A Evolução do Estudo das Aplicações Lineares e não Lineares que Atingem a Norma em Espaços de Banach

Sheldon Miriel Gil Dantas

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática

Programa: Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, Julho de 2013

A Evolução do Estudo das Aplicações Lineares e não Lineares que Atingem a Norma em Espaços de Banach

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 30/07/2013. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Daniela Mariz Silva Vieira (orientadora) - USP
- Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB
- Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui - UNICAMP

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora pelo tema sugerido e pela paciente correção deste trabalho.

Agradeço aos meus queridos pais, João Carlos Dantas e Maria de Fátima Gil Dantas, por sempre estarem comigo aonde quer que eu vá.

Agradeço a Marline Ilha da Silva pelo companheirismo integral durante os últimos anos. Foi ela quem me seguiu do primeiro rabisco até o be-a-bá e esteve em todos os meus desenhos coloridos.

Agradeço a Wellington Gomes Dantas por tudo que sempre fez e continua fazendo por mim.

Agradeço aos meus irmãos, Yuri Gil Dantas e Eric Gil Dantas, por todas as partidas de futebol no *video game*, mesmo quando tudo acabava em pancadaria.

Agradeço a Milton, Marlene, Marton, Taina e Tita pelos vários jantares recheados de sorrisos.

Agradeço aos meus amigos Adilson, Angélica, Belmiro, Danielle, Fernando, Larissa, Lilian e Patrícia pelas aventuras, alegrias e divertimentos. Em especial a Benigno Alves, Juliana Martins e Guilherme Loch.

Agradeço aos professores Daniel Pellegrino e Jorge Mujica por terem aceitado fazer parte da banca avaliadora e por suas observações, sugestões e correções.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

DANTAS, S.M.G. **A Evolução do Estudo das Aplicações Lineares e não Lineares que Atingem a Norma em Espaços de Banach.** 2013. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Neste trabalho, apresentamos o resultado de E. Bishop e R. Phelps de 1961 que afirma que o conjunto dos funcionais lineares e contínuos que atingem a norma, definidos sobre um espaço de Banach X, é denso em X^*. Também apresentamos o resultado de J. Lindenstrauss de 1963 que afirma que o conjunto dos operadores lineares definidos entre espaços de Banach, cujos segundo adjuntos atingem a norma, é denso no conjunto dos operadores lineares e contínuos. Na sequência, apresentamos versões não lineares do Teorema de Lindenstrauss desenvolvidas por María Acosta, Richard Aron, Domingo García e Manuel Maestre em 2002 e 2006, para aplicações multilineares e polinômios homogêneos.

Palavras-chave: aplicações lineares, aplicações multilineares, polinômios homogêneos, função que atinge a norma.

Abstract

In this work, we present a result due to E. Bishop and R. Phelps in 1961 that asserts the denseness in X^* of the set of norm attaining functionals, defined in a Banach space X. We also present a result due Lindenstrauss in 1963 that asserts the denseness of the subset of operators between Banach spaces whose second adjoints attain their norms in the set of the continuous operators. In the following, we show non-linear versions of the Lindenstrauss Theorem developed by María Acosta, Richard Aron, Domingo García and Manuel Maestre in 2002 and 2006 to multilinear aplications and homogeneous polynomials.

Keywords: linear operators, multilinear forms, homogeneous polynomials, norm attaining function.

Sumário

Notação

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números inteiros estritamente positivos
$\mathbb{K}$	os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X	um espaço normado sobre $\mathbb{K}$
B_X	a bola unitária fechada de um espaço normado X
S_X	a esfera unitária de um espaço normado X
$X^{\#}$	o espaço vetorial dos funcionais lineares em X
X^*	o espaço vetorial normado dos funcionais lineares e contínuos em X
δ_X	a imersão (isométrica) canônica de X em X^{**}
$\mathrm{Re}(z)$	a parte real de um número complexo z
$\mathrm{Im}(z)$	a parte imaginária de um número complexo z
x^*	um elemento de X^*
$\mathrm{Nuc}\, x^*$	o núcleo de x^*
w^*	a topologia fraca-estrela em X^*

Introdução

Neste trabalho, estudamos a evolução do estudo das funções lineares e não lineares que atingem a norma. Mais especificamente, sejam X um espaço de Banach e B_X a bola unitária fechada deste espaço. O Teorema de James nos diz que X é reflexivo se, e somente, se para cada $x^* \in X^*$, existe $x_0 \in B_X$ tal que $\|x^*\| = |x^*(x_0)|$. Ou seja, se todo funcional em X^* *atinge a norma*, então X é reflexivo e reciprocamente. Em 1957 Robert C. James demonstrou esse teorema supondo que X é um espaço separável. Sete anos mais tarde, ele conseguiu provar esse mesmo resultado para um espaço de Banach qualquer, como podemos ver em [Jam64].

Ao mesmo tempo que James trabalhava nessa linha de pesquisa, Robert R. Phelps começou a estudar o comportamento de funcionais que atingem a norma em espaços não reflexivos. Em 1963, ele e Errett Bishop, conseguiram mostrar que o conjunto dos funcionais que possuem essa propriedade é denso em X^* e tal resultado ficou conhecido como o teorema de Bishop-Phelps [BP63].

Muitas perguntas surgiram desde então. Uma delas, feita pelos próprios Bishop e Phelps, questionava a validade de um teorema do tipo Bishop-Phelps para operadores lineares e contínuos definidos em espaços de Banach. Lindenstrauss em [Lin63] apresentou, ainda em 1963, um contra exemplo que mostrava que o questionamento acima é falso. Nesse mesmo artigo, ele provou que o conjunto dos operadores lineares e contínuos definidos em espaços de Banach dos quais seus respectivos segundo adjuntos atingem a norma, é denso no conjunto dos operadores lineares e contínuos, resultado este que ficou conhecido como o teorema de Lindenstrauss.

Fica bastante natural a partir disso questionar sobre a validade ou não de teoremas dos tipos Bishop-Phelps e Lindenstrauss para aplicações N-lineares e polinômios N-homogêneos, onde $N \geq 2$. Por exemplo, já é conhecido que o conjunto das aplicações bilineares e contínuas em X que atingem a norma *não* é denso em $\mathcal{L}(^2X)$, provado por M. D. Acosta, F. Aguirre e R. Payá em [AAP96]. Também é conhecido que não vale um teorema do tipo Bishop-Phelps para polinômios N-homogêneos, como nos mostra M. J. Sevilla e R. Payá em [SP98]. Entretando, a situação com teoremas do tipo Lindenstrauss já muda um pouco. Em 2002, R. M. Aron, D. García e M. Maestre em [AGM03] provaram que o conjunto dos polinômios 2-homogêneos contínuos em X, cuja extensão canônica definida em X^{**} atinge a norma, é denso em $\mathcal{P}(^2X)$. Já em 2006, foi provado um teorema do tipo Lindenstrauss para aplicações N-lineares por María D. Acosta, Domingo García e Manuel Maestre [AGM06].

Este trabalho foi estruturado da seguinte maneira. No Capítulo 1 expomos alguns resultados básicos de Análise Funcional, aplicações multilineares e polinômios N-homogêneos. Há também uma seção que trata sobre extensões desses tipos de funções, como as extensões de Arens [Are51a], as extensões de Aron-Berner [AB78] e as extensões de Davie-Gamelin [DG89].

No Capítulo 2 apresentamos uma demonstração do Teorema de Bishop-Phelps [BP63]. Para isso, é necessário estudar alguns resultados sobre funcionais e pontos suporte.

O Teorema de Lindenstrauss [Lin63] para operadores é provado no Capítulo 3. Inicialmente, provamos uma caracterização importante dos operadores cujo segundo adjunto atinge a norma. Posteriormente, apresentamos um lema onde construímos uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$ que será imprescindível para a conclusão do teorema principal. Ainda nesse capítulo, exibimos a demonstração de dois resultados apresentados por R. Aron, D. García e M. Maestre em [AGM03], onde mostram a validade de teoremas do tipo Lindenstrauss para aplicações bilineares e polinômios 2-homogêneos.

Já no Capítulo 4, mostraremos a prova do teorema de Lindenstrauss para aplicações N-lineares feita por M. D. Acosta, D. García e M. Maestre em [AGM06].

Finalmente, no Apêndice, é apresentado a demonstração do Teorema de James como feito em [Meg98].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar os principais resultados que usaremos no decorrer desse trabalho. A maioria dos resultados podem ser encontrados com todos os detalhes em [Meg98].

1.1 Resultados Básicos

Se X é um espaço normado complexo, então denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$ o espaço X sobre $\mathbb{R}$ tal que a operação multiplicação por escalar é restrita ao corpo dos números reais. Para servir de auxílio aos próximos capítulos, enunciaremos um fato básico bastante útil na demonstração de alguns resultados envolvendo espaços complexos.

Teorema 1.1.1 ([Meg98], pg. 72)**.** Seja X um espaço normado complexo.

(a) Se $x^* \in X^*$, então $x^*(x) = u^*(x) - iu^*(ix)$, onde $u^* = \operatorname{Re} x^*$.

(b) Se $u^* \in (X_{\mathbb{R}})^*$ e definimos x^* pela fórmula em (a), então $x^* \in X^*$.

(c) Se $x^* \in X^*$ e $u^* = \operatorname{Re}(x^*)$, então $\|x^*\| = \|u^*\|$.

Usaremos diversas vezes a seguinte versão do teorema de Hahn-Banach no Capítulo 2.

Teorema 1.1.2 ([Jr.99], pg. 82)**. (Teorema de Separação de Hahn-Banach)** Sejam C e B subconjuntos convexos não vazios de um espaço normado real X tais que $\operatorname{int}(B) \neq \emptyset$ e $C \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$. Então, existe $x^* \in X^*$ não nulo tal que

$$\sup_{x \in C} x^*(x) \leq \inf_{y \in B} x^*(y).$$

Definiremos agora uma topologia sobre o espaço X^*. Se X é um espaço normado, então definimos uma topologia localmente convexa em X^* chamada *topologia fraca-estrela* e denotada por w^*. Tal topologia é dada pela seguinte base de vizinhanças da origem

$$V(0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_j)| < \varepsilon,\ 1 \leq j \leq n\},$$

onde $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\varepsilon > 0$. Nos próximos capítulos, usaremos diversas vezes a seguinte caracterização para convergência na topologia w^*.

Proposição 1.1.3. Sejam I um conjunto dirigido e $(x_i)_{i\in I} \subset X^*$ uma rede em X^*. Então, $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ se, e somente se, $x_i^*(x) \to x^*(x)$, para todo $x \in X$.

Os teoremas de Banach-Alaoglu e de Goldstine são usados vez por outra nos próximos capítulos e, por isso, são aqui enunciados.

Teorema 1.1.4 ([Meg98], pg. 229)**.** **(Teorema de Banach-Alaoglu)** Seja X um espaço normado. Então B_{X^*} é w^*-compacta.

