{e}$ *e* $\mathbf{U}$ *o conjunto de todo elementos invertíveis de X. Se $x \in X \setminus \mathbf{U}$ então existe um ideal maximal M tal que $x \in M$.*

Demonstração. Defina $I = \{x \cdot y; y \in X\}$. Temos que I é ideal. De fato

(a) I é subespaço, pois,

- $0 \in I$, já que $0 \in X$ e $0 = x \cdot 0$;
- Sejam $a, b \in I$, então $a = x \cdot y_1$ e $b = x \cdot y_2$, com $y_1, y_2 \in X$, logo $a + b = x \cdot y_1 + x \cdot y_2 = x \cdot (y_1 + y_2) \in I$; e
- Sejam $a \in I$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, assim $a = x \cdot y$, com $y \in X$, então $\lambda \cdot a = \lambda \cdot (x \cdot y) = x \cdot (\lambda \cdot y) \in I$.

(b) Sejam $z \in X$ e $i \in I$, então $i = x \cdot y$, para algum $y \in X$, assim $z \cdot i = z \cdot (x \cdot y) = x \cdot (z \cdot y) \in I$ e $i \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \in I$.

Logo I é ideal.

Agora, suponha por absurdo, que $I = X$. Então, como $\mathbf{e} \in X$, vem que $\mathbf{e} \in I$, donde $\mathbf{e} = x \cdot y = y \cdot x$, para algum $y \in X$ contrariando o fato de x não ser invertível. Assim $I \neq X$, isto é, I é ideal próprio. Pelo lema de Krull 2.2.21, I está contido em algum ideal maximal M. Portanto $x \in M$, como queríamos. ■

Teorema 2.2.23. *Seja X uma álgebra de Banach comutativa com identidade $\mathbf{e}$. Se M é um ideal maximal em X então existe um homomorfismo escalar não nulo f tal que $M = ker(f)$.*

Demonstração. Vide [22], página 168. ■

Teorema 2.2.24. *Se X é uma álgebra de Banach comutativa com identidade $\mathbf{e}$ e se $x \in X \setminus U$, então existe homomorfismo escalar não nulo $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $f(x) = 0$.*

Demonstração. Como X é uma álgebra de Banach com identidade e $x \in X \setminus U$, então pelo teorema 2.2.22 existe um ideal maximal M tal que $x \in M$ e dessa forma, pelo teorema 2.2.23 existe um homomorfismo escalar não nulo $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $M = ker(f)$, logo $f(x) = 0$, como queríamos. ■

Proposição 2.2.25. *Seja X uma álgebra de Banach com unidade $\mathbf{e}$. Sejam φ, ϕ homomorfismos escalares não nulos em X. Assim $\varphi = \phi$ se e somente se, $ker(\varphi) = ker(\phi)$.*

Demonstração. Claramente se $\varphi = \phi$ então $ker(\varphi) = ker(\phi)$.

Por outro lado, suponha que $ker(\varphi) = ker(\phi)$. Dado $x \in X$ temos que $x - \varphi(x) \cdot \mathbf{e} \in ker(\varphi)$, pois $\varphi(\mathbf{e}) = 1$, logo $x - \varphi(x) \cdot \mathbf{e} \in ker(\phi)$. Assim $0 = \phi(x - \varphi(x) \cdot \mathbf{e}) = \phi(x) - \varphi(x) \cdot \phi(\mathbf{e}) = \phi(x) - \varphi(x)$. Logo $\phi(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in X$, como queríamos. ■

Observação 2.2.26. *Seja X uma álgebra de Banach com unidade $\mathbf{e}$. Sejam φ, ϕ funcionais lineares em X. É claro que $\varphi = \phi$ implica que $ker(\varphi) = ker(\phi)$. Porém $ker(\varphi) = ker(\phi)$ não implica que $\varphi = \phi$.*

Demonstração. De fato, considere os seguintes funcionais, $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi(x, y) = x + iy$ e $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\phi(x, y) = y + ix$.

Obviamente φ e ϕ são lineares. Também $ker(\varphi) = ker(\phi) = \{(0, 0)\}$. Mas $\varphi \neq \phi$. ■

Proposição 2.2.27. *Se X é uma álgebra de Banach comutativa com unidade $\mathbf{e}$ e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é um homomorfismo escalar não nulo então $ker(\varphi)$ é um ideal maximal em X.*

Demonstração. É facil verificar que $ker(\varphi)$ é subespaço e ideal de X.

Temos que $ker(\varphi)$ é ideal próprio. De fato, suponha que $ker(\varphi) = X$. Então, se $x \in X$, vem que $x \in ker(\varphi)$, logo $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in X$, ou seja $\varphi \equiv 0$ o que contraria a hipotese. Portanto $ker(\varphi)$ é ideal próprio.

Agora veremos que $ker(\varphi)$ é maximal. Denote $M = ker(\varphi)$. Já sabemos que M é próprio. Para mostrar que M é maximal, considere I ideal de X tal que $M \subset I \subset X$. Suponha que $M \neq I$ e vamos provar que $I = X$. Como $M \neq I$, existe $v_0 \in I \setminus M$. Assim $\varphi(v_0) \neq 0$. Seja agora $v \in X$ e considere o elemento

$$u = v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \cdot v_0 \tag{2.1}$$

Temos que $u \in ker(\varphi)$. Como $M \subset I$, vem que $u \in I$ e como $v_0 \in I$, teremos por (2.1) que $v = u + \dfrac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \cdot v_0 \in I$, já que I é ideal. Portanto $X \subset I$. Dessa forma $X = I$. Assim, $ker(\varphi)$ é ideal maximal em X. ■

Teorema 2.2.28 (Gelfand- Mazur)**.** *Seja X uma álgebra de Banach complexa de divisão. Então X é isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Vide [22], página 165. ■

Proposição 2.2.29. *Se X é uma álgebra de Banach complexa comutativa com unidade, então o conjunto dos homomorfismos escalares não nulos é não vazio.*

Demonstração. Vamos analisar as seguintes situações: A primeira é se todo elemento de X é invertível e a segunda é se existe um elemento de X que não é invertível.

Se todo elemento não nulo de X é invertível então pelo teorema de Gelfand Mazur 2.2.28, existe $\varphi : X \to \mathbb{C}$ isomorfismo que é um homomorfismo escalar não nulo.

Por outro lado, se existe $x \in X$ não nulo que não é invertível, então $x \cdot X$ é um ideal próprio de X. Sendo assim, pela demonstração do teorema 2.2.22 existe J ideal maximal em X tal que $x \cdot X \subset J$. Logo pelo teorema 2.2.23 existe um funcional linear multiplicativo não nulo φ tal que $ker(\varphi) = J$. ■

2.3 Teorema de Banach- Stone

Nesta seção vamos apresentar a demonstração do teorema de Banach- Stone para isomorfismos algébricos, feita for Gelfand e Kolmogoroff [15] em 1939.

Para atingir este objetivo, precisamos da seguinte definição.

Definição 2.3.1. *Seja K um espaço topológico Hausdorff compacto. Para todo $x \in K$, considere $\delta_x : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{K}$ a função definida por $\delta_x(f) = f(x)$, para todo $f \in \mathcal{C}(K)$.*

Proposição 2.3.2. *Temos que δ_x, definido em 2.3.1 é um homomorfismo escalar não nulo em $\mathcal{C}(K)$ chamado* **funcional de Dirac***.*

Demonstração. De fato sejam $f, g \in \mathcal{C}(K), \lambda \in \mathbb{K}$

(a) $\delta_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \delta_x(f) + \delta_x(g)$;

(b) $\delta_x(\lambda \cdot f) = (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \delta_x(f)$;

(c) $\delta_x(f \cdot g) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \delta_x(f) \cdot \delta_x(g)$; e

(d) Tome $f(x) = 1$ para todo $x \in K$, assim vemos que δ_x é não nulo.

■

Lema 2.3.3. *Seja K um espaço topológico Hausdorff compacto. Então $\mathcal{C}(K)$ separa pontos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in K$ distintos, vamos provar que existe $f \in \mathcal{C}(K)$, tal que $f(x) \neq f(y)$. De fato temos que K é T_1, pois por hipotése, K é de Hausdorff. Temos ainda que $\{x\}$ e $\{y\}$ são fechados. Também, como x, y são distintos, $\{x\}, \{y\}$ são disjuntos. Portanto, pelo lema de Urysohn 1.2.17 existe uma função contínua f em K tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Consequentemente $f(x) \neq f(y)$. ■

Lema 2.3.4. *Seja K um espaço topológico Hausdorff compacto. Então $(\{\delta_k;\, k \in K\}, \omega^*)$ é homeomorfo a K.*

Demonstração. Seja $\Psi : K \longrightarrow (\{\delta_k;\, k \in K\}, \omega^*)$, definido por $\Psi(k) = \delta_k$. Temos que Ψ é injetora. De fato, sejam $k_1, k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$. Como, pelo lema 2.3.3, $\mathcal{C}(K)$ separa pontos, $\delta_{k_1} \neq \delta_{k_2}$. Logo, $\Psi(k_1) \neq \Psi(k_2)$. Temos que Ψ é sobrejetora por construção. Agora mostraremos que Ψ é contínua. Seja $(k_i) \subset K$ uma rede tal que $k_i \longrightarrow k$, $k \in K$. Logo $f(k_i) \longrightarrow f(k)$ para todo $f \in \mathcal{C}(K)$, em particular, $\delta_{k_i} \xrightarrow{w^*} \delta_k$. Portanto Ψ é contínua. Logo como K é compacto e Ψ é contínua e bijetora, vem que Ψ é homeomorfismo. ■

Lema 2.3.5 (Stone 1937)**.** *Se φ é um homomorfismo escalar não nulo em $\mathcal{C}(K)$ então existe um único $x \in K$ tal que $\varphi = \delta_x$.*

Demonstração. Suponha que exista um homomorfismo escalar não nulo φ em $\mathcal{C}(K)$ tal que $\varphi \neq \delta_x$, para todo $x \in K$. Sendo assim, $ker(\varphi) \nsubseteq ker(\delta_x)$, para todo $x \in K$ pois, pela proposição 2.2.27, $ker(\varphi)$ é um ideal maximal em $\mathcal{C}(X)$ e assim os únicos ideais de $\mathcal{C}(X)$ contendo $ker(\varphi)$ são $ker(\varphi)$ e $\mathcal{C}(X)$.

Portanto, para cada $x \in K$, existe $f_x \in ker(\varphi)$, tal que $f_x \notin ker(\delta_x)$, ou seja, $\delta_x(f_x) = f_x(x) \neq 0$. Como $f_x \in \mathcal{C}(K)$, então f_x é contínua, logo existe uma vizinhança V_x de x tal que $f_x(y) \neq 0$ para todo $y \in V_x$. Dessa forma $|f_x(y)|^2 = f_x(y) \cdot \overline{f_x(y)} > 0$, para todo $y \in V_x$. Uma vez que K é compacto, existe $V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_n}$ cobertura finita de K com $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ e $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n} \in ker(\varphi)$, tais que $|f_{x_k}(y)|^2 \neq 0$, para todo $y \in V_k$. Defina $f = \sum_{k=1}^{n} |f_{x_k}|^2$. Temos que $f \in \mathcal{C}(K)$, pois $f_k \in \mathcal{C}(K)$, $1 \leq k \leq n$ e a função módulo é contínua. Também $g = \dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}(K)$, pois $f(y) = \sum_{k=1}^{n} |f_{x_k}(y)|^2 > 0$, para todo $y \in K$.

Portanto temos $1 = \varphi(\mathbf{e}) = \varphi(f \cdot g) = \varphi(\sum_{k=1}^{n} f_{x_k} \cdot \overline{f_{x_k}} \cdot g) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(f_{x_k}) \cdot \varphi(\overline{f_{x_k}}) \cdot \varphi(g) = 0$, pois $f_{x_k} \in ker(\varphi)$, o que é um absurdo. Logo $ker(\varphi) \subseteq ker(\delta_x)$, para algum $x \in K$.

Temos que $ker(\varphi) = ker(\delta_x)$, para algum $x \in K$. De fato, como $ker(\varphi) \subseteq ker(\delta_x)$, $ker(\varphi) \neq \mathcal{C}(K)$, pois $\delta_x \neq 0$ e $ker(\varphi)$ é ideal maximal, vem que $ker(\varphi) = ker(\delta_x)$, para algum $x \in K$. Logo, pela proposição 2.2.25, $\varphi = \delta_x$ para algum $x \in K$

Para provar a unicidade, suponha que existam $x, y \in K$ distintos tais que $\varphi = \delta_x$ e $\varphi = \delta_y$. Pelo lema 2.3.3, $\mathcal{C}(K)$ separa pontos, logo, existe $f \in \mathcal{C}(K)$ tal que $f(x) \neq f(y)$, assim $\delta_x(f) \neq \delta_y(f)$, ou seja, $\delta_x \neq \delta_y$ o que é um absurdo. ■

A seguir apresentamos o Teorema de Banach- Stone para isomorfismos álgebricos.

Teorema 2.3.6 (Gelfand e Kolmogoroff 1939)**.** *Sejam K e L espaços Hausdorff compactos. Então $\mathcal{C}(K)$ e $\mathcal{C}(L)$ são álgebras isomorfas se, e somente se K e L são homeomorfos. Além disso, todo* *isomorfismo de álgebra* $T : \mathcal{C}(L) \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ *é da forma* $T(f) = f \circ h$ *para todo* $f \in \mathcal{C}(L)$, *onde* $h : K \longrightarrow L$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Suponha que $h : K \to L$ seja um homeomorfismo. Sendo assim, considere $T : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ dada por $T(f) = f \circ h$. Vamos demonstrar que T é um isomorfismos de álgebras.

Sejam $f, g \in \mathcal{C}(K)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in K$, logo

$$\begin{aligned}(\alpha T(f) + T(g))(x) &= \alpha T(f)(x) + T(g)(x) = \alpha(f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)\\ &= \alpha(f(h(x))) + g(h(x)) = (\alpha f)(h(x)) + g(h(x))\\ &= (\alpha f + g)(h(x)) = ((\alpha f + g) \circ h)(x) = T(\alpha f + g)(x).\end{aligned}$$

Dessa forma, $T(\alpha f + g)(x) = (\alpha T(f) + T(g))(x)$, para todo $x \in K$, para todos $f, g \in \mathcal{C}(K)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Portanto $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$, isto é, T é linear.

Também T é multiplicativa. De fato,

$$\begin{aligned}(T(f) \cdot T(g))(x) &= T(f)(x) \cdot T(g)(x) = (f \circ h)(x) \cdot (g \circ h)(x)\\ &= f(h(x)) \cdot g(h(x)) = (f \cdot g)(h(x)) = (f \cdot g) \circ h(x)\\ &= T(f \cdot g)(x).\end{aligned}$$

Assim, $(T(f) \cdot T(g))(x) = T(f \cdot g)(x)$, para todo $x \in X$ e para todos $f, g \in \mathcal{C}(K)$, logo $T(f) \cdot T(g) = T(f \cdot g)$.

Agora, vamos mostrar que T é injetora, ou seja, que $ker(T) = \{0\}$. Temos que $T(f) = 0$ implica $f = f \circ (h \circ h^{-1}) = (f \circ h) \circ h^{-1} = T(f) \circ h^{-1} = 0$, logo $f = 0$, como queríamos.

Além disso, dado $g \in \mathcal{C}(K)$, temos que $g \circ h^{-1} \in C(L)$, pois $h^{-1} : L \to K$ e $g : K \to \mathbb{K}$ e a composta é contínua, já que h é um homeomorfismo e g é contínua. Assim $T(g \circ h^{-1}) = (g \circ h^{-1}) \circ h = g \circ (h \circ h^{-1}) = g$. Logo T é sobrejetora.

Finalmente T é uma isometria. De fato $\|T(f)\| = \sup_{x\in K} |(T(f)(x))| = \sup_{x\in K} |f(h(x))| = \sup_{y\in L} |f(y)| = \|f\|$, já que h é sobrejetora. Portanto T é isomorfismo de álgebras.

Reciprocamente, suponha que $T : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ seja um isomorfismo de álgebras. Para cada $x \in K$, $\delta_x \circ T : \mathcal{C}(L) \to \mathbb{K}$ é um homomorfismo escalar não nulo, pois é composta de homomorfismos escalares não nulos, onde δ_x é o funcional de Dirac de x. Pelo lema 2.3.5 existe um único $y = h(x) \in L$ tal que $\delta_x \circ T = \delta_{h(x)}$, ou seja, $T(f)(x) = f(h(x))$, para todo $f \in \mathcal{C}(L)$ pois $\delta_x \circ T(f) = T(f)(x)$ e $\delta_{h(x)}(f) = f(h(x))$.

Temos então definida uma função $h : K \longrightarrow L$. Para provar que h é contínua, seja N uma vizinhança do ponto $y_0 = h(x_0)$. Como L é normal, pelo Lema de Urysohn 1.2.17, existe um função contínua $f_0 : L \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f_0(y_0) = 1$ e $f_0(y) = 0$ para todo $y \in L \setminus N$. Como $T(f_0)(t) = f_0(h(t))$ é contínuo em $t \in K$, o conjunto $U = \{t \in K; f_0(h(t)) \neq 0\}$ é uma vizinhança de x_0. Se $t \in U$, então $f(h(t)) \neq 0$, logo $h(t) \in N$, assim $h(U) \subseteq N$. Portanto h é contínuo.

Aplicando um raciocínio análogo para $T^{-1} : C(K) \to \mathcal{C}(L)$, obtemos uma aplicação contínua $H : L \to K$ tal que $T^{-1}(f) = f \circ H$, para todo $f \in \mathcal{C}(K)$. Dessa forma, $h \circ H = Id$ e $H \circ h = Id$. Antes de provarmos essas duas afirmações vamos provar o seguinte:

(a) Para todo $f \in \mathcal{C}(L)$, $f = f \circ (h \circ H)$, implica que $h \circ H = Id$.

De fato, suponha que exista $y \in L$ tal que $h \circ H(y) \neq y$. Como pelo lema 2.3.3, $\mathcal{C}(L)$ separa pontos, existe $f \in \mathcal{C}(L)$ tal que $f(h \circ H(y)) \neq f(y)$. Absurdo, pois por hipótese, $f = f \circ (h \circ H)$, para todo $f \in \mathcal{C}(L)$. Portanto $h \circ H = Id$.

(b) Para todo $g \in \mathcal{C}(K)$, $g = g \circ (H \circ h)$, implica que $H \circ h = Id$.

A prova desta afirmação é análoga a do item (a) acima .

Agora vamos provar que $h \circ H = Id$. Seja $f \in \mathcal{C}(L)$, logo $f = T^{-1}(T(f)) = T^{-1}(f \circ h) = (f \circ h) \circ H = f \circ (h \circ H)$, assim pelo item (a), $h \circ H = Id$. Finalmente, provemos que $H \circ h = Id$. Seja $k \in \mathcal{C}(K)$, assim $k = T(T^{-1}(k)) = T(k \circ H) = (k \circ H) \circ h = k \circ (H \circ h)$, logo pelo item (b) $H \circ h = Id$ ■

Capítulo 3

O teorema de Banach- Stone para isomorfismos isométricos

3.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar a versão clássica do teorema de Banach- Stone. A demonstração exposta aqui é devida originalmente a Arens e Kelley [2] e para seu entendimento é necessário a teoria de estrutura extremal.

A primeira demonstração desta versão do teorema de Banach- Stone foi apresentada por Stone e pode ser encontrada em [24].

Para a demonstração deste teorema foram necessários os teoremas de Alaoglu 1.5.5, Krein-Milman 3.2.10, Choquet 3.2.16, Milman 3.2.17, entre outros.

Neste capítulo, trataremos apenas de espaços de Banach reais, pois o para o caso de espaços de Banach complexos seria necessário a teoria de espaços vetoriais topológicos o que fugiria do escopo de uma dissertação de mestrado.

Aqui apresentamos a versão feita em [13], neste texto feito para reais.

3.2 Estrutura Extremal

Todos espaços vetoriais considerados neste capítulo são reais.