Teorema 1.1.5 ([Meg98], pg. 232)**.** **(Teorema de Goldstine)** Seja X um espaço normado e considere a imersão canônica de X em X^{**}. Então $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$.

1.2 Aplicações Multilineares e Polinômios Homogêneos

Nesta seção, daremos um breve resumo sobre aplicações multilineares. Definimos as aplicações multilineares simétricas que servirão de suporte para o estudo dos polinômios homogêneos. Todos os resultados foram baseados na referência [Muj86].

Seja $N \in \mathbb{N}$. Sejam também $X_1, \ldots, X_N$ e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Denotaremos por $\mathcal{L}_a(^N(X_1 \times \ldots \times X_N), Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações N-lineares $A : X_1 \times \ldots \times X_N \to Y$. Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^N(X_1 \times \ldots \times X_N), Y)$, definimos

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_N)\| \ : \ x_j \in X, \ \max_j \|x_j\| \leq 1\}$$

e notemos que esta função define uma norma no espaço das aplicações N-lineares contínuas, que denotamos por $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N), Y)$. Quando $X_1 = \ldots = X_N = X$, escrevemos $\mathcal{L}(^N X, Y)$. Quando $N = 1$, denotaremos $\mathcal{L}(^1 X, Y)$ por $\mathcal{L}(X, Y)$. Já quando $Y = \mathbb{K}$, simplificamos a notação $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N), \mathbb{K})$ para a notação $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$.

Proposição 1.2.1 ([Muj86], pg. 2.)**.** Seja $N \in \mathbb{N}$ e considere os espaços normados $X_1, \ldots, X_N$ e Y. Se $A \in \mathcal{L}_a(^N(X_1 \times \ldots \times X_N), Y)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é contínua.

(b) A é contínua na origem.

(c) $\|A\| < \infty$.

(d) Existe $M > 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_N)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_n\|$, para cada $(x_1, \ldots, x_N) \in X_1 \times \ldots \times X_N$.

Proposição 1.2.2 ([Muj86], pg. 2)**.** Se $N \in \mathbb{N}$ e Y é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N), Y)$ é um espaço de Banach para quaisquer espaços normados $X_1, \ldots, X_N$.

Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $N \in \mathbb{N}$. Denote por S_N o conjunto de todas as permutações $\theta : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$. Dizemos que uma aplicação $A : X^N = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{N-vezes} \to Y$ é *simétrica* se

$$A(x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)}) = A(x_1, \ldots, x_N),$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_N \in X$ e qualquer permutação $\theta \in S_N$. Denotamos por $\mathcal{L}_{as}(^N X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações N-lineares simétricas de X^N em Y e por $\mathcal{L}_s(^N X, Y)$ o conjunto das aplicações N-lineares simétricas e contínuas.

Uma função $P : X \to Y$ é um *polinômio N-homogêneo* se existe uma aplicação N-linear $A \in \mathcal{L}_a(^N X, Y)$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$ para cada $x \in X$. Denotamos por $\mathcal{P}_a(^N X, Y)$ o espaço vetorial de todas os polinômios N-homogêneos de X em Y. Denotamos por $\mathcal{P}(^N X, Y)$ o subespaço de todas os polinômios N-homogêneos contínuos de X em Y. Para cada $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$, definimos

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| \ : \ x \in X, \ \|x\| \leq 1\}$$

e notemos que esta função define uma norma no espaço indicado. Quando $Y = \mathbb{K}$, escreveremos simplesmente $\mathcal{P}_a(^N X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_a(^N X)$ e $\mathcal{P}(^N X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}(^N X)$.

Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^N X, Y)$, seja $\hat{A} \in \mathcal{P}_a(^N X, Y)$ definida por $\hat{A}(x) = A(x, \ldots, x)$ para cada $x \in X$.

Teorema 1.2.3 ([Muj86], pg. 12)**.** Sejam X e Y espaços normados e $A \in \mathcal{L}_a(^N X, Y)$. Então

(a) a função $A \mapsto \hat{A}$ induz um isomorfismo entre $\mathcal{L}_{as}(^N X, Y)$ e $\mathcal{P}_a(^N X, Y)$;

(b) vale a seguinte desigualdade:
$$\|\hat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{N^N}{N!}\|\hat{A}\|.$$

Corolário 1.2.4. Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $N \in \mathbb{N}$. Se $P \in \mathcal{P}_a(^N X, Y)$, então existe uma única aplicação N-linear simétrica $A \in \mathcal{L}_{as}(^N X, Y)$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$ para cada $x \in X$.

Dizemos, portanto, que A é a aplicação multilinear associada ao polinômio $\hat{A}$. O Teorema 1.2.3 nos dá uma ótima ferramenta para associarmos as normas de um polinômio homogêneo e de sua aplicação multilinear associada.

Corolário 1.2.5. Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e Y um espaço de Banach. Então $\mathcal{P}(^N X, Y)$ é um espaço de Banach, para cada $N \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.2.6 ([Muj86], pg. 13)**.** Sejam X e Y espaços normados. Para cada $P \in \mathcal{P}_a(^N X, Y)$ as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) P é contínuo.

(b) P é limitado em toda bola de raio finito.

(c) P é limitado em alguma bola aberta.

1.3 Extensões de Aplicações Multilineares

Nesta seção descreveremos extensões de aplicações multilineares contínuas. Tais extensões são de fundamental importância para o entendimento do trabalho, principalmente a partir da metade do terceiro capítulo. Definimos primeiramente as *extensões de Arens* para aplicações bilineares contínuas, feitas por Richard Arens em 1951 nos artigos [Are51a, Are51b]. Depois disso, passamos para as *extensões de Aron-Berner* feitas no artigo [AB78] e estudamos as *extensões de Davie-Gamelin* [DG89]. Por fim, mostramos que todas essas extensões coincidem. Para mais informações sobre essas extensões e suas variadas utilidades consulte [Las01, SGV00, Mur10].

1.3.1 Extensões de Arens

Sejam X, Y e Z espaços de Banach sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Considere uma aplicação bilinear e contínua $A : X \times Y \to Z$. Então, A goza das seguintes propriedades:

(1) $A(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda A(x_1, y) + A(x_2, y)$,

(2) $A(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda A(x, y_1) + A(x, y_2)$,

(3) $\|A\| = \sup\limits_{x,y \in B_X} \|A(x, y)\| \leq M$, para algum $M > 0$,

onde $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, x_1, x_2 \in X$ e $y, y_1, y_2 \in Y$.

Definiremos, a partir da aplicação bilinear contínua A, uma outra aplicação bilinear e contínua A^t conhecida como a *aplicação bilinear adjunta* ou *primeiro adjunto* de A. Tal aplicação é definida por $A^t : Z^* \times X \to Y^*$ e é dada por

$$A^t(z^*, x)(y) = z^*(A(x, y)),$$

para quaisquer $z^* \in Z^*$, $x \in X$ e $y \in Y$. Vamos provar que, de fato, A^t é bilinear e contínua, ou seja, que satisfaz as propriedades (1), (2) e (3) acima.

Para cada $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned} A^t(\lambda z_1^* + z_2^*, x)(y) &\overset{\text{def}}{=} (\lambda z_1^* + z_2^*)(A(x, y)) \\ &= \lambda z_1^*(A(x, y)) + z_2^*(A(x, y)) \\ &\overset{\text{def}}{=} \lambda A^t(z_1^*, x)(y) + A^t(z_2^*, x)(y) \\ &= (\lambda A^t(z_1^*, x) + A^t(z_2^*, x))(y), \end{aligned}$$

ou seja, $A^t(\lambda z_1^* + z_2^*, x) = \lambda A^t(z_1^*, x) + A^t(z_2^*, x)$, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $z_1^*, z_2^* \in Z^*$ e $x \in X$. Analogamente, para cada $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned} A^t(z^*, \lambda x_1 + x_2)(y) &\overset{\text{def}}{=} z^*(A(\lambda x_1 + x_2, y)) \\ &\overset{(1)}{=} z^*(\lambda A(x_1, y) + A(x_2, y)) \\ &= \lambda z^*(A(x_1, y)) + z^*(A(x_2, y)) \\ &\overset{\text{def}}{=} \lambda A^t(z^*, x_1)(y) + A^t(z^*, x_2)(y) \\ &= (\lambda A^t(z^*, x_1) + A^t(z^*, x_2))(y), \end{aligned}$$

ou seja, $A^t(z^*, \lambda x_1 + x_2) = \lambda A^t(z^*, x_1) + A^t(z^*, x_2)$, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $z^* \in Z^*$ e $x_1, x_2 \in X$. Então, A^t satisfaz (1) e (2). Além disso, para cada $y \in Y$, temos que

$$|A^t(z^*, x)(y)| = |z^*(A(x, y)) \leq \|z^*\| \|A(x, y)\| \leq \|z^*\| \|x\| \|y\| \|A\|.$$

Portanto, para cada $z^* \in Z^*$ e $x \in X$

$$\|A^t(z^*, x)\| \leq \|z^*\|\|x\|\|A\|.$$

Ou seja, A^t é uma aplicação bilinear contínua que satisfaz $\|A^t\| \leq \|A\|$.

Podemos, então, definir o *segundo adjunto* da aplicação bilinear contínua $A : X \times Y \longrightarrow Z$ por $A^{tt} = (A^t)^t$. Assim, $A^{tt} : Y^{**} \times Z^* \longrightarrow X^*$ é dada por

$$A^{tt}(y^{**}, z^*)(x) = y^{**}(A^t(z^*, x)),$$

para quaisquer $y^{**} \in Y^{**}$, $z^* \in Z^*$ e $x \in X$. Analogamente ao que acabamos de fazer, temos que A^{tt} é uma aplicação bilinear. Tal aplicação também é contínua como nos mostram os cálculos a seguir. Para cada $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} |A^{tt}(y^{**}, z^*)(x)| &\stackrel{\text{def}}{=} |y^{**}(A^t(z^*, x))| \\ &\leq \|y^{**}\|\|z^*\|\|x\|\|A^t\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|A^{tt}\| \leq \|A\|$, já que $\|A^t\| \leq \|A\|$.

Fazendo este procedimento mais uma vez, obtemos o *terceiro adjunto* de A,

$$A^{ttt} : X^{**} \times Y^{**} \longrightarrow Z^{**},$$

dado por

$$A^{ttt}(x^{**}, y^{**})(z^*) = x^{**}(A^{tt}(y^{**}, z^*)),$$

para quaisquer $x^{**} \in X^{**}$, $y^{**} \in Y^{**}$ e $z^* \in Z^*$. Novamente, A^{ttt} é uma aplicação bilinear contínua definida em $X^{**} \times Y^{**}$ que satisfaz $\|A^{ttt}\| \leq \|A\|$.

Através das inclusões canônicas $\delta_X : X \to X^{**}$, $\delta_Y : Y \to Y^{**}$ e $\delta_Z : Z \to Z^{**}$, queremos mostrar que a aplicação A^{ttt} se comporta como uma espécie de extensão de A no seguinte sentido:

$$A^{ttt}(\delta_X(x), \delta_Y(y)) = \delta_Z(A(x, y)). \tag{1.1}$$

Com efeito, para cada $x \in X$ e cada $y \in Y$, temos

$$\begin{aligned} A^{ttt}(\delta_X(x), \delta_Y(y))(z^*) &\stackrel{\text{def}}{=} \delta_X(x)(A^{tt}(\delta_Y(y), z^*)) \\ &= A^{tt}(\delta_Y(y), z^*)(x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \delta_Y(y)(A^t(z^*, x)) \\ &= A^t(z^*, x)(y) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} z^*(A(x, y)) \\ &= \delta_Z(A(x, y))(z^*), \end{aligned}$$

para qualquer $z^* \in Z^*$. Isto prova (1.1). Assim, como já temos que $\|A^{ttt}\| \leq \|A\|$ e pelo que vimos acima, segue que $\|A^{ttt}\| = \|A\|$. Dizemos que A^{ttt} é a *primeira extensão de Arens* de A.

Uma outra extensão de A também pode ser considerada. Se $A : X \times Y \longrightarrow Z$ é uma aplicação bilinear contínua definida em $X \times Y$, definimos a *transposta* de A como sendo a aplicação bilinear contínua $A^T : Y \times X \to Z$ dada por

$$A^T(y, x) = A(x, y),$$

para cada $y \in Y$ e cada $x \in X$. Pelo que fizemos acima, temos que A^{Tttt} é uma extensão de A^T e, então, a aplicação A^{TtttT} é uma extensão de A, chamada *segunda extensão de Arens* de A. Além disso, temos que $\|A^{TtttT}\| = \|A\|$, pois

$$\|A\| = \|A^T\| = \|A^{Tttt}\| = \|(A^{Tttt})^T\| = \|A^{TtttT}\|.$$

Quando $A : X \times Y \to Z$ é uma aplicação bilinear e contínua, podemos caracterizar as extensões A^{ttt} e A^{TtttT} através de redes w^*-convergentes. É o que faremos a partir de agora. O Lema 1.3.1 nos dirá que, para cada $y^{**} \in Y^{**}$ fixado, a aplicação $A^{ttt}(\,\cdot\,, y^{**}) : X^{**} \to Z^{**}$ é w^*-w^* contínua. Analogamente, para cada $x^{**} \in X^{**}$ fixado, a aplicação $A^{TtttT}(x^{**}, \,\cdot\,) : Y^{**} \to Z^{**}$ é w^*-w^* contínua. A partir daqui, não faremos distinção entre $\delta_X(x)$ e x, para cada $x \in X$.

Lema 1.3.1. Sejam X, Y e Z espaços normados. Seja $A : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear e contínua.

(a) Se $(x_\alpha) \subset X$ é uma rede em X tal que $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$, então

$$A^{ttt}(x^{**}, y^{**}) = \lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha, y^{**}),$$

para cada $y^{**} \in Y^{**}$.

(b) Se $(y_\beta) \subset Y$ é uma rede em Y tal que $y_\beta \xrightarrow{w^*} y^{**}$, então

$$A^{TtttT}(x^{**}, y^{**}) = \lim_\beta A^{TtttT}(x^{**}, y_\beta),$$

para cada $x^{**} \in X^{**}$.

Demonstração. (a) Tome $(x_\alpha) \subset X$ uma rede em X tal que $x_\alpha \xrightarrow{w^*} 0$. Daí, $x_\alpha(x^*) \longrightarrow 0$, para cada $x^* \in X^*$. Portanto, para cada $z^* \in Z^*$, temos que

$$\lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha, y^{**})(z^*) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_\alpha x_\alpha(A^{tt}(y^{**}, z^*)) = 0,$$

pois $A^{tt}(y^{**}, z^*) \in X^*$. Assim, se $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$, então $x_\alpha - x^{**} \xrightarrow{w^*} 0$ e, portanto, $\lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha - x^{**}, y^{**})(z^*) = 0$, para cada $z^* \in Z^*$. Como A^{ttt} é bilinear, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha - x^{**}, y^{**})(z^*) \\ &= \lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha, y^{**})(z^*) - A^{ttt}(x^{**}, y^{**})(z^*), \end{aligned}$$

para cada $z^* \in Z^*$, ou seja, $A^{ttt}(x^{**}, y^{**}) = \lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha, y^{**})$.
(b) Tome $(y_\beta) \subset Y$ uma rede tal que $y_\beta \xrightarrow{w^*} 0$. Então $y_\beta(y^*) \longrightarrow 0$, para cada $y^* \in Y^*$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_\beta A^{TtttT}(x^{**}, y_\beta)(z^*) &= \lim_\beta A^{Tttt}(y_\beta, x^{**})(z^*)\\ &\overset{\text{def}}{=} \lim_\beta y_\beta(A^{Ttt}(x^{**}, z^*))\\ &= 0,\end{aligned}$$

pois $A^{Ttt}(x^{**}, z^*) \in Y^*$. Daí, segue o resultado. $\square$

Lema 1.3.2. Sejam X, Y e Z espaços normados. Seja $A : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear e contínua.

(a) Para cada $x^{**} \in X^{**}$ e $y \in Y$, temos

$$A^{ttt}(x^{**}, \delta_Y(y)) = A^{TtttT}(x^{**}, \delta_Y(y)).$$

(b) Para cada $y^{**} \in Y^{**}$ e $x \in X$, temos

$$A^{ttt}(\delta_X(x), y^{**}) = A^{TtttT}(\delta_X(x), y^{**}).$$

Demonstração. (a) Veja que para cada $z^* \in Z^*$, temos

$$A^{ttt}(x^{**}, \delta_Y(y))(z^*) \overset{\text{def}}{=} x^{**}(A^{tt}(\delta_Y(y), z^*))$$

e

$$\begin{aligned}A^{TtttT}(x^{**}, \delta_Y(y))(z^*) &= A^{Tttt}(\delta_Y(y), x^{**})(z^*)\\ &\overset{\text{def}}{=} \delta_Y(y)(A^{Ttt}(x^{**}, z^*))\\ &= A^{Ttt}(x^{**}, z^*)(y)\\ &\overset{\text{def}}{=} x^{**}(A^{Tt}(z^*, y)).\end{aligned}$$

Assim, como $A^{tt}(\delta_Y(y), z^*)$ e $A^{Tt}(z^*, y)$ são elementos de X^*, segue que para cada $x \in X$, temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}A^{tt}(\delta_Y(y), z^*)(x) &\overset{\text{def}}{=} \delta_Y(y)(A^t(z^*, x))\\ &= A^t(z^*, x)(y)\\ &\overset{\text{def}}{=} z^*(A(x, y))\end{aligned}$$

e

$$A^{Tt}(z^*, y)(x) \overset{\text{def}}{=} z^*(A^T(y, x)) = z^*(A(x, y)),$$

ou seja, $A^{ttt}(x^{**}, \delta_Y(y)) = A^{TtttT}(x^{**}, \delta_Y(y))$, para cada $x^{**} \in X^{**}$ e $y \in Y$.

(b) Veja que, para cada $z^* \in Z^*$, temos

$$\begin{aligned} A^{ttt}(\delta_X(x), y^{**})(z^*) &\overset{\text{def}}{=} \delta_X(x)(A^{tt}(y^{**}, z^*)) \\ &= A^{tt}(y^{**}, z^*)(x) \\ &\overset{\text{def}}{=} y^{**}(A^t(z^*, x)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^{TtttT}(\delta_X(x), y^{**})(z^*) &= A^{Tttt}(y^{**}, \delta_X(x))(z^*) \\ &\overset{\text{def}}{=} y^{**}(A^{Ttt}(\delta_X(x), z^*)). \end{aligned}$$

Assim, para cada $y \in Y$,

$$A^t(z^*, x)(y) \overset{\text{def}}{=} z^*(A(x, y))$$

e

$$\begin{aligned} A^{Ttt}(\delta_X(x), z^*)(y) &\overset{\text{def}}{=} \delta_X(x)(A^{Tt}(z^*, y)) \\ &= A^{Tt}(z^*, y)(x) \\ &\overset{\text{def}}{=} z^*(A^T(y, x)) \\ &= z^*(A(x, y)), \end{aligned}$$

ou seja, $A^{ttt}(\delta_X(x), y^{**}) = A^{TtttT}(\delta_X(x), y^{**})$, para cada $x \in X$ e $y^{**} \in Y^{**}$.

$\square$

Lema 1.3.3. Sejam X e Y espaços normados. Dados $x^{**} \in X^{**}$, uma rede $(x_\alpha) \subset X$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$, $y^{**} \in Y^{**}$ e uma rede $(y_\beta) \subset Y$ tal que $y_\beta \xrightarrow{w^*} y^{**}$, temos

(a) $A^{ttt}(x^{**}, y^{**}) = \lim_\alpha \lim_\beta A(x_\alpha, y_\beta)$,

(b) $A^{TtttT}(x^{**}, y^{**}) = \lim_\beta \lim_\alpha A(x_\alpha, y_\beta)$.

Demonstração. De fato, segue dos lemas 1.3.1 e 1.3.2 que:

$$\begin{aligned} \lim_\alpha \lim_\beta A(x_\alpha, y_\beta) &= \lim_\alpha \lim_\beta A^{ttt}(x_\alpha, y_\beta) \\ &= \lim_\alpha \lim_\beta A^{TtttT}(x_\alpha, y_\beta) \\ &= \lim_\alpha A^{TtttT}(x_\alpha, y^{**}) \\ &= \lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha, y^{**}) \\ &= A^{ttt}(x^{**}, y^{**}). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_\beta \lim_\alpha A(x_\alpha, y_\beta) &= \lim_\beta \lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha, y_\beta) \\
&= \lim_\beta A^{ttt}(x^{**}, y_\beta) \\
&= \lim_\beta A^{TtttT}(x^{**}, y_\beta) \\
&= A^{TtttT}(x^{**}, y^{**}).
\end{aligned}$$

□

Em consequência de todos estes resultados que provamos até agora, fica fácil justificar a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1.3.4. Sejam X, Y e Z espaços normados. Seja $A : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear e contínua. São equivalentes as seguintes afirmações.

(a) $A^{ttt} = A^{TtttT}$.