Definição 3.2.1. *Seja $\mathcal{C}$ um subconjunto de um espaço normado X. Um elemento $x \in \mathcal{C}$ é chamado* **ponto extremal** *de $\mathcal{C}$ se o ponto não está no interior de nenhum segmento fechado não trivial em $\mathcal{C}$.*

Definição 3.2.2. **(a)** *Um* **Hiperplano** *de um espaço vetorial X é um subespaço Y de X de codimensão 1.*

(b) *$H \subset X$ é chamado* **subespaço afim** *de X se existe $y \in X$ e um subespaço vetorial Y de X tal que $H = y + Y$.*

(c) *Se X está munido de alguma topologia vetorial, então um hiperplano fechado afim é um* **subespaço afim** *dado por um hiperplano fechado.*

Definição 3.2.3. *Seja X um espaço vetorial. Considere um conjunto convexo $K \subset X$. Um subespaço afim H de X é uma* **variedade suporte** *de K em X se*

(a) $K \bigcap H \neq \emptyset$; *e*

(b) *se um segmento $[x, y] \subset K$ tem um ponto interior em H então $[x, y] \subset H$.*

Proposição 3.2.4. *Seja X um espaço normado e X^* seu dual.*

(a) *Seja $K \subset X$ um subconjunto convexo. Se $f \in X^*$, $f \neq 0$ e se existe $k \in K$ tal que $\sup_K(f) = f(k) = \alpha$, então $H = f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in X;\, f(x) = \alpha\}$ é uma variedade suporte fechada de K.*

(b) *Considere $K \subset X^*$ um conjunto convexo de um espaço de Banach X^*. Se $\delta_x \in X^{**}$ é não nulo e se existe $\phi \in K$ tal que $\sup_K(\delta_x) = \delta_x(\phi) = \phi(x) = \alpha$, então $H = (\delta_x)^{-1}(\{\alpha\})$ é uma variedade suporte fechada de K.*

Demonstração. **(a)** Vamos começar provando que H é subespaço afim de X. Como $f \neq 0$, então existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \neq 0$, logo considere $x_0 = \dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot x_1$. Afirmamos que $H = x_0 + ker(f)$. De fato, seja $y \in x_0 + ker(f)$, assim $y = \dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot x_1 + \beta$, para algum $\beta \in ker(f)$. Dessa forma, $f(y) = f\left(\dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot x_1 + \beta\right) = \dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot f(x_1) + f(\beta) = \alpha$. Portanto $y \in H$. Logo $x_0 + ker(f) \subseteq H$. Seja $y \in H$. Tome $\gamma = z - \dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot x_1$. Temos que, $\gamma \in ker(f)$, pois $f(\gamma) = f\left(z - \dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot x_1\right) = f(z) - \dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot f(x_1) = \alpha - \alpha = 0$. Assim $z = \dfrac{\alpha}{f(x_1)} \cdot x_1 + \gamma$, $\gamma \in ker(f)$. Dessa forma, $H \subseteq x_0 + ker(f)$. Portanto, $H = x_0 + ker(f)$. Logo H é subespaço afim de X.

Temos que $H \bigcap K \neq \emptyset$, pois $k \in H \bigcap K$. Também, H é fechado, pois é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua.

Além disso, suponha que $[x, y] \subset K$ e para algum $\lambda \in (0, 1)$, $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in f^{-1}(\{\alpha\})$, ou seja, $f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) = \alpha$. Se $f(x) < \alpha$, então $\alpha = f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y) < \lambda \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \alpha = \alpha$, o que é um absurdo. Logo $f(x) = \alpha$. Analogamente, concluímos que $f(y) = \alpha$. Dessa forma, para $\lambda \in (0, 1)$, $f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) f(y) = \lambda \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \alpha = \alpha$. Portanto, para $\lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) = \alpha$. Assim $[x, y] \subset H$. Portanto H é variedade suporte fechada de K.

(b) De fato, de modo análogo ao item (a), provamos que H é um subespaço afim de X^*. Temos que $H \bigcap K \neq \emptyset$ pois $\phi \in H \bigcap K$. Temos que H é fechado, pois é imagem inversa de fechado.

Além disso, suponha que $[\varphi, \psi] \subset K$ e para algum $\lambda \in (0, 1)$, temos $\delta_x(\lambda \cdot \varphi + (1 - \lambda) \cdot \psi) = \alpha$. Logo, se $\delta_x(\varphi) < \alpha$ então $\alpha = \delta_x(\lambda \cdot \varphi + (1 - \lambda) \cdot \psi) = (\lambda \cdot \varphi + (1 - \lambda) \cdot \psi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x) + (1 - \lambda)\psi(x) < \lambda \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \alpha = \alpha$ o que é um absurdo, logo $\delta_x(\varphi) = \alpha$. Analogamente, concluímos que $\delta_x(\psi) = \alpha$. Portanto $\delta_x(\varphi) = \alpha = \delta_x(\psi)$, mostrando que para todo $\lambda \in [0, 1]$, temos $\delta_x(\lambda \cdot \varphi + (1 - \lambda) \cdot \psi) = \alpha$, isto é $[\varphi, \psi] \subset H$. Portanto H é variedade suporte fechada de K.

■

Observação 3.2.5. *Seja X um espaço normado e X^* seu dual.*

(a) *Se $K \subset X$ é fraco compacto e convexo, então para um dado $f \in X^*$ podemos sempre encontrar $k \in K$ tal que $\sup_K(f) = f(k) = \alpha$, e portanto $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ é uma variedade suporte fechada de K em X, pela proposição 3.2.4 (a)*

De fato, como K é fraco compacto, e f é fraco contínuo, existe $k \in K$ tal que $f(k) = \sup_K(f)$.

(b) *Se $K \subset X^*$ é fraco estrela compacto e convexo, então para um dado $\delta_x \in X^{**}$ podemos sempre encontrar $\varphi \in K$ tal que $\sup_K(\delta_x) = \delta_x(\varphi) = \alpha$, e portanto $H = (\delta_x)^{-1}(\{\alpha\})$ é uma variedade suporte fechada de K em X^*, pela proposição 3.2.4 (b)*

De fato, como K é fraco estrela compacto e $\delta_x \in X^{**}$ é fraco estrela contínua, existem $\varphi \in K$ tal que $\delta_x(\varphi) = \sup_K(\delta_x)$.

Lema 3.2.6. *Seja K um subconjunto convexo de um espaço normado X. Se H é uma variedade suporte de K em X tal que $H \bigcap K = \{x\}$ para algum $x \in X$, então $x \in Ext(K)$.*

Demonstração. Claramente $x \in K$, pois $H \bigcap K = \{x\}$. Suponha que $x \notin Ext(K)$, logo $x = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$, para $x_1, x_2 \in K$ distintos. Então o interior do segmento $[x_1, x_2] \subset K$ tem um ponto em H, isto é, $x \in H$, logo $[x_1, x_2] \subset H \bigcap K$, pois H é variedade suporte. Mas isto é um absurdo, pois $H \bigcap K = \{x\}$. ■

Proposição 3.2.7. *Seja X um espaço de Banach real. Seja $\{M_\alpha\}$ uma família de subespaços afim de X. Então $\bigcap M_\alpha$ é um subespaço afim de X.*

Demonstração. Sabemos que M_α é um subespaço afim para todo α, logo $M_\alpha = a_\alpha + B_\alpha$ com $\alpha \in X$ e $B_\alpha \subset X$ subespaço, para todo α. Seja $z \in \bigcap M_\alpha$, logo $z = a_\alpha + b_\alpha$, para $b_\alpha \in B_\alpha$ e para todo α.

Então podemos escrever $M_\alpha = z + B_\alpha$ para todo α. De fato, seja $x \in M_\alpha$, logo $x = a_\alpha + c_\alpha$, com $c_\alpha \in B_\alpha$, então $x = z - b_\alpha + c_\alpha = z + (c_\alpha - b_\alpha) \in z + B_\alpha$, pois B_α é subespaço. Dessa forma $M_\alpha \subset z + B_\alpha$.

Seja agora $y \in z + B_\alpha$, então $y = z + d_\alpha$, $d_\alpha \in B_\alpha$, assim $y = a_\alpha + b_\alpha + d_\alpha = a_\alpha + (b_\alpha + d_\alpha) \in M_\alpha$. Assim $z + B_\alpha \subset M_\alpha$ Portanto $M_\alpha = z + B_\alpha$.

Dessa forma, temos que $\bigcap M_\alpha = z + \bigcap B_\alpha$. De fato, seja $k \in z + \bigcap B_\alpha$, logo $k = z + j$, onde $j \in \bigcap B_\alpha$. Logo, $k \in z + B_\alpha$ para todo α, então $k \in M_\alpha$ para todo α, assim $k \in \bigcap M_\alpha$. Portanto $z + \bigcap B_\alpha \subset \bigcap M_\alpha$. Por outro lado se $k \in \bigcap M_\alpha$, então $k \in M_\alpha$ para todo α, assim $k \in z + B_\alpha$ para todo α, então $k = z + b_\alpha$, com $b_\alpha \in B_\alpha$, para todo α, assim $b_\alpha \in \bigcap B_\alpha$, pois como k e z são fixos e $b_\alpha = k - z$, para todo α, logo $k \in z + \bigcap B_\alpha$. Portanto $\bigcap M_\alpha \subset z + \bigcap B_\alpha$. Logo $\bigcap M_\alpha = z + \bigcap B_\alpha$.

Dessa forma, $\bigcap M_\alpha$ é subespaço afim, pois interseção de subespaços é subespaço. ■

Proposição 3.2.8. *Sejam X um espaço de Banach real e X^* seu dual.*

(a) *Considere $K \subset X$ um subconjunto convexo fraco compacto. Seja $\{M_\alpha\}$ uma cadeia de variedades suportes fechadas de K. Então $\bigcap M_\alpha$ é uma variedade suporte de K.*

(b) *Considere $K \subset X^*$ um subconjunto convexo fraco estrela compacto. Seja $\{M_\alpha\}$ uma cadeia de variedades suportes fraco estrela fechadas de K. Então $\bigcap M_\alpha$ é uma variedade suporte de K.*

Demonstração. **(a)** Como $\{M_\alpha\}$ é uma cadeia de variedades suportes de K, então pela proposição 3.2.7, $\bigcap M_\alpha$ é subespaço afim de X e é fechado, pois é interseção de fechados.

Também $(\bigcap M_\alpha) \bigcap K = \bigcap (M_\alpha \bigcap K) \neq \emptyset$. De fato, vamos verificar primeiro que $M_\alpha \bigcap K$ é fracamente compacto para todo α. Por hipótese K é fracamente compacto logo, K é fracamente fechado; Também por hipótese M_α é fechado, logo é fracamente fechado, assim $M_\alpha \bigcap K$ é fracamente fechado e como $M_\alpha \bigcap K \subset K$, vem que $M_\alpha \bigcap K$ é fracamente compacto, para todo α.

Agora vamos verificar que $\bigcap (M_\alpha \bigcap K) \neq \emptyset$. De fato, como $M_\alpha \bigcap K$ é fracamente compacto segue que $M_\alpha \bigcap K$ é fracamente fechado para todo α. Seja $L = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ um conjunto finito. Como $\{M_\alpha\}$ é uma cadeia, podemos, sem perda de generalidade, relacionar os elementos $\{M_{\alpha_1}, ..., M_{\alpha_n}\}$ da seguinte forma: $M_{\alpha_n} \subset ... \subset M_{\alpha_1}$, assim $M_{\alpha_n} \bigcap K \subset ... \subset M_{\alpha_1} \bigcap K$. Dessa forma, $\bigcap_{i=1}^{n} (M_{\alpha_i} \bigcap K) \neq \emptyset$, pois $M_{\alpha_n} \bigcap K \neq \emptyset$. Assim $\bigcap (M_\alpha \bigcap K) \neq \emptyset$, uma vez que K é fracamente compacto e $\{M_\alpha \bigcap K\}$ é uma família de fracamente fechados em K satisfazendo a propriedade da interseção finita.

Agora se $[x, y] \subset K$ tem um ponto interior em $\bigcap M_\alpha$, então $[x, y]$ tem ponto interior em M_α para todo α, logo $[x, y] \subset M_\alpha$, para todo α, já que M_α é variedade suporte de K. Portanto $[x, y] \subset \bigcap M_\alpha$. Assim $\bigcap M_\alpha$ é variedade suporte fechada de K.

(b) Como $\{M_\alpha\}$ é uma cadeia de variedades suportes de K, então pela proposição 3.2.7 $\bigcap M_\alpha$ é subespaço afim de X e é fraco estrela fechado, pois é interseção de fraco estrela fechados.

Também $(\bigcap M_\alpha) \bigcap K = \bigcap (M_\alpha \bigcap K) \neq \emptyset$. De fato, vamos verificar primeiro que $M_\alpha \bigcap K$ é fraco estrela compacto para todo α. Por hipótese K é fraco estrela compacto logo, K é fraco estrela fechado; Também por hipótese M_α é fraco estrela fechado, assim $M_\alpha \bigcap K$ é fraco estrela fechado e como $M_\alpha \bigcap K \subset K$, vem que $M_\alpha \bigcap K$ é fraco estrela compacto, para todo α.

Agora vamos verificar que $\bigcap (M_\alpha \bigcap K) \neq \emptyset$. De fato, como $M_\alpha \bigcap K$ é fraco estrela compacto segue que $M_\alpha \bigcap K$ é fraco estrela fechado para todo α. Seja $L = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ um conjunto finito. Como $\{M_\alpha\}$ é uma cadeia, podemos, sem perda de generalidade, relacionar os elementos $\{M_{\alpha_1}, ..., M_{\alpha_n}\}$ da seguinte forma: $M_{\alpha_n} \subset ... \subset M_{\alpha_1}$, assim $M_{\alpha_n} \bigcap K \subset ... \subset M_{\alpha_1} \bigcap K$. Dessa forma, $\bigcap_{i=1}^{n} (M_{\alpha_i} \bigcap K) \neq \emptyset$, pois $M_{\alpha_n} \bigcap K \neq \emptyset$. Assim $\bigcap (M_\alpha \bigcap K) \neq \emptyset$, uma vez que K é fraco estrela compacto e $\{M_\alpha \bigcap K\}$ é uma família de fraco estrela fechados em K satisfazendo a propriedade da interseção finita.

Agora se $[\varphi, \phi] \subset K$ tem um ponto interior em $\bigcap M_\alpha$, então $[\varphi, \phi]$ tem ponto interior em M_α para todo α, logo $[\varphi, \phi] \subset M_\alpha$, para todo α, já que M_α é variedade suporte de K. Portanto $[\varphi, \phi] \subset \bigcap M_\alpha$. Assim $\bigcap M_\alpha$ é variedade suporte fraco estrela fechada de K.

■

Lema 3.2.9. **(a)** *Seja K um subconjunto fraco compacto convexo de um espaço de Banach real X. Se H é uma variedade suporte fechada de K, então H contém ponto extremo de K.*

(b) *Seja K um subconjunto convexo fraco estrela compacto de um espaço de Banach real X^*. Se H é uma variedade suporte fechada de K, então H contém ponto extremo de K.*

Demonstração. **(a)** Seja $\mathcal{M}$ a família de todas as variedades suportes fechadas de K contidas em H e parcialmente ordenada pela inclusão. Temos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, pois, $H \in \mathcal{M}$.

Se $\{M_\alpha\}$ é uma cadeia em $\mathcal{M}$, pela proposição 3.2.8, temos que $\bigcap M_\alpha$ é variedade suporte de K e é fechada, pois é interseção de fechados.

O conjunto $\mathcal{M}$ é parcialmente ordenado pela inclusão, ou seja, $M_{\alpha_1} \leq M_{\alpha_2}$ se e somente se $M_{\alpha_1} \subset M_{\alpha_2}$. Assim $\mathcal{M}$ é limitado inferiormente por $\bigcap M_\alpha$, logo pelo Lema de Zorn existe um elemento minimal M_0 em $\mathcal{M}$.

Provaremos que $M_0 \bigcap K$ é um conjunto unitário. Suponha que existam $x, y \in M_0 \bigcap K$ distintos. Pelo teorema 1.3.16 (d), existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Uma vez que $M_0 \bigcap K$ é fracamente compacto, existe $k \in M_0 \bigcap K$ tal que $f(k) = \alpha = \sup_{M_0 \bigcap K}(f)$. Então, pela proposição 3.2.4 (a), $f^{-1}(\{\alpha\})$ é uma variedade suporte de $M_0 \bigcap K$.

Já sabemos pela proposição 3.2.7 que $M' = M_0 \bigcap f^{-1}(\{\alpha\})$ é um subespaço afim, pois é interseção de subespaços afins. Também $M' \neq \emptyset$, pois $k \in M'$. Observamos também que M' é uma variedade suporte de K. De fato, $M' \bigcap K = (M_0 \bigcap f^{-1}(\{\alpha\})) \bigcap K = f^{-1}(\{\alpha\}) \bigcap (M_0 \bigcap K) \neq \emptyset$, uma vez que $f^{-1}(\{\alpha\})$ é variedade suporte de $M_0 \bigcap K$. Agora, se $[a, b] \subset K$ tem ponto interior em M', então tem ponto interior em M_0 e como M_0 é variedade suporte em K, vem que $[a, b] \subset M_0$. Assim $[a, b] \subset M_0 \bigcap K$. Também $[a, b]$ tem ponto interior em $f^{-1}(\{\alpha\})$ e como $f^{-1}(\{\alpha\})$ é variedade suporte em $M_0 \bigcap K$, temos que $[a, b] \subset f^{-1}(\{\alpha\})$. Dessa forma $[a, b] \subset M_0 \bigcap f^{-1}(\{\alpha\}) = M'$.

Como $f(x) \neq f(y)$, então ou x ou y não pertencem a M', isto é, M' é um subconjunto próprio de M_0, mas isto é um absurdo, pois por hipótese, M_0 é um elemento minimal, ou seja, $M_0 \subset M'$. Logo pelo lema 3.2.6, H contém ponto extremo de K.

(b) Seja $\mathcal{M}$ a família de todas as variedades suportes fraco estrela fechadas de K contidas em H e parcialmente ordenada pela inclusão. Temos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, pois $H \in \mathcal{M}$.

Se $\{M_\alpha\}$ é uma cadeia em $\mathcal{M}$, então pela proposição 3.2.7, $\bigcap M_\alpha$ é subespaço afim de X e é fraco estrela fechado, pois é interseção de fraco estrela fechados.

Analogamente ao que foi feito no item (a) existe um elemento minimal M_0 em $\mathcal{M}$.

Provaremos que $M_0 \bigcap K$ tem um único ponto extremo. Suponha que existam $\varphi_1, \varphi_2 \in M_0 \bigcap K$ distintos, logo existe $x \in X$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$, então $\delta_x(\varphi_1) \neq \delta_x(\varphi_2)$. Como $M_0 \bigcap K$ é fraco estrela compacto, existe $\varphi \in M_0 \bigcap K$ tal que $\delta_x(\varphi) = \alpha = \sup_{M_0 \bigcap K}(\delta_x)$. Então, pela proposição 3.2.4 (b), $\delta_x^{-1}(\{\alpha\})$ é uma variedade suporte de $M_0 \bigcap K$.

Já sabemos que $M' = M_0 \bigcap \delta_x^{-1}(\{\alpha\})$ é um subespaço afim, pois é interseção de subespaços afins. Também $M' \neq \emptyset$, pois $\varphi \in M'$. Observamos também que M' é uma variedade suporte de K. De fato, $M' \bigcap K = (M_0 \bigcap \delta_x^{-1}(\{\alpha\})) \bigcap K = \delta_x^{-1}(\{\alpha\}) \bigcap (M_0 \bigcap K) \neq \emptyset$, uma vez que $\delta_x^{-1}(\{\alpha\})$ é variedade suporte de $M_0 \bigcap K$. Agora, se $[\nu, \phi] \subset K$ tem ponto interior em M', então tem ponto interior em M_0 e como M_0 é variedade suporte em K, vem que $[\nu, \phi] \subset M_0$. Assim $[\nu, \phi] \subset M_0 \bigcap K$. Também $[\nu, \phi]$ tem ponto interior em $\delta_x^{-1}(\{\alpha\})$ e como $\delta_x^{-1}(\{\alpha\})$ é variedade suporte em $M_0 \bigcap K$, temos que $[\nu, \phi] \subset \delta_x^{-1}(\{\alpha\})$. Dessa forma $[\nu, \phi] \subset M_0 \bigcap \delta_x^{-1}(\{\alpha\}) = M'$.

Como $\delta_x(\varphi_1) \neq \delta_x(\varphi_2)$, então ou φ_1 ou φ_2, não pertencem a M', isto é, M' é um subconjunto próprio de M_0, mas isto é um absurdo, pois por hipótese M_0 é elemento minimal, ou seja, $M_0 \subset M'$. Logo pelo lema 3.2.6 H contém ponto extremo de K.

■

Teorema 3.2.10 (Krein- Milman)**.** *Sejam X um espaço de Banach e X^* seu dual.*

(a) *Se $K \subset X$ é fraco compacto e convexo, então $K = \overline{conv}^{\omega}(Ext(K))$.*

(b) *Se $K \subset X^*$ é fraco estrela compacto e convexo, então $K = \overline{conv}^{\omega^*}(Ext(K))$.*

Demonstração. **(a)** Seja $B = \overline{conv}^{\omega}(Ext(K))$. Vamos demonstrar que $B = K$. Temos que $B \subset K$. De fato, sabemos que $Ext(K) \subset K$ e isto implica que $conv(Ext(K)) \subset conv(K)$ e como, por hipótese K é convexo, $K = conv(K)$, assim $conv(Ext(K)) \subset K$, então $\overline{conv}^{\omega}(Ext(K)) \subset \overline{K}^{\omega}$ e como K é fraco compacto, então K é fraco fechado, logo $B \subset K$.

Agora, vamos provar que $K \subset B$. Suponha que $K \not\subset B$, então existe $c \in K \setminus B$. Pelo teorema de Hahn- Banach, 1.3.16(c), existe $f \in X^*$ tal que $f(c) > \sup_B(f)$. Como K é fraco compacto, existe $\alpha = \sup_K(f)$. Considere $H = f^{-1}(\{\alpha\})$. Temos que H é variedade suporte fechada de K, assim pelo lema 3.2.9, H contém um ponto extremo x de K. Mas

$$f(x) = \alpha = \sup_K(f) \geq f(c) > sup_B(f),$$

onde a primeira desigualdade se deve ao fato de $c \in K$. Assim $f(x) > \sup_B(f)$, logo $x \notin B$ o que é um absurdo, já que $x \in Ext(K)$ e dessa forma deveríamos ter $x \in B = \overline{conv}^{\omega}(Ext(K))$. Portanto $K \subset B$. Assim $K = \overline{conv}^{\omega}(Ext(K))$.

(b) Seja $B = \overline{conv}^{\omega^*}(Ext(K))$. Vamos demonstrar que $B = K$. Temos que $B \subset K$. De fato, sabemos que $Ext(K) \subset K$ e isto implica que $conv(Ext(K)) \subset conv(K)$ e como, por hipótese K é convexo, $K = conv(K)$, assim $conv(Ext(K)) \subset K$, então $\overline{conv}^{\omega^*}(Ext(K)) \subset \overline{K}^{\omega^*}$ e como K é fraco estrela compacto, então K é fraco estrela fechado, logo $B \subset K$.

Agora, vamos provar que $K \subset B$. Suponha que $K \not\subset B$, então existe $\varphi \in K \setminus B$. Pelo teorema de Hahn- Banach 1.5.7, existe $\delta_x \in X^{**}$ tal que $\delta_x(\varphi) > \sup_B(\delta_x)$. Como K é fraco estrela compacto, existe $\alpha = \sup_K(\delta_x)$. Considere $H = \delta_x^{-1}(\{\alpha\})$. Temos que H é variedade suporte fechada de K, assim pelo lema 3.2.9, H contém um ponto extremo ψ de K. Mas

$$\delta_x(\psi) = \alpha = \sup_K(\delta_x) \geq \delta_x(\varphi) > sup_B(\delta_x),$$

onde a primeira desigualdade se deve ao fato de $\varphi \in K$. Assim $\delta_x(\psi) > \sup_B(\delta_x)$, logo $\psi \notin B$ o que é um absurdo, já que $\psi \in Ext(K)$ e dessa forma deveríamos ter $\psi \in B = \overline{conv}^{\omega^*}(Ext(K))$. Portanto $K \subset B$. Assim $K = \overline{conv}^{\omega^*}(Ext(K))$.

■

Definição 3.2.11. *Sejam X um espaço de Banach real e X^* seu dual.*

(a) *Um* **semi- espaço** *de X é um conjunto fraco aberto de uma das seguintes formas: $\{x \in X; f(x) < \alpha\}$ ou $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ para algum $f \in X^* \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(b) *Um* **semi-espaço** *de X^* é um conjunto fraco estrela aberto de uma das seguintes formas: $\{f \in X^*; f(x) < \alpha\}$ ou $\{f \in X^*; f(x) > \alpha\}$, para algum $x \in X \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Observação 3.2.12. *Neste capítulo vamos considerar os seguintes semi-espaços: $\{x \in X; f(x) < \alpha\}$ e $\{f \in X^*; f(x) < \alpha\}$.*

Definição 3.2.13. *Seja C um subconjunto de um espaço de Banach X. Uma* **fatia** *de C é uma interseção de C com um semi-espaço de X.*

Lema 3.2.14. **(a)** *Interseções finitas de fatias em X formam uma base da topologia fraca.*

(b) *Interseções finitas de fatias em X^* formam uma base da topologia fraca estrela.*

Demonstração. **(a)** Vamos provar a afirmação para uma vizinhança de zero. A prova para a vizinhança de $y \neq 0$ é análoga.

Seja $V = V(0, f_1, ..., f_n, \varepsilon) = \{x \in X; \sup(f_i(x)) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$. Considere $V_i = \{x \in X; f_i(x) < \varepsilon\}$ uma fatia de X. Vamos mostrar que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset V$.

De fato, seja $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset V$, então $x \in V_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, logo $f_i(x) < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$, logo $\sup(f_i(x)) < \varepsilon$, ou seja, $x \in V$, como queríamos.

(b) Vamos provar a afirmação para uma vizinhança de um funcional nulo. A prova para a vizinhança de $\varphi \neq 0$ é análoga.

Seja $V = V(0, x_1, ..., x_n, \varepsilon) = \{f \in X^*; \sup(f(x_i)) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$ uma vizinhaça para o funcional nulo na topologia fraca estrela. Considere $V_i = \{f \in X^*; f(x_i) < \varepsilon\}$ uma fatia de X^*. Vamos mostrar que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset V$.

De fato, seja $f \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, então $f \in V_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, logo $f(x_i) < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$, logo $\sup(f(x_i)) < \varepsilon$, ou seja, $f \in V$, como queríamos.

■

Proposição 3.2.15. *Seja C um conjunto convexo num espaço de Banach X e seja x um ponto extremo em C. Se $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$, com $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ e $x_i \in C$ para $i = 1, ..., n$, então $x = x_i$ para algum i.*

Demonstração. Vamos provar por indução em n. Se $n = 1$, não há o que provar, pois $x = x_1$.

Se $n = 2$, então $x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Se $x \neq x_1$ e $x \neq x_2$, então é possível construir um segmento contido em C, cujo centro é x, o que contradiz a hipótese de $x \in Ext(C)$. Logo $x = x_1$ ou $x = x_2$

Para $n = 3$, então $x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Assim $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot x_2\right) + \lambda_3 \cdot x_3$. Seja $y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot x_2$, então $x = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot y + \lambda_3 \cdot x_3$, com $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$. Pelo caso anterior, $x = y$ ou $x = x_3$. Se $x = x_3$, obtemos o que queríamos. Se $x = y$, como $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1$, novamente pelo caso anterior $x = x_1$ ou $x = x_2$, como queríamos.

Suponha agora que o resultado valha para $n = k - 1$ e vamos provar que vale para $n = k$. Seja $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i$, com $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Podemos escrever x da seguinte forma:

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i} \cdot x_1 + ... + \frac{\lambda_{k-1}}{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i} \cdot x_{k-1}\right) + \lambda_k \cdot x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \cdot y + \lambda_k \cdot x_k \tag{3.1}$$

onde $y = \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i} \cdot x_1 + ... + \frac{\lambda_{k-1}}{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i} \cdot x_{k-1}\right)$. Pelo caso $n = 2$, obtemos, $x = y$ ou $x = x_k$. Se $x = x_k$, não há o que provar. Se $x = y$ usando a hipótese de indução obtenho $x = x_i$ para algum i, como queríamos. ■

Lema 3.2.16 (Choquet). **(a)** *Seja C um conjunto convexo fraco compacto num espaço de Banach X. Para todo $x \in Ext(C)$ e para cada subconjunto fraco aberto V de C contendo x, existem $f \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$C \bigcap \{z \in X;\, f(z) > \alpha\} \subset V. \tag{3.2}$$

(b) *Seja C um conjunto convexo fraco estrela compacto num espaço de Banach X^*. Para todo $\varphi \in Ext(C)$, e para cada subconjunto fraco estrela aberto V de C contendo φ, existem $\psi \in X^{**}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$C \bigcap \{\phi \in X^*;\, \psi(\phi) > \alpha\} \subset V. \tag{3.3}$$

Demonstração. **(a)** Seja V uma vizinhança de x na topologia fraca relativo a C da forma $V = \tilde{V}_1 \bigcap ... \bigcap \tilde{V}_k$, onde $\tilde{V}_i$ é uma fatia de C, para todo $1 \leq i \leq k$, ou seja $\tilde{V}_i = V_i \bigcap C$, com V_i sendo semi- espaços abertos de X. O lema 3.2.14 garante que podemos tomar a vizinhança dessa forma.

Então $x \notin \bigcup_{i=1}^{k} ((X \setminus V_i) \bigcap C)$. De fato, se $x \in \bigcup_{i=1}^{k} ((X \setminus V_i) \bigcap C)$, então $x \in ((X \setminus V_i) \bigcap C)$, para algum $i = 1, ..., k$, logo $x \in C$ e $x \notin V_i$, para algum $i = 1, ..., k$, ou seja, $x \notin \tilde{V}_i$ para algum $i = 1, ..., k$ o que é um absurdo, pois $V = \tilde{V}_1 \bigcap ... \bigcap \tilde{V}_k$ é uma vizinhança de x.

Consequentemente, $x \notin conv \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$. De fato, como $x \in Ext(C)$, se $x \in conv \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$, então, pelo lema 1.3.19, $x = \sum_{j=1}^{k}(x_j \cdot \lambda_j)$, com $x_j \in (X \setminus V_j) \bigcap C$ e $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, logo pela proposição 3.2.15 $x = x_j$, para algum j, pois $x \in Ext(C)$, o que é um absurdo, já que $x \notin \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$.

Temos que $x \notin \overline{conv} \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$. De fato, vamos provar primeiro que $((X \setminus V_i) \bigcap C)$ é fraco compacto. Temos que $V_i = \{x \in X; f_i(x) < \alpha_i\}$ para $f_i \in X^*$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, logo $X \setminus V_i = \{x \in X; f_i(x) \geq \alpha_i\}$ e portanto $X \setminus V_i$ é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função fraco contínua e dessa forma $X \setminus V_i$ é fraco fechado. Como C é fraco compacto, vem que C é fraco fechado. Logo $((X \setminus V_i) \bigcap C)$ é fraco fechado contido em C e portanto fraco compacto.

Agora vamos verificar que $((X \setminus V_i) \bigcap C)$ é convexo. Sejam $z, y \in ((X \setminus V_i) \bigcap C)$, vamos mostrar que $\lambda \cdot z + (1 - \lambda) \cdot y \in ((X \setminus V_i) \bigcap C)$, $\lambda \in [0, 1]$. Como $z, y \notin V_i$, então $f_i(z) \geq \alpha_i$ e $f_i(y) \geq \alpha_i$, logo $f_i(\lambda \cdot z + (1 - \lambda) \cdot y) = \lambda \cdot f_i(z) + (1 - \lambda) f_i(y) \geq \alpha_i$, logo $\lambda \cdot z + (1 - \lambda) \cdot y \in X \setminus V_i$, para $\lambda \in [0, 1]$. Portanto $(X \setminus V_i) \bigcap C$ é convexo, pois C, por hipótese, é convexo. Dessa forma, pelo lema 1.3.22, $conv \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$ é fraco compacto e contido em X, logo é fraco fechado. Assim, $x \notin \overline{conv} \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$, pois provamos acima que $x \notin conv \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$.

Como $conv \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus V_i) \bigcap C$ é convexo, então pelo Teorema de Hahn Banach 1.3.16 (c), aplicado ao conjunto, $conv \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus V_i) \bigcap C$ existe $f \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) > \alpha > \sup\{f(x); x \in conv \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus V_i) \bigcap C\}$$

E pelo lema 1.5.6(a) vem que $\sup\{f(x); x \in conv \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus V_i) \bigcap C\} = \sup\{f(x); x \in \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus V_i) \bigcap C\}$. Logo

$$f(x) > \alpha > \sup\{f(x); x \in \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus V_i) \bigcap C\}$$

Então a fatia $C \bigcap \{z \in X; f(z) > \alpha\}$ contém x, pois $x \in C$, já que $x \in Ext(C)$ e $f(x) > \alpha$. Também a fatia está contida em V. De fato, seja $a \in C \bigcap \{z \in X; f(z) > \alpha\}$, logo $a \in C$ e

$f(a) > \alpha$; se $a \notin V$, então $a \notin V_i$ para algum $i = 1, ..., k$. Assim, $a \in (X \setminus V_i) \bigcap C$ para algum $i = 1, ..., k$, e então $a \in \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)$, o que é um absurdo, pois $f(a) > \sup\{f(y); y \in \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus V_i) \bigcap C)\}$. Portanto a fatia está contida em V, como queríamos.

(b) Seja V uma vizinhança de φ na topologia fraca estrela relativo a C da forma $V = \tilde{V}_1 \bigcap ... \bigcap \tilde{V}_k$, onde $\tilde{V}_i$ é uma fatia de C, para todo $1 \leq i \leq k$, ou seja $\tilde{V}_i = V_i \bigcap C$, com V_i sendo semi-espaços abertos de X^*. O lema 3.2.14 garante que podemos tomar a vizinhança dessa forma.

Então $\varphi \notin \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$. De fato, se $\varphi \in \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$, então $\varphi \in ((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$, para algum $i = 1, ..., k$, logo $\varphi \in C$ e $\varphi \notin V_i$, para algum $i = 1, ..., k$, ou seja, $\varphi \notin \tilde{V}_i$ para algum $i = 1, ..., k$ o que é um absurdo, pois $V = \tilde{V}_1 \bigcap ... \bigcap \tilde{V}_k$ é uma vizinhança de φ.

Consequentemente, $\varphi \notin conv \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$. De fato, como $\varphi \in Ext(C)$, se $\varphi \in conv \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$, então pelo lema 1.3.19 $\varphi = \sum_{j=1}^{k}(\varphi_j \cdot \lambda_j)$, com $\varphi_j \in ((X^* \setminus V_j) \bigcap C)$ e $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$. Logo, pela proposição 3.2.15, $\varphi = \varphi_j$, para algum j, pois $\varphi \in Ext(C)$, o que é um absurdo, já que $\varphi \notin \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$.

Temos que $\varphi \notin \overline{conv}^{\omega^*} \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$. De fato, vamos provar primeiro que $((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$ é fraco estrela compacto. Temos que $V_i = \{f \in X^*; \delta_{x_i}(f) < \alpha_i\}$ para $x_i \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Logo, $X^* \setminus V_i = \{f \in X^*; \delta_{x_i}(f) \geq \alpha_i\}$ e portanto $X^* \setminus V_i$ é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função fraco estrela contínua e dessa forma $X^* \setminus V_i$ é fraco estrela fechado. Como C é fraco estrela compacto, vem que C é fraco estrela fechado. Logo $((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$ é fraco estrela fechado contido em C e portanto fraco estrela compacto.

Agora vamos verificar que $((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$ é convexo. Sejam $f, g \in ((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$, vamos mostrar que $\lambda \cdot f + (1 - \lambda) \cdot g \in ((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$, $\lambda \in [0, 1]$. Como $f, g \notin V_i$, então $\delta_{x_i}(f) \geq \alpha_i$ e $\delta_{x_i}(g) \geq \alpha_i$, logo $\delta_{x_i}(\lambda \cdot f + (1 - \lambda) \cdot g) = (\lambda \cdot f + (1 - \lambda)g)(x_i) \geq \alpha_i$, logo $\lambda \cdot f + (1 - \lambda) \cdot g \in X^* \setminus V_i$, para $\lambda \in [0, 1]$. Portanto $(X^* \setminus V_i) \bigcap C$ é convexo. Dessa forma, pelo lema 1.3.22 $conv \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$ é fraco estrela compacto e contido em X^*, logo é fraco estrela fechado. Assim $\varphi \notin \overline{conv}^{\omega^*} \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$, pois provamos acima que $\varphi \notin conv \bigcup_{i=1}^{k}((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$.

Como $conv \bigcup_{i=1}^{k}(X^* \setminus V_i) \bigcap C$ é convexo, então pelo Teorema de Hahn Banach 1.5.7 aplicado ao conjunto $conv \bigcup_{i=1}^{k} (X^* \setminus V_i) \bigcap C$, existe $\delta_x \in X^{**}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\delta_x(\varphi) > \alpha > \sup\{\delta_x(\psi); \psi \in conv \bigcup_{i=1}^{k} ((X^* \setminus V_i) \bigcap C)\}.$$

E pelo lema 1.5.6(b) vem que $\sup\{\delta_x(\psi); \psi \in conv \bigcup_{i=1}^{k} ((X^* \setminus V_i) \bigcap C) = \sup\{\delta_x(\psi); \psi \in \bigcup_{i=1}^{k} ((X^* \setminus V_i) \bigcap C)\}$.

Então a fatia $C \bigcap \{\Gamma \in X^*; \delta_x(\Gamma) > \alpha\}$ contém φ, pois $\varphi \in C$, já que $\varphi \in Ext(C)$ e $\delta_x(\varphi) > \alpha$. Também a fatia está contida em V. De fato, seja $\rho \in C \bigcap \{\Gamma \in X^*; \delta_x(\Gamma) > \alpha\}$, logo $\rho \in C$ e $\delta_x(\rho) > \alpha$; se $\rho \notin V$, então $\rho \notin V_i$ para algum $i = 1, ..., k$, assim $\rho \in (X^* \setminus V_i) \bigcap C$ para algum $i = 1, ..., k$, então $\rho \in \bigcup_{i=1}^{k} ((X^* \setminus V_i) \bigcap C)$, o que é um absurdo, pois $\delta_x(\rho) > \alpha$. Portanto a fatia está contida em V, como queríamos.

■

Teorema 3.2.17 (Milman)**.** **(a)** *Seja C um conjunto convexo fracamente compacto num espaço de Banach X. Se $B \subset C$ é tal que $\overline{conv}^{\omega}(B) = C$, então $Ext(C) \subset \overline{B}^{\omega}$.*

(b) *Seja C um conjunto convexo fraco estrela compacto num espaço de Banach X^*. Se $B \subset C$ é tal que $\overline{conv}^{\omega^*}(B) = C$, então $Ext(C) \subset \overline{B}^{\omega^*}$.*

Demonstração. **(a)** Suponha que $Ext(C) \not\subset \overline{B}^{\omega}$, ou seja, existe $x \in Ext(C)$ e $x \notin \overline{B}^{\omega}$. Então existe um aberto fraco V de C contendo x, tal que $V \bigcap B = \emptyset$. Pelo Lema de Choquet 3.2.16, existem $f \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) > \alpha \text{ e } C \bigcap \{z \in X;\ f(z) > \alpha\} \subset V. \tag{3.4}$$

Portanto $[C \bigcap \{z \in X;\ f(z) > \alpha\}] \bigcap B = \emptyset$. Dessa forma, $\sup_{z \in B} f(z) \leq \alpha$.

Pelo lema 1.5.6 (a), vem que $\sup_B(f) = \sup_{\overline{conv}(B)}(f)$ Dessa forma, $f(x) > \alpha \geq \sup_{\overline{conv}(B)}(f)$. Isto contradiz o fato de $C = \overline{conv}^{\omega}(B)$, pois $x \in C$ e $f(x) > \sup_{\overline{conv}(B)}(f)$. Logo, $Ext(C) \subset \overline{B}^{\omega}$.

(b) Suponha que $Ext(C) \not\subset \overline{B}^{\omega^*}$, ou seja, existe $\varphi \in Ext(C)$ e $\varphi \notin \overline{B}^{\omega^*}$. Então existe um aberto fraco estrela V de C contendo φ, tal que $V \bigcap B = \emptyset$.

Pelo lema de Choquet 3.2.16 existem $\delta_x \in X^{**}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\delta_x(\varphi) > \alpha \text{ e } C \bigcap \{\Gamma \in X^*; \delta_x(\Gamma) > \alpha\} \subset V. \tag{3.5}$$

Portanto $[C \bigcap \{\Gamma \in X^*; \delta_x(\Gamma) > \alpha\}] \bigcap B = \emptyset$. Dessa forma, $\sup_B(\delta_x) \leq \alpha$.

Pelo lema 1.5.6 (b), vem que $\sup_B(\delta_x) = \sup_{\overline{conv}^{\omega^*}(B)}(\delta_x)$. Dessa forma, $\delta_x(\varphi) > \alpha \geq$

$\sup_{\overline{conv}^{\omega^*}(B)}(\delta_x)$. Isto contradiz o fato de $C = \overline{conv}^{\omega^*}(B)$ e $\varphi \in C$.

■

3.3 Teorema de Banach- Stone

A partir de agora iremos aplicar os resultados anteriores para o espaço de Banach real $\mathcal{C}(K)$, visando a demonstração do Teorema de Banach- Stone 3.3.3. Começamos com o seguinte lema.