(b) Para cada $x^{**} \in X^{**}$ e $y^{**} \in Y^{**}$, existem redes $(x_\alpha) \subset X$ e $(y_\beta) \subset Y$ com $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$ e $y_\beta \xrightarrow{w^*} y^{**}$ tais que
$$\lim_\alpha \lim_\beta A(x_\alpha, y_\beta) = \lim_\beta \lim_\alpha A(x_\alpha, y_\beta).$$

Observemos também um fato importante. Lembre-se que uma aplicação bilinear A é simétrica se $A = A^T$. Então, supondo que A é simétrica e que $A^{ttt} = A^{TtttT}$, temos

$$A^{ttt} = A^{TtttT} = (A^T)^{tttT} = A^{tttT} = (A^{ttt})^T,$$

isto é, A^{ttt} é uma aplicação bilinear simétrica. Reciprocamente, se $A^{ttt} = A^{tttT}$ e $A = A^T$, então

$$A^{ttt} = (A^T)^{tttT} = A^{TtttT}.$$

Para terminar essa seção, note que se $X = Y$ e $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$, então

$$\begin{aligned}
A^{ttt}(x^{**}, x^{**}) &= \lim_\alpha \lim_\alpha A(x_\alpha, x_\alpha) \\
&= \lim_\alpha \lim_\alpha A^{ttt}(x_\alpha, x_\alpha) \\
&= \lim_\alpha A^{ttt}(x^{**}, x_\alpha) \\
&= \lim_\alpha A^{TtttT}(x^{**}, x_\alpha) \\
&= A^{TtttT}(x^{**}, x^{**}).
\end{aligned}$$

Observe que o Lema 1.3.3 nos diz que A^{ttt} e A^{TtttT} podem ser descritos através de redes w^*-convergentes independentemente da escolha de tais redes. Foi isso que utilizamos na primeira igualdade acima. Isso nos ajuda a definir a extensão canônica de um polinômio 2-homogêneo: se P é um polinômio 2-homogêneo definido em um espaço de Banach X e A é a sua aplicação bilinear simétrica associada, então a *extensão canônica* de P para o bidual X^{**} é definida como sendo

$$\tilde{P}(x^{**}) = A^{ttt}(x^{**}, x^{**}) = A^{TtttT}(x^{**}, x^{**}),$$

para cada $x^{**} \in X^{**}$. Em [DG89] é provado que $\|P\| = \|\tilde{P}\|$, onde P é um polinômio N-homogêneo. Veja também [Pel01]. Usaremos essa extensão para provar o Teorema 3.3.1 no Capítulo 3. Em geral temos que $\|A^{ttt}\| = \|A^{TtttT}\|$, mas $A^{ttt} \neq A^{TtttT}$. Veja por exemplo [AGM03].

1.3.2 Extensões de Aron-Berner

Nesta e nas demais seções, estaremos interessados em extensões de aplicações multilineares cujo contradomínio é o corpo $\mathbb{K}$. Na verdade, podemos definir similarmente extensões para aplicações multilineares do tipo $A : X_1 \times \ldots \times X_N \to Y$, como podemos ver em [Las01]. Dada uma aplicação N-linear $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$, estamos interessados em obter uma extensão $\overline{A} : X_1^{**} \times \ldots \times X_N^{**} \to \mathbb{K}$ de A no seguinte sentido: para quaisquer $x_1 \in X_1, \ldots, x_N \in X_N$, temos que

$$\overline{A}(\delta_{X_1}(x_1), \ldots, \delta_{X_N}(x_N)) = A(x_1, \ldots, x_N), \tag{1.2}$$

onde $\delta_{X_i} : X_i \to X_i^{**}$ é a inclusão canônica de X_i em X_i^{**}, com $i = 1, \ldots, N$. Para isso, usaremos uma construção devida a Richard M. Aron e Paul D. Berner em [AB78]. Tal construção nos dará extensões de uma aplicação N-linear, como desejado, que ficaram conhecidas como *extensões de Aron-Berner*. Com o intuito de ilustrar este método com mais detalhes, consideremos primeiramente o caso $N = 3$.

Sejam X_1, X_2 e X_3 espaços de Banach sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, e $A \in \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3))$. Seja também $z_3 \in X_3^{**}$. Definimos uma aplicação

$$\overline{z_3} : \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3)) \longrightarrow \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_2))$$

por

$$\overline{z_3}(\phi)(x_1, x_2) := z_3(\phi(x_1, x_2, \cdot\,)),$$

onde $\phi \in \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3))$ e $\phi(x_1, x_2, \cdot\,) : X_3 \longrightarrow \mathbb{K}$ é a aplicação linear contínua definida em X_3 dada por

$$\phi(x_1, x_2, \cdot\,)(x) = \phi(x_1, x_2, x),$$

para cada $x \in X_3$. Então $\overline{z_3}$ é uma aplicação linear, já que para quaisquer $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3))$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\overline{z_3}(\phi_1 + \lambda\phi_2)(x_1, x_2) &\overset{\text{def}}{=} z_3((\phi_1 + \lambda\phi_2)(x_1, x_2, \cdot\,)) \\
&= z_3(\phi_1(x_1, x_2, \cdot\,) + \lambda\phi_2(x_1, x_2, \cdot\,)) \\
&= z_3(\phi_1(x_1, x_2, \cdot\,)) + \lambda z_3(\phi_2(x_1, x_2, \cdot\,)) \\
&= \overline{z_3}(\phi_1)(x_1, x_2) + \lambda\overline{z_3}(\phi_2)(x_1, x_2) \\
&= (\overline{z_3}(\phi_1) + \lambda\overline{z_3}(\phi_2))(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

para qualquer $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, ou seja,

$$\overline{z_3}(\phi_1 + \lambda\phi_2) = \overline{z_3}(\phi_1) + \lambda\overline{z_3}(\phi_2).$$

Além disso, $\overline{z_3}$ é uma aplicação contínua como nos mostram os cálculos a seguir:

$$\begin{aligned}
\|\overline{z_3}\| = \sup_{\|\phi\|=1} \|\overline{z_3}(\phi)\| &= \sup_{\|\phi\|=1}\left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ i=1,2}} |\overline{z_3}(\phi)(x_1,x_2)|\right)\\
&= \sup_{\|\phi\|=1}\left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ i=1,2}} |z_3(\phi(x_1,x_2,\ \cdot\ )|\right)\\
&\leq \|z_3\|\cdot \sup_{\|\phi\|=1}\left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ i=1,2}} \|\phi(x_1,x_2\ \cdot\ )\|\right)\\
&= \|z_3\|\cdot \sup_{\|\phi\|=1}\left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ i=1,2}} \left(\sup_{\|x\|=1} |\phi(x_1,x_2,x)|\right)\right)\\
&\leq \|z_3\|.
\end{aligned}$$

Feito isso, definimos uma outra aplicação linear da seguinte maneira: seja $z_2 \in X_2^{**}$ e considere

$$\overline{z_2} : \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_2)) \longrightarrow \mathcal{L}(^1(X_1)) = X_1^*$$

dada por

$$\overline{z_2}(\phi)(x_1) = z_2(\phi(x_1,\ \cdot\ )),$$

onde $\phi \in \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_2))$ e $\phi(x_1,\ \cdot\ ) : X_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ é a aplicação linear contínua definida em X_2 por

$$\phi(x_1,\ \cdot\ )(x) = \phi(x_1,x),$$

para cada $x \in X_2$. Sendo assim, temos que $\overline{z_2}$ é linear e satisfaz a desigualdade $\|\overline{z_2}\| \leq \|z_2\|$.

Finalmente, seja $z_1 \in X_1^{**}$. Podemos, então, definir

$$\overline{z_1} : \mathcal{L}(^1(X_1)) \approx X_1^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

por

$$\overline{z_1}(x_1^*) = z_1(x_1^*),$$

onde $x_1^* \in X_1^*$. Assim, $\overline{z_1}$ é linear e satisfaz $\|\overline{z_1}\| \leq \|z_1\|$.

Considerando essas três aplicações, estamos agora em condições de definirmos *uma* extensão da aplicação trilinear $A \in \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3))$. Se $z_1 \in X_1^{**}, z_2 \in X_2^{**}$ e $z_3 \in X_3^{**}$, então a função $\overline{A} : X_1^{**} \times X_2^{**} \times X_3^{**} \to \mathbb{K}$ dada por

$$\overline{A}(z_1,z_2,z_3) := \overline{z_1} \circ \overline{z_2} \circ \overline{z_3}(A)$$

é uma extensão de A para $X_1^{**} \times X_2^{**} \times X_3^{**}$ chamada *extensão de Aron-Berner* de A. Vamos provar que $\overline{A} \in \mathcal{L}(^3(X_1^{**} \times X_2^{**} \times X_3^{**}))$ e que, de fato, acontece de $\overline{A}$ ser uma extensão de A, ou seja,

$$\overline{A}(\delta_{X_1}(x_1), \delta_{X_2}(x_2), \delta_{X_3}(x_3)) = A(x_1,x_2,x_3), \tag{1.3}$$

para cada $(x_1,x_2,x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3$. Para a linearidade em cada coordenada, note que as aplicações

$\overline{z_1}, \overline{z_2}$ e $\overline{z_3}$ gozam da seguinte propriedade:

$$\overline{z_i^{(1)} + \lambda z_i^{(2)}} = \overline{z_i^{(1)}} + \lambda \overline{z_i^{(2)}},$$

onde $z_i^{(1)}, z_i^{(2)} \in X_i^{**}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Por exemplo, se $i = 2$ e $z_2^{(1)}, z_2^{(2)} \in X_2^{**}$, então

$$\begin{aligned} \overline{z_2^{(1)} + \lambda z_2^{(2)}}(\phi)(x_1) &\overset{\text{def}}{=} (z_2^{(1)} + \lambda z_2^{(2)})(\phi(x_1, \cdot\,)) \\ &= z_2^{(1)}(\phi(x_1, \cdot\,)) + \lambda z_2^{(2)}(\phi(x_1, \cdot\,)) \\ &\overset{\text{def}}{=} \overline{z_2^{(1)}}(\phi)(x_1) + \lambda \overline{z_2^{(2)}}(\phi)(x_1) \\ &= (\overline{z_2^{(1)}} + \lambda \overline{z_2^{(2)}})(\phi)(x_1), \end{aligned}$$

para quaisquer $\phi \in \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_2))$ e $x_1 \in X_1$. Logo, $\overline{z_2^{(1)} + \lambda z_2^{(2)}} = \overline{z_2^{(1)}} + \lambda \overline{z_2^{(2)}}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \overline{A}(z_1, z_2^{(1)} + \lambda z_2^{(2)}, z_3) &= \overline{z_1} \circ (\overline{z_2^{(1)} + \lambda z_2^{(2)}}) \circ \overline{z_3}(A) \\ &= \overline{z_1} \circ (\overline{z_2^{(1)}} + \lambda \overline{z_2^{(2)}}) \circ \overline{z_3}(A) \\ &= \overline{z_1} \circ \overline{z_2^{(1)}} \circ \overline{z_3}(A) + \lambda(\overline{z_1} \circ \overline{z_2^{(2)}} \circ \overline{z_3})(A) \\ &= \overline{A}(z_1, \overline{z_2^{(1)}}, z_3) + \lambda \overline{A}(z_1, \overline{z_2^{(2)}}, z_3). \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{A}$ é linear na segunda coordenada e, fazendo o mesmo para as demais coordenadas, temos que $\overline{A}$ é uma aplicação trilinear. Antes de provar que $\overline{A}$ é contínua, usaremos as definições das funções $\overline{z_1}, \overline{z_2}$ e $\overline{z_3}$ para provar (1.3). Com efeito, para quaisquer $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ e $x_3 \in X_3$, temos

$$\begin{aligned} \overline{A}(\delta_{X_1}(x_1), \delta_{X_2}(x_2), \delta_{X_3}(x_3)) &= \overline{\delta_{X_1}(x_1)} \circ \overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A) \\ &= \overline{\delta_{X_1}(x_1)} \left(\overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A) \right). \end{aligned}$$