Lema 3.3.1. *Seja K um espaço topológico Hausdorff compacto. Então $Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) = \{\pm\delta_k;\ k \in K\}$, onde $\delta_k \in \mathcal{C}(K)^*$ é o funcional de Dirac, definido em 2.3.1.*

Demonstração. Mostraremos que todos os pontos extremos de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ são da forma $\pm\delta_k$, ou seja, que $Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) \subseteq \{\pm\delta_k\}_{k\in K}$. Seja $A = \overline{conv}^{\omega^*}\{\pm\delta_k\}$. Afirmamos que $A = B_{\mathcal{C}(K)^*}$. De fato, temos que $\{\pm\delta_k\}_{k\in K} \subset B_{\mathcal{C}(K)^*}$, logo $conv\{\pm\delta_k\}_{k\in K} \subseteq conv B_{\mathcal{C}(K)^*}$, mas $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ é convexa, logo $conv B_{\mathcal{C}(K)^*} = B_{\mathcal{C}(K)^*}$, ou seja $conv\{\pm\delta_k\}_{k\in K} \subseteq B_{\mathcal{C}(K)^*}$, assim $\overline{conv}^{\omega^*}\{\pm\delta_k\} \subset \overline{B_{\mathcal{C}(K)^*}}^{\omega^*}$ e pelo teorema de Alaoglu 1.5.5, $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ é fraco estrela compacto. Logo, fraco estrela fechado, então $\overline{conv}^{\omega^*}\{\pm\delta_k\} \subset B_{\mathcal{C}(K)^*}$, isto é, $A \subset B_{\mathcal{C}(K)^*}$.

Agora, provaremos que $B_{\mathcal{C}(K)^*} \subset A$, onde $A = \overline{conv}^{\omega^*}\{\pm\delta_k\}$. Suponha que $B_{\mathcal{C}(K)^*} \not\subset A$, logo existe $F \in B_{\mathcal{C}(K)^*} \setminus A$ e pelo teorema 1.5.7, existe $f \in \mathcal{C}(K)$ tal que $F(f) > \sup\{G(f); G \in A\}$. Sabemos do parágrafo anterior, que $A \subset B_{\mathcal{C}(K)^*}$, logo para todo $G \in A$, $\|G\| \leq 1$. Assim $G(f) \leq |G(f)| \leq \|G\| \cdot \|f\| \leq 1 \cdot \|f\| = \|f\|$, para todo $G \in A$, isto é, existe $\sup\{G(f); G \in A\}$. Seja então $p = \sup\{G(f); G \in A\} > 0$. Tome $g = \dfrac{f}{p} \in \mathcal{C}(K)$, assim $F(g) = F(\dfrac{f}{p}) = \dfrac{1}{p} \cdot F(f) > \dfrac{1}{p} \cdot p = 1$ além disso, $\sup\{G(g); G \in A\} = \sup\{G(\dfrac{f}{p}); G \in A\} = \sup\{\dfrac{1}{p} \cdot G(f); G \in A\} = \dfrac{1}{p} \cdot \sup\{G(f); G \in A\} = \dfrac{1}{p} \cdot p = 1$, assim $\sup\{G(g); G \in A\} = 1$ e $F(g) > 1$. Dessa forma, $\|g\| = \sup_{k\in K}(g(k)) = \sup_{k\in K} \delta_k(g) \leq \sup_{g\in A} G(g) = 1$. Logo, $F(g) \leq |F(g)| \leq \|F\| \cdot \|g\| \leq 1 \cdot 1 = 1$, o que é um absurdo, pois vimos anteriormente que $F(g) > 1$. Portanto $B_{\mathcal{C}(K)^*} \subset A$. Assim $B_{\mathcal{C}(K)^*} = A$.

Dessa forma, pelo Teorema de Milman 3.2.17(b), para topologia fraca estrela, obtemos que $Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) \subset \overline{\{\pm\delta_k\}}^{\omega^*}_{k\in K}$.

Pelo lema 2.3.4, $(\{\delta_k;\ k \in K\}, \omega^*)$ é homeomorfo a K e analogamente provamos que $(\{-\delta_k;\ k \in K\}, \omega^*)$ é homeomorfo a K. Assim $\{\delta_k;\ k \in K\}$ e $\{-\delta_k;\ k \in K\}$ são fraco estrela compactos. Dessa forma $\{\pm\delta_k;\ k \in K\} = \{\delta_k;\ k \in K\} \bigcup \{-\delta_k;\ k \in K\}$ é fraco estrela compacto e portanto fraco estrela fechado. Assim $Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) \subset \{\pm\delta_k;\ k \in K\}$.

Agora, vamos provar que δ_k é um ponto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$, ou seja, $\{\delta_k;\ k \in K\} \subset Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$. Dado $k_0 \in K$, considere a família $\mathcal{V}$ de todas as vizinhanças abertas de $k_0 \in K$. Dado $U \in \mathcal{V}$, pelo Lema de Urysohn 1.2.17, existe $f_U \in B_{\mathcal{C}(K)}$ tal que $f_U(k_0) = 1$ e $f_U = 0$ em $K \setminus U$. Então $H_U = \{F \in \mathcal{C}(K)^*; F(f_U) = 1\}$ é uma variedade suporte fraco estrela fechada de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$.

De fato, temos que $H_U \bigcap B_{\mathcal{C}(K)^*} \neq \emptyset$, pois $\delta_{k_0} \in H_U \bigcap B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Seja $[F, G] \subset B_{\mathcal{C}(K)^*}$ um segmento com ponto interior em H_U ou seja, para $\lambda \in (0, 1)$, $\lambda \cdot F + (1-\lambda) \cdot G \in H_U$. Como $F, G \in B_{\mathcal{C}(K)^*}$, então $\|F\| \leq 1$ e $\|G\| \leq 1$, assim $F(f_U) \leq |F(f_U)| \leq \|F\| \cdot \|f_U\| \leq 1 \cdot 1 = 1$ e analogamente $G(f_U) \leq 1$. Suponha $F(f_U) < 1$, logo $1 = (\lambda \cdot F + (1 - \lambda) \cdot G)(f_U) = \lambda \cdot F(f_U) + (1 - \lambda) \cdot G(f_U) < \lambda + (1 - \lambda) = 1$, absurdo, logo $F(f_U) = 1$. Agora supondo que $G(f_U) < 1$ como $F(f_U) = 1$, vem que $1 = (\lambda \cdot F + (1 - \lambda) \cdot G)(f_U) = \lambda \cdot F(f_U) + (1 - \lambda) \cdot G(f_U) < \lambda + (1 - \lambda) = 1$, absurdo e assim

$G(f_U) = 1$. Para $\alpha \in (0,1)$, vem que $\alpha \cdot F(f_U) + (1-\alpha) \cdot G(f_U) = 1$. Portanto $[F, G] \subset H_U$. Como $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ é convexo, vem que H_U é variedade suporte de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$.

Vamos ver agora que H_U é fraco estrela fechado, ou seja, $H_U = \overline{H_U}^{\omega^*}$. É claro que $H_U \subset \overline{H_U}^{\omega^*}$. Seja então $F \in \overline{H_U}^{\omega^*}$, então existe $(F_i) \subset H_U$ uma rede tal que $F_i \xrightarrow{w^*} F$, ou seja, $F_i(g) \longrightarrow F(g)$ para todo $g \in \mathcal{C}(K)$. Em particular, $F_i(f_U) \longrightarrow F(f_U)$, mas $F_i(f_U) = 1$, para todo i, assim $F(f_U) = 1$, pois é limite de rede constante. Também $F \in \mathcal{C}(K)^*$, já que é limite de funções em $\mathcal{C}(K)^*$. Assim $F \in H_U$. Portanto H_U é fraco estrela fechado.

Defina $H = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} H_U$. Como $\delta_{k_0} \in H_U$, para todo $U \in \mathcal{V}$, vem que $H \neq \emptyset$ e é uma variedade suporte fraco estrela fechada de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. De fato, como H é interseção de conjuntos fraco estrela fechados, então H é fraco estrela fechado. Agora falta verificar que é uma variedade suporte de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Como H é interseção de variedades suporte, então pela proposição 3.2.7, vem que H é um subespaço afim. Temos que $H \bigcap B_{\mathcal{C}(K)^*} \neq \emptyset$, pois $\delta_{k_0} \in H \bigcap B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Seja agora $[F, G] \subset B_{\mathcal{C}(K)^*}$ um segmento com ponto interior em H. Vamos provar que $[F, G] \subset H$. Como $[F, G]$ tem ponto interior em H, então $[F, G]$ tem ponto interior em H_U, para todo $U \in \mathcal{V}$, assim $[F, G] \subset H_U$, para todo $U \in \mathcal{V}$, pois H_U é uma variedade suporte de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Portanto $[F, G] \subset H$. Dessa forma, H é uma variedade suporte de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$.

Sabemos que $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ é convexo e pelo teorema de Alaoglu 1.5.5, $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ é fraco estrela compacto. Como H é uma variedade suporte fraco estrela fechada de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$, então pelo lema 3.2.9 (b), H contém ponto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Mas, como $Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) \subset \{\pm\delta_k;\, k \in K\}$, vem que os candidatos a ponto extremos são $\{\pm\delta_k;\, k \in K\}$.

Agora, para $k \neq k_0$, $\delta_k \notin H$ e $-\delta_k \notin H$. De fato, se $\delta_k \in H$, então $\delta_k \in H_U$, para todo $U \in \mathcal{V}$. Como K é Hausdorff, existem U_1 e U_2 vizinhanças disjuntas de k e k_0 respectivamente. Temos que $f_U(k) = \delta_k(f_U) = 1$ para todo $U \in \mathcal{V}$, pois $\delta_k \in H_U$ para todo $U \in \mathcal{V}$. Em particular, como $U_2 \in \mathcal{V}$, segue que $f_{U_2}(k) = \delta_k(f_{U_2}) = 1$ e $f_{U_2}(K \setminus U_2) = 0$. Mas $k_0 \in K \setminus U_2$, pois $k_0 \in U_1$, com $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$. Assim, $f_{U_2}(k_0) = 0$, o que é um absurdo, já que $k_0 \in H_U$, para todo $U \in \mathcal{V}$ e $U_2 \in \mathcal{V}$ (consequentemente, $f_{U_2}(k_0) = 1$). Logo, $\delta_k \notin H$ se $k \neq k_0$. Agora se $-\delta_k \in H$, então $\delta_k(f_U) = -1$, ou seja, $f_U(k) = -1$, para todo $U \in \mathcal{V}$, mas f_U como definida só assume os valores 0 ou 1. Absurdo. Logo, $-\delta_k \notin H$ se $k \neq k_0$.

Como provamos acima H é uma variedade suporte fraco estrela fechada de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$, logo pelo lema 3.2.9 (b), vem que H contém ponto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Por outro lado, sabemos que os candidatos a ponto extremos de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ são $\{\pm\delta_k;\, k \in K\}$ e como $\delta_{k_0} \in H$, concluímos que $\delta_{k_0} \in Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$. Portanto $\{\delta_k;\, k \in K\} \subset Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$, já que $k_0 \in K$ é arbitrário.

Agora provaremos que se $h \in Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$, então $-h \in Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$. Dessa forma como $\delta_k \in Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$, então vamos mostrar que $-\delta_k \in Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$, ou seja $Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$ é simétrico. Suponha que $-h \notin Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$, logo $-h = \dfrac{h_1 + h_2}{2}$, para $h_1, h_2 \in B_{\mathcal{C}(K)^*}$, então $-h_1, -h_2 \in B_{\mathcal{C}(K)^*}$, logo $\dfrac{-h_1 + (-h_2)}{2} = h$, o que é um absurdo, pois $h \in Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$.

Assim, como $\{\delta_k;\, k \in K\} \subset Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$, vem que $\{-\delta_k;\, k \in K\} \subset Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$. Dessa forma, $\{\pm\delta_k;\, k \in K\} \subset Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*})$. Portanto $Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) = \{\pm\delta_k\}_{k \in k}$. ■

Lema 3.3.2. *Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear bijetora. Se C é um subconjunto convexo de X então $T(Ext(C)) = Ext(T(C))$.*

Demonstração. Vamos provar primeiro que $T(Ext(C)) \subseteq Ext(T(C))$. Isso é equivalente a mostrar que $Y \setminus Ext(T(C)) \subseteq Y \setminus T(Ext(C))$. Seja então, $y \in Y \setminus Ext(T(C))$, logo $y \notin Ext(T(C))$, ou seja, $y = \frac{1}{2}(a+b)$, para $a, b \in T(C)$. Assim, $a = T(a_1)$ e $b = T(b_1)$, com $a_1, b_1, \in C$, logo $y = \frac{1}{2}(T(a_1) + T(b_1))$ e como T é linear, $y = T(\frac{1}{2}(a_1 + b_1))$. Assim $y \notin T(Ext(C))$. Portanto $y \in Y \setminus T(Ext(C))$. Dessa forma $Y \setminus Ext(T(C)) \subseteq Y \setminus T(Ext(C))$. Assim $T(Ext(C)) \subseteq Ext(T(C))$.

Agora, vamos provar que $Ext(T(C)) \subseteq T(Ext(C))$. Isso é equivalente a mostrar que $Y \setminus T(Ext(C)) \subseteq Y \setminus Ext(T(C))$. Seja $y \in Y \setminus T(Ext(C))$, assim, $y \notin T(Ext(C))$, ou seja, y não é imagem de nenhum elemento de $Ext(C)$. Dessa forma, $y = T(x)$, onde $x \notin Ext(C)$, assim $x = \frac{1}{2}(a+b)$, com $a, b \in C$. Logo $y = T(\frac{1}{2}(a+b))$. Como T é linear $y = \frac{1}{2}(T(a) + T(b))$. Portanto $y \notin Ext(T(C))$. Assim $y \in Y \setminus Ext(T(C))$. Logo $Y \setminus T(Ext(C)) \subseteq Y \setminus Ext(T(C))$. Dessa forma $Ext(T(C)) \subseteq T(Ext(C))$.

Portanto $T(Ext(C)) = Ext(T(C))$.

■

Teorema 3.3.3 (Banach- Stone)**.** *Sejam K e L espaços compactos. Então $\mathcal{C}(K)$ é isométrico a $\mathcal{C}(L)$ se e somente se K e L são homeomorfos. Além disso, toda isometria linear $T : \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathcal{C}(L)$ é da forma*

$$T(f)(l) = \varepsilon(l) \cdot (f \circ h)(l),\ l \in L \tag{3.6}$$

onde $h : L \longrightarrow K$ é um homeomorfismo e $\varepsilon : L \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com $|\varepsilon(l)| = 1$ para todo $l \in L$.

Demonstração. Suponha que K e L sejam homeomorfos, então de modo análogo ao teorema 2.3.6, prova-se que $\mathcal{C}(K)$ é isométrico a $\mathcal{C}(L)$, com $\varepsilon(l) = 1$, para todo $l \in L$.

Reciprocamente suponha que T é uma isometria de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$. Considere o adjunto de T:

$$T^* : \mathcal{C}(L)^* \to \mathcal{C}(K)^* \tag{3.7}$$

Pelo teorema 1.3.13, temos que T^* é linear, limitado, isometria e bijeção.

Portanto pelo lema 1.3.10 $T^*(B_{\mathcal{C}(L)^*}) = B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Agora, pelo lema 3.3.2 $T^*(Ext(B_{\mathcal{C}(L)^*})) = Ext(T^*(B_{\mathcal{C}(L)^*})) = Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) = \{\pm\delta_k\}_{k\in K}$, onde a última igualdade se deve ao lema 3.3.1. Novamente pelo lema 3.3.1 temos que $Ext(B_{\mathcal{C}(L)^*}) = \{\pm\delta_l\}_{l\in L}$. Dessa forma, $T^*(\{\pm\delta_l\}_{l\in L}) = \{\pm\delta_k\}_{k\in K}$.

Como T^* é bijeção, para cada $l \in L$, considere δ_l e existe um único $h(l) \in K$, onde $h : L \to K$ e único escalar $\varepsilon(l) = \pm 1$, onde $\varepsilon : L \to \mathbb{R}$ tal que $T^*(\delta_l) = \varepsilon(l) \cdot \delta_{h(l)}$.

Vamos provar que $\varepsilon : L \to \mathbb{R}$, $\varepsilon(l) = \pm 1$ é contínua. Seja, $(l_\alpha) \subset L$ uma rede convergindo a $l \in L$, ou seja, $l_\alpha \longrightarrow l$. Logo $f(l_\alpha) \longrightarrow f(l)$ para todo $f \in \mathcal{C}(L)$, assim $\delta_{l_\alpha}(f) \longrightarrow \delta_l(f)$, para todo $f \in \mathcal{C}(L)$, logo $\delta_{l_\alpha} \xrightarrow{w^*} \delta_l$. Pelo lema 1.5.8, T^* é $\omega^* - \omega^*$ contínua, assim $T^*(\delta_{l_\alpha}) \xrightarrow{w^*} T^*(\delta_l)$, logo vem que $\varepsilon(l_\alpha) \cdot \delta_{h(l_\alpha)} \xrightarrow{w^*} \varepsilon(l) \cdot \delta_{h(l)}$ portanto $\varepsilon(l_\alpha) \cdot \delta_{h(l_\alpha)}(g) \longrightarrow \varepsilon(l) \cdot \delta_{h(l)}(g)$, para todo $g \in \mathcal{C}(K)$. Em particular para $g = 1 \in \mathcal{C}(K)$, $\varepsilon(l_\alpha) \cdot \delta_{h(l_\alpha)}(g) \longrightarrow \varepsilon(l) \cdot \delta_{h(l)}(g)$ implica $\varepsilon(l_\alpha) \longrightarrow \varepsilon(l)$. Portanto ε é contínua e $\delta_{l_\alpha} \xrightarrow{w^*} \delta_l$.

Vamos mostrar que h é contínua. De fato, seja (l_α) uma rede em L tal que $l_\alpha \longrightarrow l$, como $T^*(\delta_{l_\alpha}) \xrightarrow{w^*} T^*(\delta_l)$, vem que $\varepsilon(l_\alpha) \cdot \delta_{h(l_\alpha)} \xrightarrow{w^*} \varepsilon(l) \cdot \delta_{h(l)}$. Por outro lado, sabemos que $\varepsilon(l_\alpha) \longrightarrow \varepsilon(l)$. Assim se $\varepsilon(l) = 1$, então a partir de um certo índice $\varepsilon(l_\alpha) = 1$, logo $\delta_{h(l_\alpha)} \xrightarrow{w^*} \delta_{h(l)}$ e se $\varepsilon(l) = -1$, então a partir de um certo índice $\varepsilon(l_\alpha) = -1$, logo $-\delta_{h(l_\alpha)} \xrightarrow{w^*} -\delta_{h(l)}$, ou seja, $\delta_{h(l_\alpha)} \xrightarrow{w^*} \delta_{h(l)}$. Assim aplicando o lema 2.3.4 vem que $\delta^{-1}(\delta_{h(l_\alpha)}) \xrightarrow{w^*} \delta^{-1}(\delta_{h(l)})$, isto é, $h(l_\alpha) \longrightarrow h(l)$. Portanto h é contínua.

Falta verificar que h é bijetora. Para ver que é sobrejetora, temos que provar que $h(L) = K$. Como é óbvio que $h(L) \subseteq K$, seja então $k \in K$, logo $\delta_k \in Ext(B_{\mathcal{C}(K)^*}) = T^*(Ext(B_{\mathcal{C}(L)^*})$ e como T^* é bijeção, existe um único $l \in k$ tal que $\delta_k = \varepsilon(l) \cdot T^*(\delta_l) = \delta_{h(l)}$. Assim $k = h(l)$. Portanto h é sobrejetora.

Sejam agora, $l_1, l_2 \in K$ tais que $h(l_1) = h(l_2)$. Temos dois casos para analisar:

(a) Se $\varepsilon(l_1) \neq \varepsilon(l_2)$. Como $h(l_1) = h(l_2)$, então pela definição de T^*, $T^*(\delta_{l_1}) = -T^*(\delta_{l_2})$. Temos que T^* é bijeção, logo $\delta_{l_1} + \delta_{l_2} = 0$, isto é $f(l_1) + f(l_2) = 0$ para todo $f \in \mathcal{C}(K)$, em particular para $f = 1$, vem que, $1 = -1$, o que é um absurdo. Logo, não ocorre $\varepsilon(l_1) \neq \varepsilon(l_2)$ quando $h(l_1) = h(l_2)$.

(b) Se $\varepsilon(l_1) = \varepsilon(l_2)$, então $T^*(\delta_{l_1}) = T^*(\delta_{l_2})$, logo pela definição de T^*, $l_1 = l_2$.