Note que

$$\overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)} : \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3)) \longrightarrow \mathcal{L}(^1(X_1)) = X_1^*,$$

ou seja, $\overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A) \in X_1^*$. Logo, pela definição de $\overline{z_1}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{X_1}(x_1)}(\overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A)) &= \delta_{X_1}(x_1)(\overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A)) \\ &= (\overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A))(x_1) \\ &= \overline{\delta_{X_2}(x_2)} \circ \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A)(x_1) \\ &= \overline{\delta_{X_2}(x_2)}(\overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A))(x_1). \end{aligned}$$

Agora, como $\overline{\delta_{X_3}(x_3)} : \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3)) \longrightarrow \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_2))$, temos que $\overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A) \in \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_2))$ e, pela definição de $\overline{z_2}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{X_2}(x_2)}(\overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A))(x_1) &= \delta_{X_2}(x_2)(\overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A)(x_1, \cdot\,)) \\ &= \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A)(x_1, \cdot\,)(x_2) \\ &= \overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Pela definição de $\overline{z_3}$, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\delta_{X_3}(x_3)}(A)(x_1,x_2) &= \delta_{X_3}(x_3)(A)(x_1,x_2,\ \cdot\ ) \\ &= A(x_1,x_2,\ \cdot\ )(x_3) \\ &= A(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

Isto prova que $\overline{A}$ é uma extensão de A para $X_1^{**}\times X_2^{**}\times X_3^{**}$. Finalmente, temos

$$\begin{aligned}\|\overline{A}\| &= \sup_{\substack{\|z_i\|=1\\ i=1,2,3}} |\overline{A}(z_1,z_2,z_3)| \\ &= \sup_{\substack{\|z_i\|=1\\ i=1,2,3}} |\overline{z_1}\circ\overline{z_2}\circ\overline{z_3}(A)| \\ &\leq \|A\| \sup_{\substack{\|z_i\|=1\\ i=1,2,3}} \|\overline{z_1}\|\|\overline{z_2}\|\|\overline{z_3}\| \\ &\leq \|A\| \sup_{\substack{\|z_i\|=1\\ i=1,2,3}} \|z_1\|\|z_2\|\|z_3\| \\ &\leq \|A\|.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\|\overline{A}\|\geq\|A\|$, já que $\overline{A}$ é uma extensão de A, segue que $\|A\|=\|\overline{A}\|$.

Em resumo, dado $A\in\mathcal{L}(^3(X_1\times X_2\times X_3))$, conseguimos uma aplicação trilinear contínua $\overline{A}\in\mathcal{L}(^3(X_1^{**}\times X_2^{**}\times X_3^{**}))$ definida em $X_1^{**}\times X_2^{**}\times X_3^{**}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\|\overline{A}\|=\|A\|$,

(b) $\overline{A}(\delta_{X_1}(x_1),\delta_{X_2}(x_2),\delta_{X_3}(x_3))=A(x_1,x_2,x_3)$, seja qual for a tripla $(x_1,x_2,x_3)\in X_1\times X_2\times X_3$.

Observação: Observe que a extensão $\overline{A}$ que obtemos para A foi encontrada estendendo primeiramente a última variável da aplicação trilinear A. Entretanto, poderíamos ter escolhido qualquer uma das variáveis para começar. Por exemplo, vamos iniciar estendendo a segunda variável e, em seguida, a primeira. Considere

$$A_1: X_1\times X_2^{**}\times X_3\longrightarrow\mathbb{K}$$

dada por

$$A_1(x_1,z_2,x_3):=z_2(A(x_1,\ \cdot\ ,x_3)),$$

onde $x_1\in X_1$, $z_2\in X_2^{**}$, $x_3\in X_3$ e $A(x_1,\ \cdot\ ,x_3):X_2\longrightarrow\mathbb{K}$ é o funcional linear contínuo definido por

$$A(x_1,\ \cdot\ ,x_3)(x)=A(x_1,x,x_3),$$

para cada $x\in X_2$. Agora, defina

$$A_2: X_1^{**}\times X_2^{**}\times X_3\longrightarrow\mathbb{K}$$

pondo

$$A_2(z_1,z_2,x_3):=z_1(A_1(\ \cdot\ ,z_2,x_3)),$$

onde $z_1\in X_1^{**}$, $z_2\in X_2^{**}$, $x_3\in X_3$ e $A_1(\ \cdot\ ,z_2,x_3):X_1\longrightarrow\mathbb{K}$ é o funcional linear contínuo definido por

$$A_1(\ \cdot\ ,z_2,x_3)(x)=A_1(x,z_2,x_3),$$

para cada $x \in X_1$. Finalmente, seja

$$A_3 : X_1^{**} \times X_2^{**} \times X_3^{**} \longrightarrow \mathbb{K}$$

dada por

$$A_3(z_1, z_2, z_3) := z_3(A_2(z_1, z_2, \cdot\,)),$$

onde $z_1 \in X_1^{**}$, $z_2 \in X_2^{**}$, $z_3 \in X_3^{**}$ e $A_2(z_1, z_2, \cdot\,) : X_3 \longrightarrow \mathbb{K}$ é o funcional linear contínuo dado por

$$A_2(z_1, z_2, \cdot\,) := A_2(z_1, z_2, x),$$

para cada $x \in X_3$. Assim, tomando $\overline{A} \equiv A_3$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{A}(\delta_{X_1}(x_1), \delta_{X_2}(x_2), \delta_{X_3}(x_3)) &= A_3(\delta_{X_1}(x_1), \delta_{X_2}(x_2), \delta_{X_3}(x_3)) \\
&= \delta_{X_3}(A_2(\delta_{X_1}(x_1), \delta_{X_2}(x_2), \cdot\,)) \\
&= A_2(\delta_{X_1}(x_1), \delta_{X_2}(x_2), \cdot\,)(x_3) \\
&= A_2(\delta_{X_1}(x_1), \delta_{X_2}(x_2), x_3) \\
&= \delta_{X_1}(x_1)(A_1(\,\cdot\,, \delta_{X_2}(x_2), x_3)) \\
&= A_1(\,\cdot\,, \delta_{X_2}(x_2), x_3)(x_1) \\
&= A_1(x_1, \delta_{X_2}(x_2), x_3) \\
&= \delta_{X_2}(x_2)(A(x_1, \,\cdot\,, x_3)) \\
&= A(x_1, \,\cdot\,, x_3)(x_2) \\
&= A(x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ e $x_3 \in X_3$. Além disso, $\|\overline{A}\| = \|A_3\| = \|A\|$. Note que, fazendo analogia com os z_i's definidos anteriormente, essencialmente, o que fizemos acima foi o seguinte:

(1°) Definimos a aplicação $\overline{z_2} : \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3)) \longrightarrow \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_3))$ por

$$\overline{z_2}(\phi)(x_1, x_3) := z_2(\phi(x_1, \,\cdot\,, x_3)),$$

onde $z_2 \in X_2^{**}$ e $\phi \in \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3))$.

(2°) Definimos $\overline{z_1} : \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_3)) \longrightarrow \mathcal{L}(^1(X_3))$ por

$$\overline{z_1}(\phi)(x_3) := z_1(\phi(\,\cdot\,, x_3)),$$

onde $z_1 \in X_1^{**}$ e $\phi \in \mathcal{L}(^2(X_1 \times X_3))$.

(3°) Definimos $\overline{z_3} : \mathcal{L}(^1(X_3)) \approx X_3^* \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$\overline{z_3}(z_3^*) := z_3(z_3^*),$$

onde $z_3^* \in X_3^*$ e $z_3 \in X_3^{**}$.

(4°) E, por fim, definimos a extensão de Aron-Berner $\overline{A}$ de A por

$$\overline{A}(z_1, z_2, z_3) := \overline{z_3} \circ \overline{z_1} \circ \overline{z_2},$$

onde $z_1 \in X_1^{**}$, $z_2 \in X_2^{**}$ e $z_3 \in X_3^{**}$.

Com isso, existem $6 = 3!$ maneiras de estender uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^3(X_1 \times X_2 \times X_3))$. Passamos agora a considerar o caso geral.

Sejam $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ e $z_j \in X_j^{**}$. Definimos

$$\overline{z_j} : \mathcal{L}(^j(X_1 \times \ldots \times X_j)) \longrightarrow \mathcal{L}(^{j-1}(X_1 \times \ldots \times X_{j-1}))$$

por

$$\overline{z_j}(A)(x_1, \ldots, x_{j-1}) = z_j(A(x_1, \ldots, x_{j-1}, \ \cdot \ )),$$

onde $A(x_1, \ldots, x_{j-1}, \ \cdot \ ) : X_j \longrightarrow \mathbb{K}$ é o funcional linear dado por

$$A(x_1, \ldots, x_{j-1}, \ \cdot \ )(x) = A(x_1, \ldots, x_{j-1}, x),$$

para cada $x \in X_j$. Então, $\overline{z_j}$ é linear e satisfaz a desigualdade $\|\overline{z_j}\| \leq \|z_j\|$. Assim, dado $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$, definimos a aplicação $\overline{A} \in \mathcal{L}(^N(X_1^{**} \times \ldots \times X_N^{**}))$ por

$$\overline{A}(z_1, \ldots, z_N) := \overline{z_1} \circ \ldots \circ \overline{z_N}(A),$$

onde $z_i \in X_i^{**}$, para cada $i = 1, \ldots, N$. Logo, pela definição dos $\overline{z_j}$'s, tem-se

$$\begin{aligned} \overline{A}(\delta_{X_1}(x_1), \ldots, \delta_{X_N}(x_N)) &= \overline{\delta_{X_1}(x_1)} \circ \ldots \circ \overline{\delta_{X_N}(x_N)}(A) \\ &= A(x_1, \ldots, x_N), \end{aligned}$$

para cada $(x_1, \ldots, x_N) \in X_1 \times \ldots \times X_N$. Além disso, como $\|\overline{z_j}\| \leq \|z_j\|$, para cada j, temos $\|\overline{A}\| = \|A\|$. Novamente, veja que poderíamos começar a construir a extensão $\overline{A}$ de A por qualquer uma das variáveis e, portanto, existem $N!$ maneiras distintas para estender a aplicação A. Mais especificamente, podemos definir uma extensão $\overline{A}$ de A, por

$$\overline{A}(z_1, \ldots, z_N) := \overline{z_{\theta(1)}} \circ \cdots \circ \overline{z_{\theta(N)}}(A),$$

onde θ é uma permutação do conjunto de índices $\{1, \ldots, N\}$ e os $\overline{z_{\theta(j)}}$'s são definidos de maneira a fazer sentido a composta. Estas extensões são conhecidas como *extensões de Aron-Berner*.