Portanto h é injetora. Assim h é bijetora. Dessa forma, como h é uma bijeção contínua e L é compacto, vem que h é um homeomorfismo, como queríamos. Por outro lado, $T(f)(l) = (\delta_l \circ T)(f) = (T^*(\delta_l))(f) = \varepsilon(l) \cdot \delta_{h(l)}(f) = \varepsilon(l) \cdot (f \circ h)(l)$, para todo $l \in L$ e assim $T(f)(l) = \varepsilon(l) \cdot (f \circ h)(l)$. ■

Capítulo 4

O teorema de Banach- Stone para isomorfismos com distorção menor que 2

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é provar o teorema de Amir encontrado em [1] que generaliza o teorema clássico de Banach-Stone. Sejam K e L espaços Hausdorff compactos e $\mathcal{C}(K)$ e $\mathcal{C}(L)$ os espaços de Banach correspondentes das funções reais contínuas de K e L, com a norma do máximo.

O teorema é o seguinte: "Se existe um isomorfismo T de $\mathcal{C}(K)$ em $\mathcal{C}(L)$ e $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 2$, então K e L são homeomorfos". A distorção do isomorfismo T é o valor $\|T\| \cdot \|T^{-1}\|$.

4.2 Exemplos

Suponha que exista um isomorfismo linear T de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$. Se T é uma isometria, então $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| = 1 < 2$, assim pelo teorema de Banach Stone, K e L são homeomorfos. A seguir apresentamos dois exemplos em que o teorema de Amir [1] não é válido, se $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| > 2$.

Exemplo 4.2.1. *Seja X uma sequência de pontos isolados: x_1, x_2, ... com dois pontos de acumulação: $x_{2n} \longrightarrow x^0$ e $x_{2n+1} \longrightarrow x^1$. Seja Y uma sequência de pontos isolados: y_0, y_1, y_2,..., com um ponto de acumulação: $y_n \longrightarrow y$.*

Para $f \in \mathcal{C}(X)$ defina $T(f)$:

$$\begin{cases} T(f)(y_0) = f(x^0) - f(x^1) \\ T(f)(y_{2k}) = f(x_{2k}) - \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)] \\ T(f)(y_{2k+1}) = \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)] + f(x_{2k+1}) \\ T(f)(y) = \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) + f(x^1)] \end{cases}$$

Temos que T é um isomorfismo linear de $\mathcal{C}(X)$ sobre $\mathcal{C}(Y)$, com $\|T\| = 2$ e $\|T^{-1}\| = \frac{3}{2}$.

Demonstração. De fato, primeiro note que X e Y não são homeomorfos, pois X tem dois pontos de acumulação e Y tem um.

Agora note que T está bem definida, ou seja, $T(f) \in \mathcal{C}(Y)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$. De fato, sabemos que toda aplicação em pontos isolados é contínua e portanto $T(f)$ é contínua nos pontos isolados. Agora, veremos que $T(f)$ é contínua em y. Como y é ponto de acumulação de Y, suponha sem perda de generalidade que $y_n \longrightarrow y$. Vamos mostrar que $T(f)(y_n) \longrightarrow T(f)(y)$.

Se $n = 2k$, então $T(f)(y_{2k}) = f(x_{2k}) - \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)]$. Como $f \in \mathcal{C}(X)$ e $x_{2k} \longrightarrow x^0$, então $f(x_{2k}) \longrightarrow f(x^0)$, logo $T(f)(y_{2k}) \longrightarrow f(x^0) - \frac{1}{2} \cdot f(x^0) + \frac{1}{2} \cdot f(x^1) = \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) + f(x^1)] = T(f)(y)$, assim $T(f)(y_{2k}) \longrightarrow T(f)(y)$.

Se $n = 2k+1$, então $T(f)(y_{2k+1}) = \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)] + f(x_{2k+1})$. Como $f \in \mathcal{C}(X)$ e $x_{2k+1} \longrightarrow x^1$, então $f(x_{2k+1}) \longrightarrow f(x^1)$, logo $T(f)(y_{2k+1}) \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot f(x^0) - \frac{1}{2} \cdot f(x^1) + f(x^1)$, assim $T(f)(y_{2k+1}) \longrightarrow T(f)(y)$.

Portanto $T(f)(y_n) \longrightarrow T(f)(y)$. Logo $T(f)$ é contínua.

Vamos, verificar que T é linear. Sejam $f, g \in \mathcal{C}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, assim:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot f + g)(y_0) = (\lambda \cdot f + g)(x^0) - (\lambda \cdot f + g)(x^1) = (\lambda \cdot f)(x^0) + g(x^0) - (\lambda \cdot f)(x^1) - g(x^1) = \\ \lambda \cdot (f(x^0) - f(x^1)) + (g(x^0) - g(x^1)) = \lambda \cdot T(f)(y_0) + T(g)(y_0). \end{aligned}$$

De modo analógo, provamos que $T(\lambda \cdot f + g)(y_{2k}) = \lambda \cdot T(f)(y_{2k}) + T(g)(y_{2k})$, $T(\lambda \cdot f + g)(y_{2k+1}) = \lambda \cdot T(f)(y_{2k+1}) + T(g)(y_{2k+1})$ e $T(\lambda \cdot f + g)(y) = \lambda \cdot T(f)(y) + T(g)(y)$. Dessa forma, temos que T é linear.

Agora, vamos verificar que T é injetora, isto é, que $kerT = \{0\}$. Seja $f \in kerT$, logo $T(f) = 0$, assim

$$\begin{cases} f(x^0) - f(x^1) = 0 \\ f(x_{2k}) - \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)] = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)] + f(x_{2k+1}) = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) + f(x^1)] = 0 \end{cases} \text{implica que} \begin{cases} f(x^0) = 0 \\ f(x^1) = 0 \\ f(x_{2k}) = 0 \\ f(x_{2k+1}) = 0 \end{cases}$$

ou seja, $f = 0$. Portanto $kerT = \{0\}$.

Também T é sobrejetora. De fato, é óbvio que $T(\mathcal{C}(X)) \subseteq \mathcal{C}(Y)$, agora resta mostrar que $\mathcal{C}(Y) \subseteq T(\mathcal{C}(X))$. Seja, então $g \in \mathcal{C}(Y)$, queremos $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $T(f) = g$, ou seja,

$$\begin{cases} T(f)(y_0) = g(y_0) \\ T(f)(y_{2k}) = g(y_{2k}) \\ T(f)(y_{2k+1}) = g(y_{2k+1}) \\ T(f)(y) = g(y) \end{cases} \text{implica que} \begin{cases} f(x_{2k}) = g(y_{2k}) + \frac{1}{2} \cdot g(y_0) \\ f(x_{2k+1}) = g(y_{2k+1}) - \frac{1}{2} \cdot g(y_0) \\ f(x^0) = \frac{1}{2} \cdot g(y_0) + g(y) \\ f(x^1) = g(y) - \frac{1}{2} g(y_0). \end{cases}$$

Agora, vamos mostrar que $f \in \mathcal{C}(X)$. Sabemos que toda aplicação em pontos isolados é contínua, assim falta verificar que f é contínua nos pontos de acumulação x^0 e x^1. Sabemos que $x_{2k} \longrightarrow x^0$ e $x_{2k+1} \longrightarrow x^1$. Sem perda de generalidade, provemos que $f(x_{2k}) \longrightarrow f(x^0)$ e $f(x_{2k+1}) \longrightarrow f(x^1)$.

Como $g \in \mathcal{C}(Y)$ e $y_{2k} \longrightarrow y$, então $g(y_{2k}) \longrightarrow g(y)$. Dessa forma, como $f(x_{2k}) = g(y_{2k}) + \frac{1}{2} \cdot g(y_0)$, vem que $f(x_{2k}) \longrightarrow g(y) + \frac{1}{2} \cdot g(y_0)$, assim $f(x_{2k}) \longrightarrow f(x^0)$.

Da mesma forma como, $g \in \mathcal{C}(Y)$ e $y_{2k+1} \longrightarrow y$, assim, $g(y_{2k+1}) \longrightarrow g(y)$. Logo, sabendo que $f(x_{2k+1}) = g(y_{2k+1}) - \frac{1}{2} \cdot g(y_0)$, temos $f(x_{2k+1}) \longrightarrow g(y) - \frac{1}{2} \cdot g(y_0)$, ou seja, $f(x_{2k+1}) \longrightarrow f(x^1)$.

Assim $f \in \mathcal{C}(X)$. Portanto T é sobrejetora e

$$\begin{cases} T^{-1}(g)(x_{2k}) = g(y_{2k}) + \frac{1}{2} \cdot g(y_0) \\ T^{-1}(g)(x_{2k+1}) = g(y_{2k+1}) - \frac{1}{2} \cdot g(y_0) \\ T^{-1}(g)(x^0) = \frac{1}{2} \cdot g(y_0) + g(y) \\ T^{-1}(g)(x^1) = g(y) - \frac{1}{2} g(y_0). \end{cases}$$

Dessa forma, T é um isomorfismo linear. Agora, vamos provar que $\|T\| = 2$. Sabemos que, $\|T\| = \sup\{\|T(f)\|\,;\ \|f\| \leq 1\}$, onde $\|T(f)\| = \sup\{|T(f)(y)|\,;\ y \in Y\} = |T(f)(y_j)|$, para algum j, pois Y é compacto. Assim, como

$$|T(f)(y_0)| = \left|f(x^0) - f(x^1)\right| \leq \left|f(x^0)\right| + \left|f(x^1)\right| \leq \|f\| + \|f\| = 2 \cdot \|f\|\,;$$

$$|T(f)(y_{2k})| = \left|f(x_{2k}) - \frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)]\right| \leq |f(x_{2k})| + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \|f\| \leq 2 \cdot \|f\|\,;$$

$$|T(f)(y_{2k+1})| = \left|\frac{1}{2} \cdot [f(x^0) - f(x^1)]\right| \leq 2 \cdot \|f\|\,;\text{e}$$

$$|T(f)(y)| = \left|\frac{1}{2} \cdot [f(x^0) + f(x^1)]\right| \leq 2 \cdot \|f\|\,.$$

Vem que $\|T\| \leq 2$ e tomando $f \in \mathcal{C}(X)$ definida, por $f(x^0) = 1$, $f(x^1) = -1$, $f(x_{2k}) = 1$ e $f(x_{2k+1}) = -1$, temos que $\|T(f)\| = 2$ e portanto $\|T\| = 2$, como queríamos.

Finalmente, vamos verificar que $\left\|T^{-1}\right\| = \frac{3}{2}$. Dessa forma, utilizando a inversa encontrada, quando provamos que T é sobrejetora, temos que

$$\left|T^{-1}(g)(x^0)\right| = \left|\frac{1}{2} \cdot g(y_0) + g(y)\right| \leq \frac{1}{2} \cdot |g(y_0)| + |g(y)| \leq \frac{1}{2} \cdot \|g\| + \|g\| = \frac{3}{2} \cdot \|g\|\,;$$

$$\left|T^{-1}(g)(x^1)\right| = \left|g(y) - \frac{1}{2} \cdot g(y_0)\right| \leq |g(y)| + \frac{1}{2} \cdot |g(y_0)| \leq \|g\| + \frac{1}{2} \cdot \|g\| = \frac{3}{2} \cdot \|g\|\,;$$

$$\left|T^{-1}(g)(x_{2k})\right| = \left|g(y_{2k}) + \frac{1}{2} \cdot g(y_0)\right| \leq |g(y_{2k})| + \frac{1}{2} \cdot |g(y_0)| \leq \|g\| + \frac{1}{2} \cdot \|g\| = \frac{3}{2} \cdot \|g\|\,;$$

$$\left|T^{-1}(g)(x_{2k+1})\right| = \left|g(y_{2k+1}) - \frac{1}{2} \cdot g(y_0)\right| \leq |g(y_{2k+1})| + \frac{1}{2} \cdot |g(y_0)| \leq \|g\| + \frac{1}{2} \cdot \|g\| = \frac{3}{2} \cdot \|g\|\,.$$

Assim, $\left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{3}{2}$ e tomando $g \in \mathcal{C}(Y)$ definida, por $g \equiv 1$, obtemos $\left\|T^{-1}\right\| = \frac{3}{2}$ ■

Agora apresentaremos mais um exemplo onde o teorema de Amir [1] não é válido se $\|T\| \cdot \left\|T^{-1}\right\| = 2$.

Exemplo 4.2.2. *Seja X o intervalo unitário $[0,1]$. Seja Y o círculo unitário $\{e^{2\pi i x}; 0 \leq x < 1\}$ mais o ponto isolado 0. Para $f \in \mathcal{C}(X)$ defina $T(f)$:*

$$\begin{cases} T(f)(0) = f(1) - f(0) \\ T(f)(e^{2\pi i x}) = f(x) + (\frac{1}{2} - x) \cdot [f(1) - f(0)] \end{cases}$$

Temos que T é um isomorfismo de $\mathcal{C}(X)$ sobre $\mathcal{C}(Y)$, tal que $\|T\| = 2$ e $\left\|T^{-1}\right\| = \frac{3}{2}$.

Demonstração. De fato, primeiro note que, como X é um intervalo da reta, então X é conexo. A prova desta afirmação pode ser encontrado em [21], página 96.

Assim se Y fosse homeomorfo a X, então Y seria conexo. Mas Y não é conexo, logo X e Y não são homeomorfos.

Agora vamos verificar que T está bem definida, ou seja, que $T(f) \in \mathcal{C}(Y)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$. Seja $(y_n) \subseteq Y$ uma sequência tal que $y_n \longrightarrow y$ com $y \in Y$. Provemos que $T(f)(y_n) \longrightarrow T(f)(y)$.

Se $y = 0$, então $y_n = 0$ a partir de um certo índice n, logo $T(f)(y_n) \longrightarrow T(f)(y)$. Suponha então que $y \neq 0$. Temos que $y_n = e^{2\pi i x_n} = \cos(2\pi x_n) + i \cdot \sin(2\pi x_n)$ e $y = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \cdot \sin(2\pi x)$. Como, $y_n \longrightarrow y$, então $e^{2\pi i x_n} \longrightarrow e^{2\pi i x}$ se e somente se $\cos(2\pi x_n) \longrightarrow \cos(2\pi x)$ e $\sin(2\pi x_n) \longrightarrow \sin(2\pi x)$. Para $x \in [0, \frac{1}{2})$ considere $\operatorname{arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ e para $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, tome $\overline{\operatorname{arccos}} : [-1, 1] \longrightarrow [\pi, 2\pi]$. Assim, $2\pi x_n \longrightarrow 2\pi x$, logo $x_n \longrightarrow x$. Como $f \in \mathcal{C}(X)$, vem que é contínua, logo $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, assim $T(f)(e^{2\pi i x_n}) \longrightarrow T(f)(e^{2\pi i x})$, como queríamos. Portanto, $T(f) \in \mathcal{C}(Y)$.

Provemos que T é linear. Sejam $f, g \in \mathcal{C}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, logo:

$$T(\lambda \cdot f + g)(0) = (\lambda \cdot f + g)(1) - (\lambda \cdot f + g)(0) = \lambda[f(1) - f(0)] + [g(1) - g(0)] = \lambda T(f)(0) + T(g)(0)$$

$$T(\lambda f + g)(e^{2\pi i x}) = (\lambda f + g)(x) + (\frac{1}{2} - x)[(\lambda f + g)(1) - (\lambda f + g)(0)] = \lambda T(f)(e^{2\pi i x}) + T(g)(e^{2\pi i x}).$$

Dessa forma T é linear.

Temos que T é injetora. De fato, seja $f \in \ker T$, logo $T(f) = 0$, então $T(f)(0) = 0$ e $T(f)(e^{2\pi i x}) = 0$, assim

$$\begin{cases} f(1) - f(0) = 0 \\ f(x) + (\frac{1}{2} - x) \cdot [f(1) - f(0)] = 0 \end{cases}$$

A partir das equações acima vemos que $f(x) = 0$, para todo $x \in (0, 1)$. Agora, como $f \in \mathcal{C}(X)$, então $f(x) = 0$, para todo $x \in \overline{(0, 1)} = [0, 1]$. Assim $f = 0$, isto é, T é injetora.

Além disso, T é sobrejetora, ou seja, $T(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{C}(Y)$. De fato, é óbvio que $T(\mathcal{C}(X)) \subseteq \mathcal{C}(Y)$. Seja agora $g \in \mathcal{C}(Y)$, vamos provar que existe $f \in \mathcal{C}(X)$, tal que $T(f) = g$. Dessa forma:

$$\begin{cases} T(f)(0) = g(0) \\ T(f)(e^{2\pi i x}) = g(e^{2\pi i x}) \end{cases} \text{implica que} \begin{cases} f(1) - f(0) = g(0) \\ f(x) + (\frac{1}{2} - x) \cdot [f(1) - f(0)] = g(e^{2\pi i x}) \end{cases}$$

e assim obtemos

$$\begin{cases} T^{-1}(g)(0) = g(1) - \frac{1}{2} g(0) \\ T^{-1}(g)(x) = g(e^{2\pi i x}) - (\frac{1}{2} - x) g(0) \\ T^{-1}(g)(1) = g(1) + \frac{1}{2} g(0). \end{cases}$$

Além disso, temos que $T^{-1}(g)$ é contínua. De fato, seja $(x_n) \in X$ uma sequência tal que $x_n \longrightarrow x$, com $x \in X$. Dessa forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, $e^{2\pi i x_n} = \cos(2\pi x_n) + i \cdot \sin(2\pi x_n)$ e $e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \cdot \sin(2\pi x)$. Como $x_n \longrightarrow x$ então $2\pi x_n \longrightarrow 2\pi x$ e como as funções seno e cosseno são contínuas vem que $\cos(2\pi x_n) \longrightarrow \cos(2\pi x)$ e $\sin(2\pi x_n) \longrightarrow \sin(2\pi x)$. Assim $e^{2\pi i x_n} \longrightarrow e^{2\pi i x}$ e como g é contínua, vem que $g(e^{2\pi i x_n}) \longrightarrow g(e^{2\pi i x})$.

Por outro lado como $x_n \longrightarrow x$, concluímos que $-(\frac{1}{2} - x_n) \cdot g(0) \longrightarrow -(\frac{1}{2} - x) \cdot g(0)$. Logo $T^{-1}(g)(x_n) \longrightarrow T^{-1}(g)(x)$. Portanto $\mathcal{C}(Y) \subseteq T(\mathcal{C}(X))$.

Agora veremos que $\|T\| = 2$. Temos que:

$$|T(f)(0)| = |f(1) - f(0)| \leq |f(1)| - |f(0)| \leq \|f\| + \|f\| = 2\,\|f\|\,;$$

$$\left|T(f)(e^{2\pi ix})\right| = \left|f(x) + (\frac{1}{2} - x)[f(1) - f(0)]\right| \leq \|f\| + \frac{1}{2} \cdot 2\,\|f\| = 2\,\|f\|\,.$$

Logo, $\|T\| \leq 2$. Tome, agora $f \in \mathcal{C}(X)$ definida por $f(x) = 2x - 1$. Assim, obtemos que $\|T(f)\| = 2$ e portanto $\|T\| = 2$, como queríamos.

Finalmente, $\left\|T^{-1}\right\| = \frac{3}{2}$. De fato,

$$\left|T^{-1}(g)(x)\right| = \left|g(\varepsilon^{2\pi ix}) - (\frac{1}{2} - x)g(0)\right| \leq \|g\| + \frac{1}{2}\,\|g\| = \frac{3}{2}\,\|g\|\,;$$

$$\left|T^{-1}(g)(1)\right| = \left|g(1) + \frac{1}{2}g(0)\right| \leq \|g\| + \frac{1}{2}\,\|g\| = \frac{3}{2}\,\|g\|\,;$$

$$\left|T^{-1}(g)(0)\right| = \left|g(1) - \frac{1}{2}g(0)\right| \leq \|g\| + \frac{1}{2}\,\|g\| = \frac{3}{2}\,\|g\|\,.$$

Dessa forma, $\left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{3}{2}$. Tome, agora $g \in \mathcal{C}(Y)$, definido, por $g(0) = 1$, $g(e^{2\pi ix}) = 1 - x$. Assim obtemos que $\left\|T^{-1}(g)\right\| = \frac{3}{2}$ e assim $\left\|T^{-1}\right\| = \frac{3}{2}$, como queríamos. ■

Somente em 1975 foi dado um exemplo onde o teorema de Banach- Stone não vale para distorção igual a dois. Este exemplo foi dado por Cohen [10]. O exemplo é o seguinte:

Exemplo 4.2.3. *(Cohen [10]) Seja $I = [0, 1]$ e considere os seguintes homeomorfismos com domínio I: a, $\overline{a}$, b, $\overline{b}$, c, $\overline{c}$, d, $\overline{d}$. Seja A, B, C, D espaços Hausdorff compactos arbitrários com os pontos distintos P_A, P_B, P_C, P_D respectivamente. Assuma que estes 12 espaços $a[I]$, $\overline{a}[I]$, $b[I]$, $\overline{b}[I]$, $c[I]$, $\overline{c}[I]$, $d[I]$, $\overline{d}[I]$, A, B são dois a dois disjuntos.*

Defina Y como a união disjunta dos espaços $a[I]$, $b[I]$, $c[I]$, $d[I]$, A, B, C, D com as seguintes identificações: $a(0) = b(0)$, $c(0) = d(0)$, $a(1) = P_A$, $b(1) = P_B$, $c(1) = P_C$, $d(1) = P_D$.

Defina X como a união disjunta de $\overline{a}[I]$, $\overline{b}[I]$, $\overline{c}[I]$, $\overline{d}[I]$, A, B, C, D com as seguintes identificações: $\overline{a}(0) = \overline{c}(0)$, $\overline{b}(0) = \overline{d}(0)$, $\overline{a}(1) = P_A$, $\overline{b}(1) = P_B$, $\overline{c}(1) = P_C$, $\overline{d}(1) = P_D$.

Para escolha adequada de A, B, C e D, X e Y não são homeomorfos.

Defina $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ como segue. Seja $f \in \mathcal{C}(X)$.

$$\begin{cases} T(f)(a(t)) = (1+t)f(\overline{a}(t)) - (1-t)f(\overline{d}(t)) & 0 \leq t \leq 1 \\ T(f)(d(t)) = (1-t)f(\overline{a}(t)) + (1+t)f(\overline{d}(t)) & 0 \leq t \leq 1 \\ T(f)(b(t)) = -(1+t)f(\overline{b}(t)) + (1-t)f(\overline{c}(t)) & 0 \leq t \leq 1 \\ T(f)(c(t)) = (1-t)f(\overline{b}(t)) + (1+t)f(\overline{c}(t)) & 0 \leq t \leq 1 \\ T(f)(z) = 2 \cdot f(z) & z \in A \bigcup C \bigcup D \\ T(f)(z) = -2 \cdot f(z) & z \in B \end{cases}$$

Temos que em cada um dos oito espaços $a[I]$, $b[I]$, $c[I]$, $d[I]$, A, B, C e D, $T(f)$ é contínua e $T(f)$ é consistente com as identificações que define Y a partir destes espaços. Dessa forma, $T(f) \in \mathcal{C}(Y)$, e T está bem definida. Além disso, T é linear e $\|T\| = 2$.

Defina agora $F : \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ como segue. Seja $g \in \mathcal{C}(Y)$ e $D(t) = (1{+}t)^2{+}(1{-}t)^2 = 2(1{+}t^2)$.

$$\begin{cases} F(g)(\overline{a}(t)) = \dfrac{(1+t)}{D(t)} g(a(t)) + \dfrac{(1-t)}{D(t)} g(d(t)) & 0 \le t \le 1 \\ F(g)(\overline{d}(t)) = -\dfrac{(1-t)}{D(t)} g(a(t)) + \dfrac{(1+t)}{D(t)} g(d(t)) & 0 \le t \le 1 \\ F(g)(\overline{b}(t)) = -\dfrac{(1+t)}{D(t)} g(b(t)) + \dfrac{(1-t)}{D(t)} g(c(t)) & 0 \le t \le 1 \\ F(g)(\overline{c}(t)) = \dfrac{(1-t)}{D(t)} g(b(t)) + \dfrac{(1+t)}{D(t)} g(c(t)) & 0 \le t \le 1 \\ F(g)(v) = \dfrac{1}{2} \cdot g(v) & v \in A \bigcup C \bigcup D \\ F(g)(z) = -\dfrac{1}{2} \cdot g(v) & v \in B \end{cases}$$

A função $F(g)$ está bem definida e é contínua. Portanto F está bem definida e é linear. Como $\frac{2}{D(t)} = \frac{1}{1+t^2} \le 1$, vem que $\|F\| = 1$.

Finalmente podemos checar que T e F são transformações mutuamente inversas.

4.3 O teorema

Nesta seção, vamos demonstrar o teorema principal do artigo [1]. Começaremos com alguns lemas que são necessários à demonstração do teorema.

Definição 4.3.1. *Seja K espaço Hausdorff compacto. Defina $\mathcal{C}_+(K) = \{f \in \mathcal{C}(K);\ f \ge 0,\ \|f\| = 1\}$.*

Lema 4.3.2. *Sejam K e L espaços Hausdorff compactos e T um isomorfismo linear de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$. Denote $\|T\| = \alpha$ e $\left\|T^{-1}\right\| = \beta$ e assuma que $\alpha \cdot \beta < 2$. Então existe um isomorfismo φ de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$ satisfazendo:*

(a) $\|\varphi\| = \alpha$;

(b) $\left\|\varphi^{-1}\right\| = \beta$;

(c) $\varphi(1)(y) \ge \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$, *para todo* $y \in L$;

(d) *Para cada* $f \in \mathcal{C}_+(K)$ *existe algum* $y \in L$ *tal que* $\varphi(f)(y) \ge \frac{1}{\beta}$;

(e) $\varphi^{-1}(1)(x) \ge \beta \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$, *para todo* $x \in K$;

(f) *Para cada* $g \in \mathcal{C}_+(L)$, *existe algum* $x \in K$ *tal que* $\varphi^{-1}(g)(x) \ge \frac{1}{\alpha}$.

Demonstração. **(a)** Seja $y_0 \in L$ e $t = T(1)(y_0)$. Se $|t| < \alpha$, tome $0 < \varepsilon < \alpha - |t|$. Como $T(1)$ é contínua, existe uma vizinhança N de $y_0 \in L$, em que $|T(1)(y) - t| < \varepsilon$ para todo $y \in N$. Como L é compacto e N é aberto então $L \backslash N$ é fechado. Logo pelo Lema de Urysohn, existe $g \in \mathcal{C}_+(L)$ tal que $g(L \setminus N) = 0$ e $g(y_0) = 1$. Considere as funções: $G_1(y) = T(1)(y) + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot g(y)$ e $G_2(y) = T(1)(y) - (\alpha + t - \varepsilon) \cdot g(y)$.

Vamos provar que $|G_i(y)| \leq \alpha$, para todo $y \in L$ e $i = 1, 2$. Isso é claro para $y \in L \setminus N$, já que $g(y) = 0$ e $T(1)(y) \leq |T(1)(y)| \leq \|T(1)\| \leq \|T\| = \alpha$. Resta provar que vale a afirmação para $y \in N$. Provar que $|G_i(y)| \leq \alpha$ é equivalente a mostrar que $-\alpha \leq G_i(y) \leq \alpha$.

Começaremos provando que $G_1(y) \leq \alpha$. Assim:

$$G_1(y) = T(1)(y) + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot g(y) \leq T(1)(y) + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot |g(y)| \leq$$
$$T(1)(y) + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot \|g\| \leq T(1)(y) + (\alpha - t - \varepsilon) \leq |T(1)(y) - t| + \alpha - \varepsilon \leq \varepsilon + \alpha - \varepsilon = \alpha$$

como queríamos. Agora vamos provar que $G_1(y) \geq -\alpha$, e isto é equivalente a $\alpha \geq -G_1(y)$. Dessa forma

$$-G_1(y) = -T(1)(y) - (\alpha - t - \varepsilon) \cdot g(y) = -T(1)(y) + (-\alpha + t + \varepsilon) \cdot g(y) \leq$$
$$-T(1)(y) + (-\alpha + t + \varepsilon) \cdot |g(y)| \leq -T(1)(y) + (-\alpha + t + \varepsilon) \cdot \|g\| \leq$$
$$-T(1)(y) + (-\alpha + t + \varepsilon) \leq |-T(1)(y) + t| - \alpha + \varepsilon = |T(1)(y) - t| - \alpha + \varepsilon \leq \varepsilon - \alpha + \varepsilon < \alpha$$

onde $\varepsilon - \alpha + \varepsilon < \alpha$ se e somente se $2\varepsilon < 2\alpha$ se e somente se $\varepsilon < \alpha$ e sabemos que $\varepsilon < \alpha - |t| < \alpha$. Portanto, $|G_1(y)| \leq \alpha$, para todo $y \in L$. De modo análogo, prova-se que $|G_2(y)| \leq \alpha$, para $y \in N$. Dessa forma $|G_i(y)| \leq \alpha$, para todo $y \in L$ e $i = 1, 2$.

Dessa forma, $\left\|T^{-1}(G_i)\right\| \leq \alpha \cdot \beta$, para $i = 1, 2$, já que $\left\|T^{-1}\right\| = \beta$.

Para algum $x_0 \in K$, temos $\left|T^{-1}(g)(x_0)\right| \geq \frac{1}{\alpha}$. De fato, suponha que para todo $x \in K$, $\left|T^{-1}(g)(x)\right| < \frac{1}{\alpha}$. Mas $\|T\| = \alpha$, logo $\|T\| \cdot \left|T^{-1}(g)(x)\right| < 1$, então $1 = \|g\| = \left\|T \circ T^{-1}(g)\right\| \leq \|T\| \cdot \left\|T^{-1}(g)\right\| = \|T\| \cdot \left|T^{-1}(g)(x)\right|$ para algum $x \in K$, logo $1 \leq \|T\| \cdot \left|T^{-1}(g)(x)\right| < \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, o que é um absurdo. Portanto para algum $x_0 \in K$, temos $\left|T^{-1}(g)(x_0)\right| \geq \frac{1}{\alpha}$.

Como $\left|T^{-1}(g)(x_0)\right| \geq \frac{1}{\alpha}$, então $T^{-1}(g)(x_0) \geq \frac{1}{\alpha}$ ou $T^{-1}(g)(x_0) \leq -\frac{1}{\alpha}$. Vamos analisar cada caso. Se $T^{-1}(g)(x_0) \geq \frac{1}{\alpha}$, então como $\left\|T^{-1}(G_1)\right\| \leq \alpha \cdot \beta$, vem que $\alpha \cdot \beta \geq T^{-1}(G_1)(x_0) = T^{-1}(T(1) + (\alpha - t - \varepsilon)g)(x_0) = T^{-1}(T(1))(x_0) + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot T^{-1}(g)(x_0) = 1 + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot T^1(g)(x_0) \geq 1 + \frac{1}{\alpha}(\alpha - t - \varepsilon)$. Assim $\alpha \cdot \beta \geq 1 + \frac{1}{\alpha}(\alpha - t - \varepsilon)$ e isso implica que $t \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta) - \varepsilon$.

Se $T^{-1}(g)(x_0) \leq -\frac{1}{\alpha}$, então de modo análogo ao caso anterior, provamos que valem, $\alpha\beta \geq T^{-1}(G_2)(x_0) \geq 1 + \frac{1}{\alpha}(\alpha + t - \varepsilon)$ e $t \leq -\alpha(2 - \alpha\beta) + \varepsilon$.

Assim, temos que $|t| \geq \alpha(2 - \alpha\beta) - \varepsilon$ e como ε é arbitrariamente pequeno e $t = T(1)(y_0)$, vem que

$$|T(1)(y_0)| \geq \alpha(2 - \alpha\beta) \tag{4.1}$$

Observe que a desigualdade 4.1 é válida também quando, $|T(1)(y_0)| = \alpha$. De fato, vamos provar que $\alpha \geq \alpha(2 - \alpha \cdot \beta)$. Como $\alpha \cdot \beta \geq 1$, então $-\alpha \cdot \beta \leq -1$, logo $\alpha(2 - \alpha \cdot \beta) \leq \alpha(2 - 1) = \alpha$, como queríamos. Portanto, como $y_0 \in L$ é qualquer, a desigualdade 4.1, vale para todo $y \in L$, ou seja

$$|T(1)(y)| \geq \alpha(2 - \alpha\beta) \text{ para todo } y \in L. \tag{4.2}$$

Vamos provar que o conjunto $A = \{y \in L; T(1)(y) > 0\}$ é aberto e fechado em L. De fato, temos que A é a imagem inversa de um aberto por uma função contínua, logo A é aberto em L. Por outro lado, vamos verificar de A é fechado em L, ou seja, que $\overline{A} = A$. Como $A \subset \overline{A}$, basta provar que $\overline{A} \subset A$. Seja $k \in \overline{A}$, então existe rede $(k_i) \subset A$ tal que $k_i \longrightarrow k$ e como $T(1)$ é contínua, $T(1)(k_i) \longrightarrow T(1)(k)$. Sabemos que $k_i \in A$ para todo i, logo $T(1)(k_i) > 0$, assim $T(1)(k) \geq 0$. Como $\alpha \cdot \beta < 2$, então $2 - \alpha \cdot \beta > 0$, assim $\alpha(2 - \alpha \cdot \beta) > 0$ e então, por 4.2, $|T(1)(y)| \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta) > 0$ para todo $y \in L$. Assim $|T(1)(y)| > 0$ implica $T(1)(y) \neq 0$. Portanto, $k \in A$. Assim A é fechado em L.

Seja $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$ a função característica de A. Defina $\varphi : \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathcal{C}(L)$, por $\varphi(f) = (2 \cdot \chi_A - 1) \cdot T(f)$. Temos que $\varphi(f)$ está bem definida, pois $\varphi(f) \in \mathcal{C}(L)$, para todo $f \in \mathcal{C}(K)$. De fato, sabemos que $T(f) \in \mathcal{C}(L)$, agora vamos verificar que χ_A é contínua. Pelo teorema 1.2.20 sabemos que a função característica de A é descontínua nos pontos de fronteira de A, ou seja, em δA. Agora como A é aberto e fechado, então sua fronteira é vazia. Portanto χ_A é contínua. Assim $2 \cdot \chi_A - 1$ é contínua e dessa forma $\varphi(f) \in \mathcal{C}(L)$, como queríamos.

Agora vamos provar que φ é um isomorfismo de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$. De fato, vamos começar com a linearidade de φ. Sejam $f, g \in \mathcal{C}(K)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo

$$\varphi(\lambda \cdot f + g) = (2 \cdot \chi_A - 1) \cdot T(\lambda \cdot f + g) = (2 \cdot \chi_A - 1) \cdot [\lambda \cdot T(f) + T(g)] =$$
$$\lambda \cdot (2 \cdot \chi_A - 1) \cdot T(f) + (2 \cdot \chi_A - 1) \cdot T(g) = \lambda \cdot \varphi(f) + \varphi(g)$$

como queríamos. Para provar a injetividade, mostraremos que $\ker \varphi = \{0\}$. Seja $f \in \ker \varphi$, logo $\varphi(f) = 0$, então $(2 \cdot \chi_A - 1) \cdot T(f) = 0$ e como $2 \cdot \chi_A - 1 \neq 0$, vem que $T(f) = 0$, logo $f = 0$, pois T é injetora. Assim, φ é injetora. Finalmente, veremos que φ é sobrejetora, ou seja, que $\varphi(\mathcal{C}(K)) = \mathcal{C}(L)$. Como é óbvio que $\varphi(\mathcal{C}(K)) \subset \mathcal{C}(L)$, basta verificar que $\mathcal{C}(L) \subset \varphi(\mathcal{C}(K))$. Seja $h \in \mathcal{C}(L)$. Tome $f = T^{-1}\left(\dfrac{h}{(2 \cdot \chi_A - 1)}\right) \in \mathcal{C}(K)$.Também $\varphi(f) = h$. Assim $\mathcal{C}(L) \subset \varphi(\mathcal{C}(K))$. Portanto φ é sobrejetora. Dessa forma, φ é isomorfismo linear.

Agora, vamos mostrar que $\|\varphi\| = \alpha$. Sabemos que para cada $x \in L$, $\varphi(f)(x) = \begin{cases} T(f)(x) & \text{se } x \in A \\ -T(f)(x) & \text{se } x \notin A \end{cases}$

logo $|\varphi(f)(x)| = |T(f)(x)|$, então $\|\varphi(f)\| = \|T(f)\|$. Assim $\|\varphi\| = \|T\| = \alpha$. Portanto $\|\varphi\| = \alpha$.

(b) Através de uma construção semelhante à do item (a), provamos que $\left\|\varphi^{-1}\right\| = \beta$.

(c) Provaremos agora que $\varphi(1)(y) \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$, para cada $y \in L$. Sabemos que $\varphi(1)(y) = \begin{cases} T(1)(y) & \text{se } y \in A \\ -T(1)(y) & \text{se } y \notin A \end{cases}$ ou seja, $|\varphi(1)(y)| = |T(1)(y)|$ e como pela desigualdade 4.2 temos que $|T(1)(y)| \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$, assim $T(1)(y) \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$ ou $T(1)(y) \leq -\alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$. Logo $T(1)(y) \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$ ou $-T(1)(y) \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$. Dessa forma $\varphi(1)(y) \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$.

(d) Vamos provar que, para cada $f \in \mathcal{C}_+(K)$, existe algum $y \in L$ tal que $\varphi(f)(y) \geq \frac{1}{\beta}$. Se $f \in \mathcal{C}_+(K)$, então $|\varphi(1)(y) - 2 \cdot \varphi(f)(y)| = |\varphi(1-2f)(y)| \leq \alpha$, para todo $y \in L$. De fato, $|\varphi(1-2f)(y)| \leq \|\varphi(1-2f)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|1 - 2 \cdot f\| \leq \alpha \cdot 1 = \alpha$, pois como $f \in \mathcal{C}_+(K)$, então $0 \leq f \leq 1$, logo $1 \geq 1 - 2 \cdot f \geq -1$, assim $\|1 - 2 \cdot f\| \leq 1$.

Portanto, $\varphi(f)(y) \geq \frac{1}{2} \cdot (\varphi(1)(y) - \alpha) \geq \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta)$. De fato, temos que $\varphi(1)(y) - 2 \cdot \varphi(f)(y) \leq |\varphi(1)(y) - 2 \cdot \varphi(f)(y)| \leq \alpha$. Assim $-2 \cdot \varphi(f)(y) \leq \alpha - \varphi(1)(y)$, então $\varphi(f)(y) \geq \frac{1}{2} \cdot (\varphi(1)(y) - \alpha)$. Por outro lado, sabemos que $\varphi(1)(y) \geq \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$, logo $\frac{1}{2} \cdot (\varphi(1)(y) - \alpha) \geq \frac{1}{2} \cdot (\alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta) - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (2 - \alpha \cdot \beta - 1) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta)$. Dessa forma $\varphi(f)(y) \geq \frac{1}{2} \cdot (\varphi(1)(y) - \alpha) \geq \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta)$.

Para algum $y_0 \in L$, temos $|\varphi(f)(y_0)| \geq \frac{1}{\beta}$. De fato, suponha que para todo $y \in L$, $|\varphi(f)(y)| < \frac{1}{\beta}$. Mas $\|\varphi^{-1}\| = \beta$, logo $\|\varphi^{-1}\| \cdot |\varphi(f)(y)| < 1$. Então, $1 = \|f\| = \|\varphi^{-1} \circ \varphi(f)\| \leq \|\varphi^{-1}\| \cdot \|\varphi(f)\| = \|\varphi^{-1}\| \cdot |\varphi(f)(y)|$ para algum $y \in L$. Logo, $1 \leq \|\varphi^{-1}\| \cdot |\varphi(f)(y)| < \beta \cdot \frac{1}{\beta} = 1$, o que é um absurdo. Portanto para algum $y_0 \in L$, temos $|\varphi(f)(y_0)| \geq \frac{1}{\beta}$.

Mas $\varphi(f)(y) \leq -\frac{1}{\beta}$ é impossível, uma vez que, $1 \leq \alpha \cdot \beta < 2$ implica $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta) > -\frac{1}{\beta}$. De fato, vamos provar primeiro que $1 \leq \alpha \cdot \beta < 2$ implica $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta) > -\frac{1}{\beta}$. Como $1 \leq \alpha \cdot \beta < 2$, então $0 \geq 1 - \alpha \cdot \beta > -1$, logo $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta) > \frac{1}{2}\alpha(-1) = -\frac{1}{2}\alpha$. Por outro lado, $\alpha \cdot \beta < 2$, implica $-\alpha \cdot \beta > -2$, então $-\frac{1}{\beta} < -\frac{\alpha}{2}$, assim $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta) > -\frac{1}{2}\alpha > -\frac{1}{\beta}$, como queríamos. Agora, como $\varphi(f)(y) \geq \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha \cdot \beta) > -\frac{1}{\beta}$, vem que é impossível $\varphi(f)(y_0) \leq -\frac{1}{\beta}$. Portanto $\varphi(f)(y_0) \geq \frac{1}{\beta}$, para algum $y \in L$ como queríamos.

(e) Vamos provar que $\varphi^{-1}(1)(x) \geq \beta \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$, para todo $x \in K$.

De modo analógo a demonstração da desigualdade 4.2, provamos que $|\varphi^{-1}(1)(x)| \geq \beta \cdot (2 - \alpha \cdot \beta)$ para todo $x \in K$. Considere agora o conjunto $B = \{x \in K;\ \varphi^{-1}(1)(x) < 0\}$, de modo análogo à demonstração de que o conjunto A é aberto e fechado, mostramos que B é aberto e fechado.