1.3.3 Extensões de Davie-Gamelin

Em 1989 Alexander M. Davie e Theodore W. Gamelin forneceram um método simples para obter extensões de aplicações multilineares [DG89]. Este método é descrito a seguir. Dado $z_j \in X_j^{**}$, pelo Teorema de Goldstine, existe uma rede $(x_{\alpha_j}) \subset X_j$ tal que $\delta_{X_j}(x_{\alpha_j}) \xrightarrow{w^*} z_j$, ou seja, para cada

$x_j^* \in X_j^*$, tem-se $\delta_{X_j}(x_{\alpha_j})(x_j^*) \longrightarrow z_j(x_j^*)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{z_j}(A)(x_1, \ldots, x_{j-1}) &= z_j(A(x_1, \ldots, x_{j-1}, \,\cdot\,)) \\ &= \lim_{\alpha_j} \delta_{X_j}(x_{\alpha_j})(A(x_1, \ldots, x_{j-1}, \,\cdot\,)) \\ &= \lim_{\alpha_j} A(x_1, \ldots, x_{j-1}, \,\cdot\,)(x_{\alpha_j}) \\ &= \lim_{\alpha_j} A(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{\alpha_j}),\end{aligned}$$

para cada $j = 1, \ldots, N$. Logo,

$$\begin{aligned}\overline{A}(z_1, \ldots, z_N) &= \overline{z_1} \circ \cdots \circ \overline{z_N}(A) \\ &= \lim_{x_{\alpha_1} \to z_1} \cdots \lim_{x_{\alpha_N} \to z_N} A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_N}),\end{aligned}$$

onde (x_{α_i}) são redes w^* convergentes para z_i, para cada $i = 1, \ldots, N$. Isto nos diz que podemos definir a extensão de Aron-Berner da seguinte maneira: dado $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$, definimos $\overline{A} \in \mathcal{L}(^N(X_1^{**} \times \ldots \times X_N^{**}))$ por

$$\overline{A}(z_1, \ldots, z_N) := \lim_{x_{\alpha_1} \to z_1} \cdots \lim_{x_{\alpha_N} \to z_N} A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_N}),$$

onde $x_{\alpha_i} \xrightarrow{w^*} z_i$, para cada $i = 1, \ldots N$. Esta forma alternativa de escrever a extensão de A é chamada de *extensão de Davie-Gamelin* de $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$.

Note que da mesma maneira que as extensões de Aron-Berner, é possível estender uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ de $N!$ maneiras distintas, uma para cada ordem dos limites acima. Sendo assim, podemos definir a extensão de Davie-Gamelin de uma forma mais geral. Dadas uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ e uma permutação θ do conjunto $\{1, \ldots, N\}$, definimos

$$A_\theta(z_1, \ldots, z_N) := \lim_{d_{\theta(N)}} \cdots \lim_{d_{\theta(1)}} A(x_{d_1}, \ldots, x_{d_N}), \tag{1.4}$$

onde $x_{d_i} \xrightarrow{w^*} z_i$ para cada $i = 1, \ldots, N$.

Na verdade, como vimos nos cálculos feitos acima, as extensões de Davie-Gamelin e de Aron-Berner são as mesmas. Note também que as extensões de Davie-Gamelin coincidem com as extensões de Arens, como vimos no Lema 1.3.3. Isso faz com que as extensões de Davie-Gamelin, de Aron-Berner e de Arens sejam as mesmas, no fim das contas. Por isso, no Capítulo 3, faremos uso apenas das extensões de Davie-Gamelin por serem mais convenientes para os cálculos.

Capítulo 2

O Teorema de Bishop-Phelps

2.1 Introdução

Um funcional $x^* \in X^*$ *atinge a norma* quando existe $x_0 \in B_X$ tal que $\|x^*\| = |x^*(x_0)|$. Em inglês os funcionais que possuem esta propriedade são adjetivados de *norm attaining*. Em 1957, Robert C. James provou que um espaço de Banach separável é reflexivo se, e somente se, todo funcional de X^* atinge a norma. Sete anos mais tarde, ele conseguiu retirar a hipótese do espaço ser separável e conseguiu uma importante caracterização para espaços reflexivos (veja O Teorema de James no Apêndice A).

Depois que a versão do Teorema de James foi provada para espaços separáveis, Robert R. Phelps começou a investigar o comportamento dos funcionais que atingem a norma em espaços não reflexivos e descobriu, juntamente com Errett Bishop, que o conjunto dos funcionais que possuem esta propriedade é denso em X^*, desde que X seja um espaço de Banach. Por causa dos resultados que James havia provado, Phelps deu o nome de subreflexivo para tais espaços. Portanto, um espaço normado X é chamado de *subreflexivo* se o conjunto dos funcionais $x^* \in X^*$ que atingem a norma é denso em X^*. O nosso objetivo é provar o *teorema de Bishop-Phelps* que nos diz que *todo espaço de Banach é subreflexivo*. No artigo [BP63] é provada uma generalização do teorema acima que, por sua vez, sai como um corolário. Este capítulo é baseado nesta generalização e na referência [BJ09].

Nosso plano é tratar primeiramente o caso real, que é a parte mais dura do trabalho. O caso complexo é uma consequência imediata do caso real e, portanto, será tratado depois.

2.2 O caso real do Teorema de Bishop-Phelps

Sejam X um espaço normado *real*, C um subconjunto convexo de X e $x^* \in X^*$ um funcional linear contínuo. Dizemos que x^* é um *funcional suporte* para C se x^* é não nulo e existe $x_0 \in C$ tal que

$$x^*(x_0) = \sup_{x \in C} x^*(x).$$

Neste caso, dizemos que o ponto x_0 é um *ponto suporte* de C.

Dizemos que x^* é um *funcional módulo-suporte* para C, se x^* é não nulo e existe $x_0 \in C$ tal que

$$|x^*(x_0)| = \sup_{x \in C} |x^*(x)|.$$

Neste caso, dizemos que o ponto x_0 é um *ponto módulo-suporte* de C.

Observe que se C é um conjunto simétrico, isto é, se $-x \in C$, para cada $x \in C$, então os conceitos de funcional suporte e ponto suporte coincidem com os conceitos de funcional módulo-suporte e ponto módulo-suporte, respectivamente. Observe também que se trocamos C por B_X, temos o conceito de funcional que atinge a norma. Estes conceitos são então uma generalização dos funcionais que atingem a norma. Por exemplo, se $x_0 \in B_X$ é tal que $|x^*(x_0)| = \|x^*\|$, então x_0 é um ponto módulo-suporte de B_X.

Note que se estivermos nas condições do Teorema 1.1.2 (Teorema de Separação de Hahn-Banach) e $x_0 \in C \cap B$, onde B é também um subconjunto convexo não vazio de X tal que $\operatorname{int}(B) \neq \emptyset$ e $C \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$, então

$$\sup_{x\in C} x^*(x) \leq \inf_{y\in B} x^*(y) \leq x^*(x_0) \leq \sup_{x\in C} x^*(x) \leq \inf_{y\in B} x^*(y),$$

isto é,

$$\sup_{x\in C} x^*(x) = x^*(x_0) = \inf_{y\in B} x^*(y).$$

Em particular, x^* é um funcional suporte para C e x_0 é um ponto-suporte de C.

Um subconjunto K de X é chamado de *cone convexo em* X se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) K é convexo;

(ii) $tx \in K$, sempre que $x \in K$ e $t \geq 0$.

Se K é um cone convexo em X, $A \subset X$ e $x_0 \in A$, dizemos que $K + x_0$ *suporta* A *em* x_0 se

$$(K + x_0) \cap A = \{x_0\}.$$

Estas são as definições que precisamos para provar o teorema de Bishop-Phelps. Além disso, são necessários alguns lemas e teoremas auxiliares. É o que faremos a partir de agora.

Lema 2.2.1. Sejam X um espaço normado real e C um subconjunto convexo de X. Se K é um cone convexo em X com interior não vazio, $K \neq X$, $x_0 \in C$ e $K + x_0$ suporta C em x_0, então existe $x^* \in X^*$ não nulo tal que

$$\sup_{x\in C} x^*(x) = x^*(x_0) = \inf_{y\in K+x_0} x^*(y). \tag{2.1}$$

Em particular, x^* é um funcional suporte para C e x_0 é um ponto suporte de C.

Demonstração. Seja $B = K + x_0$. Como $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$, temos $\operatorname{int}(B) \neq \emptyset$. Além disso, $C \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$. De fato, suponha que existe $y \in C \cap \operatorname{int}(B)$, com $y \neq x_0$. Como $\operatorname{int}(B) \subset B$, segue que $y \in C \cap B$ com $y \neq x_0$. Mas isto é um absurdo, pois $K + x_0$ suporta C em x_0, isto é, $C \cap B = \{x_0\}$. Agora, suponha que $x_0 \in C \cap \operatorname{int}(B)$. Assim, $x_0 \in \operatorname{int}(B)$. Isto quer dizer que existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset K + x_0$, ou seja, $B(0, r) \subset K$. Mas K é um cone convexo e se $B(0, r) \subset K$, segue que $t \cdot B(0, r) \subset K$ para cada $t \geq 0$ e, portanto, $K = X$, o que é novamente um absurdo. Então, $C \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$ e pelo Teorema 1.1.2 (Teorema de Separação de Hahn-Banach), existe $x^* \in X^*$ tal que vale a equação (2.1), já que $x_0 \in C \cap (K + x_0)$. $\square$

Dessa forma, a existência de funcionais suporte e de pontos suporte para C se reduz à existência de cones convexos que suportam C e possuem interior não vazio. Nesse intuito, faremos uso de cones convexos do seguinte tipo: se X é um espaço normado real, $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| = 1$ e $r > 0$, definimos o seguinte conjunto:

$$K(x^*, r) = \{x \in X : \|x\| \leq rx^*(x)\}.$$

Vejamos que este conjunto é, de fato, um cone convexo e possui as propriedades que nos referimos acima.

Proposição 2.2.2. Sejam X um espaço normado real, $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| = 1$ e $r > 0$. Então

(a) $K(x^*, r)$ é um cone convexo fechado.

(b) se $x \in K(x^*, r)$ e $x \neq 0$, então $-x \notin K(x^*, r)$.

(c) se $r > 1$, então $K(x^*, r)$ tem interior não vazio.

Demonstração. (a) Vamos provar que $K(x^*, r)$ é um cone convexo. Sejam $x, y \in K(x^*, r)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Então $\|x\| \leq rx^*(x)$ e $\|y\| \leq rx^*(y)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \\ &\leq \lambda rx^*(x) + (1-\lambda)rx^*(y) \\ &= r[\lambda x^*(x) + (1-\lambda)x^*(y)] \\ &= r[x^*(\lambda x + (1-\lambda)y)], \end{aligned}$$

isto é, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K(x^*, r)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ e, portanto, $K(x^*, r)$ é convexo. Além disso, se $x \in K(x^*, r)$, então $\|x\| \leq rx^*(x)$, donde $t\|x\| \leq trx^*(x)$, sempre que $t \geq 0$. Isto implica que $\|tx\| \leq rx^*(tx)$, para todo $t \geq 0$, ou seja, $tx \in K(x^*, r)$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$. Portanto, $K(x^*, r)$ é um cone convexo. Mostremos agora que $K(x^*, r)$ é fechado. Seja $x \in \overline{K(x^*, r)}$. Então, existe uma sequência $(x_n) \subset K(x^*, r)$ tal que $x_n \to x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\|x_n\| \leq rx^*(x_n)$. Como $\| \,.\, \|$ e x^* são funções contínuas, segue que $\|x\| \leq rx^*(x)$ quando $n \to \infty$, ou seja, $x \in K(x^*, r)$ e, portanto, $K(x^*, r)$ é fechado.

(b) Suponha que $x \in K(x^*, r)$ e que $x \neq 0$. Então, $\|x\| \leq rx^*(x)$. Se $-x \in K(x^*, r)$, então $\|x\| \leq -rx^*(x)$, donde $2\|x\| \leq 0$, o que acarreta $\|x\| = 0$ e, portanto, $x = 0$, o que é uma contradição.

(c) Note que o conjunto $\tilde{K} = \{x \in X : \|x\| < rx^*(x)\}$ sempre está contido em $K(x^*, r)$. Além disso, como $\|x^*\| = \sup\{x \in S_X : |x^*(x)|\} = 1$, existe $x_0 \in S_X$ tal que $x^*(x_0) > 1/r$, isto é, $rx^*(x_0) > \|x_0\| = 1$ e tal x_0 pertence a $\tilde{K}$, donde $\tilde{K} \neq \emptyset$. Como $\tilde{K}$ é um conjunto aberto segue que $K(x^*, r)$ tem interior não vazio.

$\square$

O próximo lema estabelece condições para a existência de um cone convexo que suporta um dado conjunto. Sua demonstração tem uma curiosa aplicação do lema de Zorn.

Lema 2.2.3. Sejam X um espaço normado real, A um subconjunto completo de X e $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ e é limitado superiormente em A. Dados $z \in A$ e $r > 0$, existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 \in K(x^*, r) + z$ e $K(x^*, r) + x_0$ suporta A em x_0.

Demonstração. Denote por K o conjunto $K(x^*, r)$. Definamos uma relação $\leq$ sobre X da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad y - x \in K \\ &\Leftrightarrow \quad \|y - x\| \leq r[x^*(y) - x^*(x)]. \end{aligned}$$

Claramente $\leq$ é reflexiva. Além disso, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então

$$2\|y - x\| \leq r[x^*(y) - x^*(x)] + r[x^*(x) - x^*(y)] = 0,$$

isto é, $x = y$ e isto implica que $\leq$ é antisimétrica. Também temos que $\leq$ é transitiva. De fato, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &\leq r[x^*(z) - x^*(y) + x^*(y) - x^*(x)] \\ &= r[x^*(z) - x^*(x)], \end{aligned}$$

ou seja, $x \leq z$. Portanto, $\leq$ define uma relação de ordem sobre X. Temos ainda que para quaisquer $x, y \in X$,

$$x < y \Rightarrow x^*(x) < x^*(y). \tag{2.2}$$

Notemos agora que:

(i) $x_0 \in K + z \Leftrightarrow x_0 \geq z$, para todo $z \in A$.

De fato, $x_0 \in K + z$ se, e somente se, $x_0 - z \in K$. Mas isso ocorre se, e somente se, $x_0 \geq z$.

(ii) $K + x_0$ suporta A em $x_0 \Leftrightarrow$ o único elemento de A que é maior ou igual a x_0 é o próprio x_0.

Com efeito, se $K + x_0$ suporta A em x_0, então $(K + x_0) \cap A = \{x_0\}$. Se existe $y \in A$ tal que $y \geq x_0$, então $y - x_0 \in K$, isto é, $y \in K + x_0$ e, portanto, $(K + x_0) \cap A = \{x_0\}$ implica que $y = x_0$. Analogamente, verifica-se a recíproca.

Fazendo uso das observações (i) e (ii), vamos provar que x_0 é um elemento maximal de A e, daí, o lema estará demonstrado. Dado $z \in A$, seja $B = \{x \in A : x \geq z\}$. A fim de aplicarmos o lema de Zorn, tomemos um subconjunto totalmente ordenado W de B e provemos que W possui cota superior em B. Como x^* é limitado superiormente em A, existe

$$\alpha = \sup_{x \in W} x^*(x).$$

Temos, então, dois casos para considerar.

Primeiro caso: Suponha que $\alpha \in x^*(W)$. Então, existe $w \in W$ tal que $x^*(w) = \alpha$ e, portanto, $x^*(w) \geq x^*(x)$, para cada $x \in W$. Se não ocorresse $w \geq x$, para cada $x \in W$, então teríamos

$w < x$ para algum x em W e pelo o que vimos em (2.2), teríamos $x^*(w) < x^*(x)$, o que contradiz a observação acima (veja que acabamos de utilizar o fato de W ser totalmente ordenado). Portanto, $w \geq x$ para cada $x \in W$, donde w é uma cota superior de W.

Segundo caso: Suponha que $\alpha \notin x^*(W)$. Então existe uma sequência crescente $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ em $x^*(W)$ que tem α como limite. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in W$ tal que $x^*(x_n) = t_n$. Utilizando novamente (2.2) e o fato de quaisquer dois elementos de W serem comparáveis, vem que $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq r[x^*(x_m) - x^*(x_n)] \\ &= r[t_m - t_n] \end{aligned}$$

sempre que $m \geq n$ e como (t_n) é convergente, segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy em B. Agora, note que

$$\begin{aligned} B &= \{x \in A : x \geq z\} \\ &= \{x \in A : x - z \in K\} \\ &= \{x \in A : x \in K + z\} \\ &= A \cap (K + z) \end{aligned}$$

e, como K é fechado e A é completo, segue que B é completo. Portanto, (x_n) converge, digamos para $y \in B$. Afirmamos que este y é cota superior de W em B. Com efeito, seja $x \in W$ qualquer. Como $x^*(x) < \alpha$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^*(x) < t_{n_0} = x^*(x_{n_0})$. Assim, $x < x_n$, sempre que $n \geq n_0$ e, portanto,

$$\|x_n - x\| \leq r[x^*(x_n) - x^*(x)],$$

para todo $n \geq n_0$. Quando $n \to \infty$, temos

$$\|y - x\| \leq r[x^*(y) - x^*(x)],$$

isto é, $y \geq x$. Isto prova que y é cota superior de W em B.

Esses dois casos mostram que podemos aplicar o lema de Zorn e concluir que B possui um elemento maximal x_0. Daí, $x_0 \geq z$, para cada $z \in A$ e, então, x_0 é um elemento maximal de A. Usando as observações do início da demonstração, obtemos o resultado desejado.

□

O próximo teorema responde afirmativamente a pergunta feita por Victor Klee em 1958: *todo subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach real tem pelo menos um ponto suporte?* Na verdade, Bishop e Phelps provaram que a hipótese do conjunto ser limitado é desnecessária como veremos a seguir.

Teorema 2.2.4. Se C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço de Banach real X, então o conjunto dos pontos suporte de C é denso na fronteira de C.

Demonstração. Suponha que z seja um elemento da fronteira de C e fixemos $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que existe um ponto suporte de C, que denotaremos por x_0, tal que $\|x_0 - z\| < \varepsilon$. Seja $w \in X \setminus C$

tal que $\|w - z\| < \varepsilon/2$. Como C é fechado, existe uma vizinhança aberta e convexa V de w tal que $V \subset X \setminus C$. Assim, $\mathrm{int}(V) \neq \emptyset$ e $C \cap \mathrm{int}(V) = \emptyset$. Portanto, pelo Teorema 1.1.2 (Teorema de Separação de Hahn-Banach), existe $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| = 1$ tal que

$$\sup_{x \in C} x^*(x) \leq \inf_{y \in V} x^*(y) \leq x^*(w).$$

Como C é completo e fechado, $\|x^*\| = 1$ e x^* é limitado superiormente em C, o Lema 2.2.3 nos garante a existência de um ponto $x_0 \in C$ tal que $x_0 \in K(x^*, 2) + z$ e $K(x^*, 2) + x_0$ suporta C em x_0. Agora, como $K(x^*, 2)$ é um cone convexo com interior não vazio, $K(x^*, 2) \neq X$, $x_0 \in C$ e $K(x^*, 2) + x_0$ suporta C em x_0, pelo Lema 2.2.1, x_0 é um ponto suporte de C.

Por fim, como $x_0 - z \in K(x^*, 2)$, $x_0 \in C$ e $\|x^*\| = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|x_0 - z\| &\leq 2[x^*(x_0) - x^*(z)] \\
&\leq 2[x^*(w) - x^*(z)] \\
&= 2x^*(w - z) \\
&\leq 2\|w - z\| \\
&< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.5. Seja C um subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço de Banach real X. Se C é simétrico, então o conjunto dos pontos módulo-suporte de C é denso na fronteira de C.

Finalmente chegamos na reta final para provarmos o Teorema de Bishop-Phelps para espaços de Banach reais. Para demonstrá-lo, precisamos de mais dois lemas técnicos de fácil entendimento.

Lema 2.2.6. Sejam X um espaço normado real, $x^*, y^* \in X^*$ com $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ e $\varepsilon > 0$. Se $|y^*(x)| \leq \varepsilon/2$ sempre que $x \in \mathrm{Nuc}(x^*)$ e $\|x\| \leq 1$, então $\|x^* + y^*\| \leq \varepsilon$ ou $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$.

Demonstração. Considere o subespaço $M = \mathrm{Nuc}(x^*)$ de X. Como $y^*|_M$ é um elemento de M^*, o teorema de extensão de Hahn-Banach garante a existência de um funcional $z^* \in X^*$ tal que $z^*|_M = y^*|_M$ com

$$\|z^*\| = \|y^*|_M\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $y^* - z^* = 0$ em M, segue que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y^* - z^* = \alpha x^*$, ou seja,

$$y^* = z^* + \alpha x^*.$$

Já que $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
|1 - |\alpha|| &= |\|y^*\| - \|y^* - z^*\|| \\
&= |\|y^* - z^*\| - \|y^*\|| \\
&\leq |\|y^*\| + \|z^*\| - \|y^*\|| \\
&= \|z^*\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

- se $\alpha \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
\|x^* - y^*\| &= \|x^* - (z^* + \alpha x^*)\| \\
&= \|x^* - \alpha x^* - z^*\| \\
&= \|(1 - \alpha)x^* - z^*\| \\
&\leq |1 - \alpha|\|x^*\| + \|z^*\| \\
&= |1 - \alpha| + \|z^*\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

- se $\alpha \leq 0$, então $|1 - |\alpha|| = |1 + \alpha|$ e

$$\begin{aligned}
\|x^* + y^*\| &= \|x^* + z^* + \alpha x^*\| \\
&= \|(1 + \alpha)x^* + z^*\| \\
&\leq |1 + \alpha| + \|z^*\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.7. Sejam X um espaço normado real e $x^*, y^* \in X^*$ com $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$. Se $0 < \varepsilon < 1$, $r > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$ e $y^*(x) \geq 0$ para todo $x \in K(x^*, r)$, então $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$.