Seja χ_B a função característica de B que é contínua, pois B é aberto e fechado em K. Defina $H(x) = \varphi^{-1}(1)(x) + \beta(3 - \alpha\beta) \cdot \chi_B(x)$. Temos que $|H(x)| \leq \beta$, para todo $x \in K$. De fato, se $x \notin B$, então $\chi_B(x) = 0$ e como $|\varphi^{-1}(1)(x)| \leq \|\varphi^{-1}(1)\| \leq \|\varphi^{-1}\| = \beta$, vem que $|H(x)| \leq \beta$, para $x \notin B$. Agora se, $x \in B$, vamos provar que $-\beta \leq H(x) \leq \beta$. Comecemos com $H(x) \geq -\beta$, o que é equivalente a $-H(x) \leq \beta$. Temos que

$$
\begin{gathered}
-H(x) = -\varphi^{-1}(1)(x) - \beta(3 - \alpha\beta)\chi_B(x) = -\varphi^{-1}(1)(x) - \beta(3 - \alpha\beta) \leq \\
\left|-\varphi^{-1}(1)(x)\right| - \beta(3 - \alpha\beta) = \left|\varphi^{-1}(1)(x)\right| - \beta(3 - \alpha\beta) \leq \left\|\varphi^{-1}(1)\right\| - \beta(3 - \alpha\beta) \leq \\
\left\|\varphi^{-1}\right\| - \beta(3 - \alpha\beta) = \beta - \beta(3 - \alpha\beta) \leq \beta
\end{gathered}
$$

pois $\beta(3 - \alpha\beta) \geq 0$. Logo $H(x) \geq -\beta$ como queríamos. Agora provemos que $H(x) \leq \beta$. Sabemos que $|\varphi^{-1}(1)(x)| \geq \beta(2 - \alpha\beta)$, logo $\varphi^{-1}(1)(x) \geq \beta(2 - \alpha\beta)$ ou $\varphi^{-1}(1)(x) \leq -\beta(2 - \alpha\beta)$. Mas como $x \in B$, então $\varphi^{-1}(1)(x) < 0$, logo $\varphi^{-1}(1)(x) \leq -\beta(2 - \alpha\beta)$. Assim, como $\chi_B(x) = 1$, vem que $H(x) = \varphi^{-1}(1)(x) + \beta(3 - \alpha\beta) \leq -\beta(2 - \alpha\beta) + \beta(3 - \alpha\beta) = \beta$. Logo $H(x) \leq \beta$. Portanto $|H(x)| \leq \beta$, para todo $x \in K$.

Dessa forma, $\|\varphi(H)\| \leq \alpha\beta$, pois $\|\varphi(H)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|H\| \leq \alpha\beta$, já que $\|\varphi\| = \alpha$.

Suponha que $\chi_B \not\equiv 0$, assim $\chi_B \in \mathcal{C}_+(K)$. Pelo item (d) deste lema, existe $y_0 \in L$ tal que $\varphi(\chi_B)(y_0) \geq \frac{1}{\beta}$. Então $\alpha\beta \geq \varphi(H)(y_0) \geq 4 - \alpha\beta$. De fato, como $\|\varphi(H)\| \leq \alpha\beta$, então $\varphi(H)(y_0) \leq \alpha\beta$. Por outro lado, $\varphi(H)(y_0) = \varphi(\varphi^{-1}(1)+\beta(3-\alpha\beta)\cdot\chi_B)(y_0) = \varphi(\varphi^{-1}(1))(y_0)+\beta(3-\alpha\beta)\cdot\varphi(\chi_B)(y_0) \geq 1 + \beta(3-\alpha\beta)\cdot\frac{1}{\beta} = 4-\alpha\beta$. Consequentemente se $\alpha\beta \geq 4-\alpha\beta$, ou seja, $\alpha\beta \geq 2$, o que é um absurdo. Portanto χ_B deve ser zero, ou seja $B = \emptyset$.

Dessa forma, vamos provar que $\varphi^{-1}(1)(x) \geq \beta(2-\alpha\beta)$, para cada $x \in K$. Sabemos que $|\varphi^{-1}(1)(x)| \geq \beta(2-\alpha\beta)$, logo ou $\varphi^{-1}(1)(x) \geq \beta(2-\alpha\beta)$ ou $\varphi^{-1}(1)(x) \leq -\beta(2-\alpha\beta)$. Como χ_B é zero , sabemos do parágrafo anterior que $B = \emptyset$, onde $B = \{x \in K; \varphi^{-1}(1)(x) < 0\}$, logo $\varphi^{-1}(1)(x) \geq 0$, para todo $x \in K$. Portanto é impossível que $\varphi^{-1}(1)(x) \leq -\beta(2-\alpha\beta)$. Logo $\varphi^{-1}(1)(x) \geq \beta(2-\alpha\beta)$, para todo $x \in K$ como queríamos.

(f) Vamos provar agora que, para cada $g \in \mathcal{C}_+(L)$, $\varphi^{-1}(g)(x) \geq \frac{1}{\alpha}$, para algum $x \in K$. Seja agora $g \in \mathcal{C}_+(L)$, então $|\varphi^{-1}(1)(x) - 2\cdot\varphi^{-1}(g)(x)| = |\varphi^{-1}(1-2g)(x)| \leq \beta$, pois como $g \in \mathcal{C}_+(L)$, vem que $0 \leq g(y) \leq 1$, para todo $y \in L$, logo $\|1-2g\| \leq 1$. Assim , $\varphi^{-1}(g)(x) \geq \frac{1}{2}(\varphi^{-1}(1)(x)-\beta) \geq \frac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta)$. De fato, como $\varphi^{-1}(1)(x) - 2\varphi^{-1}(g)(x) \leq |\varphi(1)(x) - 2\varphi^{-1}(g)(x)| \leq \beta$, logo $\varphi^{-1}(1)(x) - 2\varphi^{-1}(g)(x) \leq \beta$, então $\varphi^{-1}(g)(x) \geq \frac{1}{2}(\varphi^{-1}(1)(x)-\beta)$. Por outro lado, sabemos que $\varphi^{-1}(1)(x) \geq \beta(2-\alpha\beta)$ e dessa forma $\frac{1}{2}(\varphi^{-1}(1)(x)-\beta) \geq \frac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta)$. Portanto $\varphi^{-1}(g)(x) \geq \frac{1}{2}(\varphi^{-1}(1)(x)-\beta) \geq \frac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta)$.

Dessa forma para algum $x_0 \in K$, temos $|\varphi^{-1}(g)(x_0)| \geq \frac{1}{\alpha}$. De fato, suponha que para todo $x \in K$, $|\varphi^{-1}(g)(x)| < \frac{1}{\alpha}$. Mas $\|\varphi\| = \alpha$, logo $\|\varphi\| \cdot |\varphi^{-1}(g)(x)| < 1$, então $1 = \|g\| = \|\varphi \circ \varphi^{-1}(g)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|\varphi^{-1}(g)\| = \|\varphi\| \cdot |\varphi^{-1}(g)(x)|$, para algum $x \in K$, logo $1 \leq \|\varphi\| \cdot |\varphi^{-1}(g)(x)| < \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$, o que é um absurdo. Portanto, para algum $x_0 \in K$, temos $|\varphi^{-1}(g)(x_0)| \geq \frac{1}{\alpha}$.

Mas $\varphi^{-1}(g)(x) \leq -\frac{1}{\alpha}$ é impossível, uma vez que, $1 \leq \alpha\beta < 2$, implica $\frac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta) > -\frac{1}{\alpha}$. De fato, como $1 \leq \alpha\beta < 2$, vem que $0 \geq 1-\alpha\beta > -1$, então $\frac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta) > -\frac{1}{2}\beta$. Por outro lado, $\alpha\beta < 2$, implica $-\alpha\beta > -2$, logo $-\frac{1}{\alpha} < -\frac{\beta}{2}$, assim $\frac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta) > -\frac{\beta}{2} > -\frac{1}{\alpha}$, como queríamos. Logo, $-\frac{1}{\alpha} \geq \varphi^{-1}(g)(x) \geq \frac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta) > -\frac{1}{\alpha}$, o que é um absurdo. Portanto $\varphi^{-1}(g)(x) \geq \frac{1}{\alpha}$, para algum $x \in K$, como queríamos.

■

Sejam K, L, φ, como no lema anterior. Para $f \in \mathcal{C}_+(K)$ defina:

$$P(f) = \left\{ y \in L; \varphi(f - \frac{1}{2})(y) \geq -\frac{1}{12}\alpha(2-\alpha\beta) \right\}. \tag{4.3}$$

Analogamente, para $g \in \mathcal{C}_+(L)$, defina

$$Q(g) = \left\{ x \in K; \varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \geq -\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta) \right\}. \tag{4.4}$$

Lema 4.3.3. *Sejam K e L espaços Hausdorff compactos. Seja φ o isomorfismo definido no lema 4.3.2*

(a) *Se* f_1, $f_2 \in \mathcal{C}_+(K)$ *e* $f_1(x) \leq f_2(x)$, *para todo* $x \in K$, *então* $\{y \in L; \varphi(f_1)(y) \geq \frac{1}{\beta}\} \subset intP(f_2)$.

(b) *Se* g_1, $g_2 \in \mathcal{C}_+(L)$ *e* $g_1(y) \leq g_2(y)$, *para todo* $y \in L$, *então* $\{x \in K; \varphi^{-1}(g_1)(y) \geq \frac{1}{\alpha}\} \subset intQ(g_2)$.

Demonstração. **(a)** Seja $y_0 \in \{y \in L; \varphi(f_1)(y) \geq \frac{1}{\beta}\} \neq \emptyset$ (pelo lema 4.3.2 (d)). Se $\varphi(1-f_2)(y_0) < \varphi(\frac{1}{2})(y_0)$, então temos $\varphi(f_2 - \frac{1}{2})(y_0) = \varphi(\frac{1}{2} - (1-f_2))(y_0) = \varphi(\frac{1}{2})(y_0) - \varphi(1-f_2)(y_0) > 0$.

Agora se $\varphi(1-f_2)(y_0) \geq \varphi(\frac{1}{2})(y_0)$, considere a função $F(x) = 1 - 2(f_2(x) - f_1(x)) \in \mathcal{C}(K)$, temos que $\|F\| \leq 1$. De fato, como f_1, $f_2 \in \mathcal{C}_+(K)$, vem que F é contínua. Agora, resta mostrar que $\|F\| \leq 1$. Para isto, basta provar que $|F(x)| \leq 1$, para todo $x \in K$, que é equivalente a mostrar que $-1 \leq F(x) \leq 1$, para todo $x \in K$.

Comecemos provando que $F(x) \leq 1$ para todo $x \in K$. Como $f_1(x) \leq f_2(x)$, para todo $x \in K$, então $-2(f_2(x) - f_1(x)) \leq 0$, logo $F(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, como queríamos.

Agora provemos que $F(x) \geq -1$, para todo $x \in K$. Temos que $F(x) \geq -1$ se e somente se $1 - 2(f_2(x) - f_1(x)) \geq -1$, se e somente se $-2(f_2(x) - f_1(x)) \geq -2$, se e somente se $f_2(x) - f_1(x) \leq 1$, se o somente se $f_2(x) \leq 1 + f_1(x)$, o que é verdade, para todo $x \in K$, pois se existisse $x \in K$ tal que $f_2(x) > 1 + f_1(x)$, iria contradizer o fato de $f_2 \in \mathcal{C}_+(K)$, pois $\|f_2\| > 1$. Portanto $\|F\| \leq 1$.

Dessa forma, temos $\alpha = \|\varphi\| \geq \|\varphi(F)\| \geq |\varphi(F)(y_0)| \geq \varphi(F)(y_0)$. Por outro lado, $\varphi(F)(y_0) = \varphi(1-2(f_2-f_1))(y_0) = \varphi(1-f_2-f_2+f_1+f_1)(y_0) = \varphi(f_1-(f_2-f_1)+(1-f_2))(y_0) = \varphi(f_1)(y_0) - \varphi(f_2-f_1)(y_0)+\varphi(1-f_2)(y_0) \geq \frac{1}{\beta} - \varphi(f_2-f_1)(y_0)+\varphi(1-f_2)(y_0) \geq \frac{1}{\beta} - \varphi(f_2-f_1)(y_0)+\varphi(\frac{1}{2})(y_0)$. Logo $\alpha \geq \frac{1}{\beta} - \varphi(f_2 - f_1)(y_0) + \varphi(\frac{1}{2})(y_0)$, implica $\varphi(f_2 - f_1)(y_0) \geq -\alpha + \frac{1}{\beta} + \varphi(\frac{1}{2})(y_0)$.

Portanto $\varphi(f_2 - \frac{1}{2})(y_0) = \varphi(f_1 + (f_2 - f_1) - \frac{1}{2})(y_0) = \varphi(f_1)(y_0) + \varphi(f_2 - f_1)(y_0) - \varphi(\frac{1}{2})(y_0) \geq \frac{1}{\beta} - \alpha + \frac{1}{\beta} + \varphi(\frac{1}{2})(y_0) - \varphi(\frac{1}{2})(y_0) = 2\frac{1}{\beta} - \alpha > 0$, pois $\alpha\beta < 2$. Dessa forma $\varphi(f_2 - \frac{1}{2})(y_0) > 0$.

Portanto $y_0 \in intP(f_2)$, pois $\varphi(f_2 - \frac{1}{2})(y_0) \in (-\frac{1}{12}\alpha(2 - \alpha\beta), \infty)$.

(b) Através de uma construção análoga à do item anterior provamos este item.

■

Lema 4.3.4. *Seja* $g \in \mathcal{C}_+(L)$. *Dado* $x_0 \in intQ(g)$, *existe* $f \in \mathcal{C}_+(K)$ *tal que:*

(a) $f(K \setminus Q(g)) = 0$;

(b) $f = 1$ *numa vizinhança de* x_0;

(c) $\{y \in L; g(y) = 1\} \subset intP(f)$; *e*

(d) $P(f) \subset \{y \in L; g(y) > 0\}$.

Demonstração. **(a)** Por hipótese K é compacto, logo ele é T_1, T_2, T_3 e T_4. Como K é T_3 e $x_0 \in intQ(g)$, existe vizinhança V de x_0 tal que $\overline{V} \subset intQ(g)$. Tome então os seguintes conjuntos fechados disjuntos: $A = K \setminus intQ(g)$ e $B = \overline{V}$. Pelo Lema de Urysohn (que podemos aplicar, já que K é T_4), existe $f_1 \in \mathcal{C}_+(K)$ tal que $f_1 = 0$ em A e $f_1 = 1$ em B. Como $K \setminus Q(g) \subset K \setminus intQ(g)$ e $V \subset \overline{V}$, segue que $f_1(K \setminus Q(g)) = 0$ e $f_1 = 1$ numa vizinhança de x_0.

Defina $f(x) = \max\{f_1(x), \frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x)\}$, onde φ foi construída no lema 4.3.2. Temos que $f \in \mathcal{C}_+(K)$. De fato, como f_1 e $\frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})$ são contínuas, então f é contínua, logo falta provar que $f \geq 0$ e $\|f\| = 1$.

Se $f(x) = f_1(x)$, para $x \in K$, como $f_1(x) \in \mathcal{C}_+(K)$, temos $f(x) = f_1(x) \geq 0$, para $x \in K$. Se $f(x) = \frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x)$, para $x \in K$, então $f(x) = \frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \geq f_1(x) \geq 0$.

Finalmente veremos que $\|f\| = 1$. É claro que $\|f_1\| = 1$. Também $\left\|\frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})\right\| \leq 1$. De fato,

$$\left\|\frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \tfrac{1}{2})\right\| = \frac{2}{\beta}\left\|\varphi^{-1}(g - \tfrac{1}{2})\right\| \leq \frac{2}{\beta}\left\|\varphi^{-1}\right\|\left\|g - \tfrac{1}{2}\right\| = \frac{2}{\beta}\cdot\beta\left\|g - \tfrac{1}{2}\right\| = 2\cdot\left\|g - \tfrac{1}{2}\right\| \leq 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1$$

pois como $g \in \mathcal{C}_+(L)$, então $0 \leq g(y) \leq 1$, para todo $y \in L$, logo $-\frac{1}{2} \leq (g - \frac{1}{2})(y) \leq \frac{1}{2}$. Portanto $f \in \mathcal{C}_+(K)$.

Agora, vamos verificar que $f(K \setminus Q(g)) = 0$. Como por hipótese, $f_1(K \setminus Q(g)) = 0$, basta verificar que $\frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) < 0$, para todo $x \in K \setminus Q(g)$. Seja $x \in K \setminus Q(g)$, logo $x \notin Q(g)$, assim $\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$, dessa forma $\frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{6}(2 - \alpha\beta) < 0$, pois $2 - \alpha\beta > 0$. Portanto $f(K \setminus Q(g)) = 0$.

(b) Agora verifiquemos que $f = 1$ numa vizinhança de x_0. Já sabemos que $f \in \mathcal{C}_+(K)$, assim $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in K$ e como por hipótese, $f_1 = 1$ numa vizinhança de x_0, concluímos que $f = 1$ numa vizinhança de x_0.

(c) Vamos provar que $\{y \in L;\, g(y) = 1\} \subset intP(f)$. Temos que vale a relação:

$$0 \leq \frac{1}{2}\beta f(x) - \varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \leq \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta), \text{ para todo } x \in K. \tag{4.5}$$

De fato, para primeira desigualdade como $f(x) \geq \frac{2}{\beta}\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x)$, para todo $x \in K$, vem que $\frac{1}{2}\beta f(x) - \varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \geq 0$.

Agora vamos verificar a segunda desigualdade. Para isso vamos considerar dois casos: $x \in Q(g)$ e $x \notin Q(g)$. Comecemos considerando o caso em que $x \in Q(g)$. Como $f \in \mathcal{C}_+(K)$, então $0 \leq f(x) \leq 1$, logo $\frac{1}{2}\beta f(x) \leq \frac{1}{2}\beta$. Já que $x \in Q(g)$, então $-\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \leq \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$. Dessa forma, $\frac{1}{2}\beta f(x) - \varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \leq \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$ como queríamos.

Agora se, $x \notin Q(g)$, pelo item (a) deste lema, $f(x) = 0$. Como $g \in \mathcal{C}_+(L)$ vem que $\left\|g - \frac{1}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}$, além disso, $\left\|\varphi^{-1}\right\| = \beta$, logo $\left\|\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})\right\| \leq \left\|\varphi^{-1}\right\|\cdot\left\|g - \frac{1}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\beta$. Assim: $-\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \leq \left|\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x)\right| \leq \left\|\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})\right\| \leq \frac{1}{2}\beta \leq \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$, como queríamos. Portanto vale a relação 4.5, para todo $x \in K$.

Temos, então

$$\left|\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x)\right| \leq \frac{1}{4}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta), \text{ para todo } x \in K \tag{4.6}$$

De fato, suponha, que para algum $x \in K$

$$\left|\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x)\right| > \frac{1}{4}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$$

Dessa forma, ou $\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) > \frac{1}{4}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$ ou $\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{4}\beta-\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$. Vamos analisar cada caso.

Se $\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) > \frac{1}{4}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$, então $\frac{1}{2}\beta f(x)-\frac{1}{4}\beta-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) > \frac{1}{4}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$, logo, $\frac{1}{2}\beta f(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) > \frac{1}{2}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$ o que contradiz a segunda desigualdade de 4.5.

Se $\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{4}\beta-\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$, então $\frac{1}{2}\beta f(x)-\frac{1}{4}\beta-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{4}\beta-\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$, assim $\frac{1}{2}\beta f(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta) < 0$ o que contradiz a primeira desigualdade de 4.5.

Portanto

$$\left|\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x)\right| \leq \frac{1}{4}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta) \tag{4.7}$$

para todo $x \in K$.

Assim

$$\left|\frac{1}{2}\beta\varphi(f-\frac{1}{2})(y)-(g-\frac{1}{2})(y)\right| \leq \frac{1}{4}\alpha\beta+\frac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta), \text{ para todo } y \in L. \tag{4.8}$$

De fato, $\left|\frac{1}{2}\beta\varphi(f-\frac{1}{2})(y)-(g-\frac{1}{2})(y)\right| = \left|(\varphi\circ\varphi^{-1})(\frac{1}{2}\beta\varphi(f-\frac{1}{2}))(y)-(\varphi\circ\varphi^{-1})(g-\frac{1}{2})(y)\right| = \left|\varphi(\frac{1}{2}\beta(\varphi^{-1}\circ\varphi)(f-\frac{1}{2})(y))-\varphi(\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2}))(y)\right| = \left|\varphi(\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(y)-\varphi(\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2}))(y)\right| \leq \left\|\varphi(\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2}))\right\| \leq \|\varphi\|\left\|\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})\right\| = \alpha\left|\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x)\right|$ para algum $x \in K$ e pela desigualdade 4.7, $\alpha\left|\frac{1}{2}\beta(f-\frac{1}{2})(x)-\varphi^{-1}(g-\frac{1}{2})(x)\right| \leq \alpha\frac{1}{4}\beta+\alpha\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$. Portanto $\left|\frac{1}{2}\beta\varphi(f-\frac{1}{2})(y)-(g-\frac{1}{2})(y)\right| \leq \frac{1}{4}\alpha\beta+\frac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta)$ para todo $y \in L$.

Logo

$$\left|\frac{1}{2}\beta\varphi(f-\frac{1}{2})(y)-(g-\frac{1}{2})(y)\right| \leq \frac{1}{4}\alpha\beta+\frac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta), \text{ para todo } y \in L.$$

como queríamos. Dessa forma,

$$-\tfrac{1}{4}\alpha\beta-\tfrac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta) \leq \tfrac{1}{2}\beta\varphi(f-\tfrac{1}{2})(y)-(g-\tfrac{1}{2})(y) \leq \tfrac{1}{4}\alpha\beta+\tfrac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta).$$

Assim se, $y \in L$ é tal que $g(y)=1$, temos

$$\tfrac{1}{2}\beta\varphi(f-\tfrac{1}{2})(y) \geq \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha\beta - \tfrac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta) = (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\alpha\beta)(2-\alpha\beta) > 0$$

pois como, $1 \leq \alpha\beta < 2$, então $(2-\alpha\beta) > 0$ e consequentemente $(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\alpha\beta) > 0$. Portanto $\{y \in L;\, g(y) = 1\} \subset intP(f)$.

(d) Agora vamos provar que $P(f) \subset \{y \in L;\, g(y) > 0\}$. Como $g \in \mathcal{C}_+(L)$, então $g(y) \geq 0$, para todo $y \in L$. Seja então $y \notin \{y \in L;\, g(y) > 0\}$, logo $g(y) = 0$. Assim

$$\frac{1}{2}\beta\varphi(f-\frac{1}{2})(y) \leq -(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\alpha\beta)(2-\alpha\beta) \leq -\frac{1}{2}\beta\frac{1}{12}\alpha(2-\alpha\beta).$$

De fato, por 4.8 vem que

$$\tfrac{1}{2}\beta\varphi(f-\tfrac{1}{2})(y) - (g-\tfrac{1}{2})(y) \leq \tfrac{1}{4}\alpha\beta + \tfrac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta)$$

logo

$$\tfrac{1}{2}\beta\varphi(f-\tfrac{1}{2})(y) - g(y) + \tfrac{1}{2}(y) \leq \tfrac{1}{4}\alpha\beta + \tfrac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta)$$

assim

$$\tfrac{1}{2}\beta\varphi(f-\tfrac{1}{2})(y) \leq -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha\beta + \tfrac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta) = \tfrac{1}{4}\alpha\beta - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\alpha\beta - \tfrac{1}{12}\alpha^2\beta^2 = -(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\alpha\beta)(2-\alpha\beta).$$

Agora, vamos ver que

$$-(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\alpha\beta)(2-\alpha\beta) \leq -\tfrac{1}{2}\beta\tfrac{1}{12}\alpha(2-\alpha\beta).$$

De fato, suponha que

$$-(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\alpha\beta)(2-\alpha\beta) > -\tfrac{1}{2}\beta\tfrac{1}{12}\alpha(2-\alpha\beta)$$

logo

$$(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\alpha\beta)(2-\alpha\beta) < \tfrac{1}{24}\alpha\beta(2-\alpha\beta)$$

então

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\alpha\beta < \tfrac{1}{24}\alpha\beta$$

ou seja, $\alpha\beta > 2$, o que é um absurdo. Portanto

$$\tfrac{1}{2}\beta\varphi(f-\tfrac{1}{2})(y) < -\tfrac{1}{2}\beta\tfrac{1}{12}\alpha(2-\alpha\beta).$$

Assim

$$\varphi(f - \tfrac{1}{2})(y) < -\tfrac{1}{12}\alpha(2 - \alpha\beta)$$

Dessa forma, $y \notin P(f)$. Portanto $P(f) \subset \{y \in L;\, g(y) > 0\}$.

■

Através de uma construção análoga ao do lema 4.3.4, provamos o seguinte lema.

Lema 4.3.5. *Seja $f \in \mathcal{C}_+(K)$. Dado $y_0 \in intP(f)$, existe $g \in \mathcal{C}_+(L)$ tal que:*

(a) $g(L \setminus P(f)) = 0$;

(b) $g = 1$ *numa vizinhança de* y_0;

(c) $\{x \in K;\, f(x) = 1\} \subset intQ(g)$; *e*

(d) $Q(g) \subset \{x \in K;\, f(x) > 0\}$.

Agora vamos apresentar o principal resultado desta seção criado por Amir e apresentado em [1].

Teorema 4.3.6 (Amir [1])**.** *Se K e L são espaços Hausdorff compactos e T é um isomorfismo linear de $\mathcal{C}(K)$ sobre $\mathcal{C}(L)$ com $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 2$, então K e L são homeomorfos.*

Demonstração. Para cada $x \in K$ defina:

$$\sigma(x) = \bigcap\{P(f);\, f \in \mathcal{C}_+(K),\, f = 1 \text{ numa vizinhança de } x\} \tag{4.9}$$

Vamos provar que $\sigma(x) \neq \emptyset$. Se $f_i(x) = 1$, numa vizinhança de x, para $i = 1, 2, ..., n$, seja $f_k(x) = \min\{f_i(x);\, 1 \leq i \leq n\}$, então pelo lema 4.3.3

$$\{y \in L;\, \varphi(f_k)(y) \geq \frac{1}{\beta}\} \subset \{int(P(f_i))\} \subset \{P(f_i)\}, \text{ para todo } i = 1, ..., n. \tag{4.10}$$

Logo $\{y \in L;\, \varphi(f_k)(y) \geq \frac{1}{\beta}\} \subset \bigcap\{P(f_i);\, i = 1, ...n\}$

Agora observe que pelo lema 4.3.2 (d), $\{y \in L;\, \varphi(f_k)(y) \geq \frac{1}{\beta}\} \neq \emptyset$, logo $\bigcap\{P(f_i);\, i = 1, ...n\} \neq \emptyset$ e como L é compacto, toda família de conjuntos fechados de L satisfazendo a propriedade da interseção finita tem interseção não vazia. Portanto $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Vamos mostrar agora que $\sigma(x)$ é um conjunto unitário. Sejam $y_1, y_0 \in L$ distintos em $\sigma(x)$. Como L é Hausdorff, $\{y_1\}$ e $\{y_0\}$ são fechados e disjuntos. Portanto pelo Lema de Urysohn 1.2.17, existe $g \in \mathcal{C}_+(L)$ tal que $g(y_1) = 1$ e $g(y_0) = 0$. Se $\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) > -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$, então $x \in int(Q(g))$, logo pelo lema 4.3.4, existe $f_1 \in \mathcal{C}_+(K)$ tal que $f_1 = 1$ numa vizinhança de x e pelo item (d) do lema 4.3.4, $y_0 \notin P(f_1)$, já que $y_0 \notin \{y \in L;\, g(y) > 0\}$. Agora, se $\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \leq -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$, então $\varphi^{-1}[(1 - g) - \frac{1}{2}](x) > 0$. De fato, como φ é isomorfismo linear, vem que φ^{-1} é linear, assim $\varphi^{-1}[(1 - g) - \frac{1}{2}](x) = -\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) > 0$. Assim, $x \in intQ(1 - g)$ e pelo lema 4.3.4, existe $f_2 \in \mathcal{C}_+(K)$ que vale 1 numa vizinhança de x e pelo item (d), do lema 4.3.4, $y_1 \notin P(f_2)$, já que

$y_1 \notin \{y \in L; (1-g)(y) > 0\}$. Portanto, como y_0 e y_1 são distintos em $\sigma(x)$, então $y_0 \notin P(f_1)$ ou $y_1 \notin P(f_2)$ e como $\sigma(x) \neq \emptyset$, entao $\sigma(x)$ consiste de apenas um ponto. Logo $\sigma : K \longrightarrow L$ é uma função bem definida.

Agora vamos provar que σ é uma função contínua em K. Sejam $x_0 \in K$ e N uma vizinhança de $\sigma(x_0)$. Queremos encontrar, $f_1, ..., f_n \in \mathcal{C}_+(K)$, tais que $f_i = 1$ numa vizinhança U_i de x_0 e $\bigcap\{P(f_i); i = 1, ..., n\} \subset N$. De fato, por hipótese, $\bigcap P(f) \subset N$, onde $f \in \mathcal{C}_+(K)$ e $f = 1$ numa vizinhança de x_0. Logo $L \setminus N \subset L \setminus \bigcap P(f)$, mas $L \setminus \bigcap P(f) = \bigcup(L \setminus P(f))$. Dessa forma, $L = N \bigcup(L \setminus N) \subset N \bigcup(\bigcup(L \setminus P(f)))$, onde $N \bigcup(\bigcup(L \setminus P(f)))$ é uma cobertura de abertos. Como L é compacto, admite subcobertura finita, logo existem $f_1, ..., f_n \in \mathcal{C}_+(K)$ tal que $f_i = 1$ numa vizinhança U_i de x_0 e

$$L \subset N \bigcup(L \setminus P(f_1)) \bigcup(L \setminus P(f_2)) \bigcup ... \bigcup(L \setminus P(f_n)).$$

Mas, $L \setminus N \subset (L \setminus P(f_1)) \bigcup(L \setminus P(f_2)) \bigcup ... \bigcup(L \setminus P(f_n))$, pois $L \setminus N \not\subset N$. Assim tomando o complementar, vem que: $\bigcap_{i=1}^{n} P(f_i) \subset N$.

Assim se $x \in \bigcap\{U_i; i = 1, ..., n\}$, então $x \in U_i$ para todo $i = 1, ..., n$, como U_i é aberto, então U_i é vizinhança de x e $f_i = 1$ para todo $i = 1, ..., n$. Então, $\sigma(x) \in \bigcap\{P(f_i); i = 1, ..., n\} \subset N$. Portanto σ é contínua.

Para cada $y \in L$ defina:

$$\Gamma(y) = \bigcap\{Q(g); g \in \mathcal{C}_+(L), g = 1 \text{ numa vizinhança de } y\} \tag{4.11}$$

De modo análogo à prova de σ, provamos que Γ é unitário e que Γ define uma função contínua de L em K.

Vamos provar agora que σ é um homeomorfismo e que sua inversa é Γ. Se $g \in \mathcal{C}_+(L)$ é 1 numa vizinhança de $\sigma(x)$, então $g(\sigma(x)) = 1$ e $x \in Q(g)$. Caso contrário, suponha que $x \notin Q(g)$, logo

$$\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$$

então

$$\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) < \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$$

assim

$$-\varphi^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) > -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$$

então

$$\varphi^{-1}(-g + \frac{1}{2})(x) > -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta)$$

logo

$$\varphi^{-1}((1-g)-\frac{1}{2})(x) > -\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)$$

ou seja $x \in intQ(1-g)$.

Dessa forma, se $x \in intQ(1-g)$, pelo lema 4.3.4, existe $f \in \mathcal{C}_+(K)$ tal que $\sigma(x) \in P(f)$ e $(1-g)(P(f)) > 0$. De fato, pelo lema 4.3.4, $f = 1$ numa vizinhança de x, logo $\sigma(x) = \bigcap\{P(f);\ f \in \mathcal{C}_+(K),\ f = 1$ numa vizinhança de $x\} \subset P(f)$, então $\sigma(x) \in P(f)$, já que $\sigma(x)$ tem apenas um ponto. Além disso, seja $y \in P(f)$. Então, pelo lema 4.3.4, $(1-g)(y) > 0$, e também, $(1-g)(z) > 0$ para todo $z \in P(f)$. Mas isso é impossível, pois $\sigma(x) \in P(f)$ implica $1 - g(\sigma(x)) > 0$, ou seja, $g(\sigma(x)) < 1$, o que contradiz o fato de $g(\sigma(x)) = 1$.

Portanto $x \in Q(g)$ e isso implica que $x = \Gamma(\sigma(x))$. De fato, por hipótese,

$$\Gamma(\sigma(x)) = \bigcap\{Q(g);\ g \in \mathcal{C}_+(L),\ g = 1 \text{ numa vizinhança de } \sigma(x)\}$$

e como $x \in Q(g)$, vem que $x \in \Gamma(\sigma(x))$, logo $x = \Gamma(\sigma(x))$. Portanto σ é injetora.

Agora, se $f \in \mathcal{C}_+(K)$ é 1 numa vizinhança de $\Gamma(y)$, então $y \in P(f)$. Caso contrário $y \in int(P(1-f))$. Dessa forma, se $y \in int(P(1-f))$, pelo lema 4.3.5, existe $g \in \mathcal{C}_+(L)$ tal que $\Gamma(y) \in Q(g)$ e $(1-f)(Q(g)) > 0$ o que é impossível. Portanto, $y \in P(f)$. Assim $y = \sigma(\Gamma(y))$. Assim, σ é sobrejetora.

Como, σ e Γ são contínuas e inversas uma da outra, então σ é um homeomorfismo, como queríamos.

■

Capítulo 5

Conclusão

No ano de 1932, em [4], Banach demonstrou, para os espaços de funções com valores reais, o seguinte resultado:

Teorema. (Banach- Stone) *Sejam K, L espaços métricos compactos. Então $\mathcal{C}(K)$ é isométrico a $\mathcal{C}(L)$ se e somente se K e L são homeomorfos*

Em 1937, Stone em [24] estendeu o resultado para espaços compactos arbitrários e esta generalização é conhecido como Teorema Clássico de Banach- Stone. Arens e Kelley [2], em 1947 provaram o Teorema de Banach- Stone considerando o espaço de funções com valores complexos.

Michael Cambern [5], em 1966 mostrou com a hipótese de enumerabilidade que a conclusão do teorema permanece verdadeira para uma classe de aplicações um pouco mais geral do que isometrias. Desse modo ele provou o seguinte:

Teorema. *Se K e L são espaços Hausdorff localmente compactos enumeráveis, e T é um isomorfismo linear contínuo com a norma do supremo de $\mathcal{C}_0(K)$ sobre $\mathcal{C}_0(L)$ com limite estritamente menor que 2,*

$$\|f\| \leq \|T(f)\| \leq \|T\| \, \|f\|, \; f \in \mathcal{C}(K), \; \|T\| < 2$$

então K e L são homeomorfos.

Onde $\mathcal{C}_0(K)$ consiste de todas as funções contínuas com valores complexos em K

Amir [1], em 1966, independente de Camberm provou um resultado análogo para o espaço de funções com valores reais. Esse resultado pode ser encontrado no capítulo 4 desta dissertação. Assim com esses resultados eles generalizaram o Teorema de Banach- Stone.

Já no ano de 1967, Cambern mostrou em [6] o resultado acima sem a hipótese da enumerabilidade. Tornando, dessa forma, essa hipótese dispensável.

Uma outra extensão do teorema de Banach- Stone foi obtida por Y. Gordon [16], em 1970. Aqui identificamos $K^{(\alpha)}$ como a α-ésima derivada de K. Ele provou o seguinte:

Teorema. *Sejam K e L espaços Hausdorff localmente compactos e seja $T : \mathcal{C}_0(K) \longrightarrow \mathcal{C}_0(L)$ um isomorfismo injetor. Se existe um ordinal α tal que $\left|K^{(\alpha)}\right| > \left|L^{(\alpha)}\right|$ então $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| \geq 3$.*

Já Bahattin Cengiz [9], em 1978, provou que se $\mathcal{C}_0(K)$ e $\mathcal{C}_0(L)$ são isomorfos topologicamente então eles tem a mesma cardinalidade, ou seja, $|K| = |L|$.

No ano de 1982, Jarosz [18] obteve uma generalização para os espaços de Banach X cujo dual satisfaz uma condição geometrica envolvendo $\|T\| \left\|T^{-1}\right\|$ e o número $\dfrac{4}{3}$, onde T é um isomorfismo de $\mathcal{C}(K, X)$ sobre $\mathcal{C}(L, X)$.

Michael Cambern [8], em 1985, considerou um espaço de Banach uniformemente convexo X e tomou B_X a bola unitária e o valor

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{e_1, e_2 \in B_X} \left\{ 1 - \left\| \frac{e_1 + e_2}{2} \right\| ;\ \|e_1 - e_2\| \geq \varepsilon \right\}$$

Assim ele provou o seguinte teorema:

Teorema. *Sejam K e L espaços Hausdorff compactos e X um espaço de Banach uniformemente convexo. Se T é um isomorfismo de $\mathcal{C}(K, X)$ sobre $\mathcal{C}(L, X)$ satisfazendo $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| < (1 - \delta(1))^{-1}$, então K e L são homeomorfos.*

Também em 1989, Jarosz [19] definiu o seguinte parâmetro:

$$\mu(X) = \sup\{\min\{\|x_1 + \lambda x_2\| ;\ |\lambda| = 1\};\ x_1, x_2 \in S_X\}$$

onde X é um espaço de Banach e S_X é a esfera unitária em X. Assim ele provou que se $\mu(X^*) < 2$, então se existe um isomorfismo $T : \mathcal{C}(K, X) \longrightarrow \mathcal{C}(L, X)$ com $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| < \alpha$, onde $\alpha = \dfrac{4}{2 + \mu(X^*)}$ então K e L são homeomorfos.

Como vimos o Teorema de Banach Stone encontrou ao longo do tempo, várias extensões e generalizações. Algumas delas foram discutidas nesta dissertação outras citadas nesta curta conclusão, mas ainda existem outros resultados sobre o tema, alguns ainda em aberto. Um desses problemas é citado por Michael Cambern [7].

Em [7] Cambern mostra que no caso em que X é um espaço de Hilbert de dimensão finita a existência de um isomorfismo $T : \mathcal{C}(K, X) \longrightarrow \mathcal{C}(L, X)$ com $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| < \sqrt{2}$ implica que K e L são homeomorfos. O que ainda não se sabe é se a constante $\sqrt{2}$ é o maior número possível.

Referências Bibliográficas

[1] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces*, Israel Journal of Mathematics **3** (1966), 205–210.

[2] R. F. Arens, J. L. Kelley, *Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space*, Trans. Amer. Math. Soc **62** (1947), 499–508.

[3] M. Atiyah, I.G.MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison- Wesley Publishing Company, 1969.

[4] S. Banach, *Théorie des Opérations Lineaires*, Warszowa 1932. Reprinted, Chelsea Publishing Company, New York 1963 .

[5] M. Cambern, *A Generalized Banach-Stone Theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society **Vol. 17, No. 2** (1966), 396–400.

[6] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound*, Proceedings of the American Mathematical Society **Vol. 18** (1967), 1062–1066.

[7] M. Cambern, *Isomorphisms of spaces of continuous vector- valued functions*, Illinois J. Math **Vol. 20, No. 1** (1976), 1–11.

[8] M. Cambern, *Isomorphisms of spaces of norm- continuous functions*, Pacific Journal of Mathematics **Vol. 116** (1985), 243–254.

[9] B. Cengiz, *On topological isomorphisms of $C_0(X)$ and the cardinal number of X*, Proceedings of the American Mathematical Society **Vol. 72** (1978), 105–108.

[10] H. B. Cohen, *A bound-two isomorphism between C(X) Banach spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **Vol. 50** (1975), 215–217.

[11] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators Part I: General Theory*, Interscince Publishers, Inc, 1957.

[12] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[13] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. M. Santalucia, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite- Dimensional Geometry*, Springer, 2001.

[14] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Variations on the Banach- Stone Theorem*, Extracta Mathematicae **17** (2001), 351–383.

[15] I. Gelfand, A. Kolmogoroff, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **22** (1939), 11–15.

[16] Y. Gordon, *On the distance coefficient between isomorphic function spaces*, Israel J. Math **Vol. 8** (1970), 391–397.

[17] P. R. Halmos, *Naive set theory*, Van Nostrand Reinhold Company, 1960.

[18] K. Jarosz, *A generalization of the Banach- Stone theorem*, Studia Mathematica **Vol. 56** (1982), 33–39.

[19] K. Jarosz, *Small isomorphisms of C(X,E) spaces*, Pacific Journal of Mathematics **Vol. 138, No. 2** (1989), 295–315.

[20] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Aplications*, Wiley Classics Library, 1989.

[21] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, IMPA, 2011.

[22] I. Maddox, *Elements of functional analysis*, Cambrigde University Press, 1970.

[23] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[24] M. Stone, *Applications of the theory of boolean rings to General Topology*, Trans. Amer. Math. Soc **41** (1937), 375–481.