Demonstração. Como $r^{-1}(1 + \frac{2}{\varepsilon}) < 1 = \|x^*\|$, existe $x_0 \in S_X$ tal que

$$x^*(x_0) > r^{-1}\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right).$$

Se $x \in \operatorname{Nuc} x^*$ e $\|x\| \leq 1$, então

$$\begin{aligned}
\left\| x_0 \pm \frac{2}{\varepsilon} x \right\| &\leq \|x_0\| + \frac{2}{\varepsilon}\|x\| \\
&\leq 1 + \frac{2}{\varepsilon} \\
&< r x^*(x_0) \\
&= r x^*\left(x_0 \pm \frac{2}{\varepsilon} x \right),
\end{aligned}$$

donde $x_0 \pm \frac{2}{\varepsilon}x \in K(x^*, r)$. Por hipótese, temos $y^*\left(x_0 \pm \frac{2}{\varepsilon}x\right) \geq 0$, ou seja, $\left|y^*\left(\frac{2}{\varepsilon}x\right)\right| \leq y^*(x_0) \leq \|y^*\|\|x_0\| = 1$ e, portanto, $|y^*(x)| \leq \varepsilon/2$. Pelo Lema 2.2.6, temos $\|x^* + y^*\| \leq \varepsilon$ ou $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$. Provemos que *não* ocorre $\|x^* + y^*\| \leq \varepsilon$. Como $0 < \varepsilon < 1$ e $r > 1$, podemos tomar $z \in S_X$ tal que

$$x^*(z) > \max\left\{ \frac{1}{r}, \varepsilon \right\},$$

já que $\|x^*\| = 1$. Como $\|z\| = 1 < r x^*(z)$, temos que $z \in K(x^*, r)$ e, usando a hipótese, $y^*(z) \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|x^* + y^*\| &\geq (x^* + y^*)(z) \\
&= x^*(z) + y^*(z) \\
&> \varepsilon + y^*(z) \\
&\geq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$, como queríamos.

□

Teorema 2.2.8. Se C é um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach real X, então o conjunto dos funcionais suporte para C é denso em X^*.

Demonstração. Fixe $x^* \in X^*$ não nulo e $0 < \varepsilon < 1$. Seja $z^* = x^*/\|x^*\|$ e escolha $z \in C$ e $r > 1+2/\varepsilon$. Pelo Lema 2.2.3, existe $x_0 \in C$ tal que $x_0 \in K(z^*, r) + z$ e $K(z^*, r) + x_0$ suporta C em x_0. Denote por K o cone convexo $K(z^*, r)$. Pelo Lema 2.2.1, existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que

$$\sup_{x \in C} y^*(x) = y^*(x_0) = \inf_{y \in K + x_0} y^*(y).$$

Em particular, y^* é um funcional suporte para C. Como

$$y^*(x_0) = \inf_{y \in K + x_0} y^*(y) = y^*(x_0) + \inf_{y \in K} y^*(y)$$

e como $\|y^*\| = 1$, segue que $y^*(y) \geq 0$, para cada $y \in K$. Logo, pelo Lema 2.2.7, temos

$$\|z^* - y^*\| \leq \varepsilon.$$

Tome agora $w^* = \|x^*\| y^*$. Então, como

$$y^*(x_0) = \sup_{x \in C} y^*(x)$$

segue que

$$(\|x^*\|y^*)(x_0) = \sup_{x\in C}(\|x^*\|y^*)(x),$$

ou seja, $w^*(x_0) = \sup_{x\in C} w^*(x)$ e w^* é um funcional suporte para C. Além disso,

$$\begin{aligned} \|x^* - w^*\| &= \|x^* - \|x^*\|y^*\| \\ &= \|x^*\|\left\|\frac{x^*}{\|x^*\|} - y^*\right\| \\ &= \|x^*\|\|z^* - y^*\| \\ &< \varepsilon\|x^*\|. \end{aligned}$$

Logo, conjunto dos funcionais suporte para C é denso em X^*, como queríamos demonstrar. □

Corolário 2.2.9. Seja C um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach real X. Se C é simétrico, então o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é denso em X^*.

Aplicando o Teorema 2.2.8 para $C = B_X$, temos o teorema de Bishop-Phelps para espaços de Banach reais.

2.3 O caso complexo do Teorema de Bishop-Phelps

Dados um espaço normado complexo X, um subconjunto convexo C de X e um funcional $x^* \in X^*$, dizemos que x^* é um *funcional suporte* para C se x^* é não nulo e existe $x_0 \in C$ tal que

$$\operatorname{Re} x^*(x_0) = \sup_{x\in C} \operatorname{Re} x^*(x).$$

Neste caso, dizemos que x_0 é um *ponto suporte* de C.

Dizemos também que x^* é um *funcional módulo-suporte* para C se x^* é não nulo e existe $x_0 \in C$ tal que

$$|x^*(x_0)| = \sup_{x\in C} |x^*(x)|.$$

Neste caso, dizemos que x_0 é um *ponto módulo-suporte* de C.

Note que se C é um conjunto circular (isto é, se $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$ e $x \in C$, então $\lambda x \in C$), então

$$\sup_{x\in C} \operatorname{Re} x^*(x) = \sup_{x\in C} |x^*(x)|,$$

para todo $x^* \in X^*$. Com efeito, já temos que $\sup_{x\in C} \operatorname{Re} x^*(x) \leq \sup_{x\in C} |x^*(x)|$. Por outro lado, seja $x \in C$. Escrevendo

$$x^*(x) = |x^*(x)|e^{i\theta}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$, temos $e^{-i\theta}x \in C$ e

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &= e^{-i\theta}x^*(x) \\ &= x^*(e^{-i\theta}x) \\ &= \operatorname{Re} x^*(e^{-i\theta}x), \end{aligned}$$

o que prova a outra desigualdade. Portanto, no caso em que C é um conjunto circular, os conceitos de funcional suporte para C e ponto suporte de C coincidem com os conceitos de funcional módulo-suporte para C e ponto módulo-suporte de C. Por exemplo, isto ocorre quando $C = B_X$. Abaixo, provaremos as versões dos principais teoremas da primeira seção para espaços complexos.

Teorema 2.3.1. Se C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço de Banach complexo X, então o conjunto dos pontos suporte de C é denso na fronteira de C.

Demonstração. Suponha que z pertence à fronteira de C e fixe $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 2.2.4, existem $u^* \in (X_{\mathbb{R}})^*$ e $x_0 \in C$ tais que

$$u^*(x_0) = \sup_{x \in C} u^*(x) \quad \text{e} \quad \|x_0 - z\| < \varepsilon.$$

Definindo $x^*(x) = u^*(x) - iu^*(ix)$, para cada $x \in X$, obtemos um funcional $x^* \in X^*$, como nos diz o Teorema 1.1.1. Agora, como

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} x^*(x_0) &= u^*(x_0) \\ &= \sup_{x \in C} u^*(x) \\ &= \sup_{x \in C} \operatorname{Re} x^*(x) \end{aligned}$$

concluímos que x_0 é um ponto suporte de C que satisfaz $\|x_0 - z\| < \varepsilon$. Isto conclui a demonstração. □

Corolário 2.3.2. Seja C um subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço de Banach complexo X. Se C é circular, então o conjunto dos pontos módulo-suporte de C é denso na fronteira de C.

Teorema 2.3.3. Se C é um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach complexo X, então o conjunto dos funcionais suporte para C é denso em X^*.

Demonstração. Sejam $x^* \in X^*$ não nulo e $\varepsilon > 0$. Como $u^* = Re(x^*) \in (X_{\mathbb{R}})^*$, o Teorema 2.2.8 nos garante a existência de um funcional $w^* \in (X_{\mathbb{R}})^*$ e um ponto $x_0 \in C$ tais que

$$w^*(x_0) = \sup_{x \in C} w^*(x) \quad \text{e} \quad \|w^* - u^*\| < \varepsilon.$$

Definindo

$$y^*(x) = w^*(x) - iw^*(ix)$$

para cada $x \in X$, obtemos um funcional $y^* \in X^*$ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} y^*(x_0) &= w^*(x_0) \\ &= \sup_{x \in C} w^*(x) \\ &= \sup_{x \in C} \operatorname{Re} y^*(x), \end{aligned}$$

ou seja, y^* é um funcional suporte para C. Usando o Teorema 1.1.1, concluímos que

$$\begin{aligned} \|y^* - x^*\| &= \|\operatorname{Re}(y^* - x^*)\| \\ &= \|\operatorname{Re} y^* - \operatorname{Re} x^*\| \\ &= \|w^* - u^*\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Corolário 2.3.4. Seja C um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach complexo X. Se C é circular, então o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é denso em X^*.

Aplicando o teorema acima para $C = B_X$, obtemos o teorema de Bishop-Phelps para espaços de Banach complexos.

Em torno do mesmo período em que os teoremas de Bishop-Phelps e de James foram provados, o israelense Joram Lindenstrauss estudou os espaços dos operadores lineares contínuos $\mathcal{L}(X, Y)$ entre dois espaços de Banach X e Y procurando responder à seguinte pergunta: *é verdade que todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ pode ser aproximado por um operador que atinge a norma?* Nos últimos 40 anos houve muito progresso em relação a isso. Por exemplo, já é bem conhecido que se o espaço X for reflexivo, a pergunta acima é respondida afirmativamente, como mostraremos no capítulo seguinte. Entretanto, existem contraexemplos onde não vale um teorema do tipo Bishop-Phelps para operadores lineares e contínuos (veja, por exemplo, [Lin63]). Por isso, a pergunta anterior transforma-se naturalmente na que se segue: *quais condições devem ter os espaços de Banach X e Y para que o conjunto dos operadores lineares e contínuos que atingem a norma seja denso em $\mathcal{L}(X, Y)$?* Esta e outras questões são respondidas no próximo capítulo.

Capítulo 3

O Teorema de Lindenstrauss

3.1 Introdução

Lembremos que um funcional linear e contínuo $x^* \in X^*$ atinge a norma se existe $x_0 \in B_X$ tal que $\|x^*\| = |x^*(x_0)|$. Quando começamos os estudos sobre funcionais com tal propriedade, nos deparamos de imediato com o tão famoso Teorema de James, que nos diz que um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, todo funcional em X^* atinge a norma (vide Apêncide A). Este teorema motivou os matemáticos Errett Bishop e Robert R. Phelps a estudarem funcionais que atingem a norma em espaços não reflexivos. Com isso, surgiu o conceito de subreflexividade. Um espaço normado X é dito *subreflexivo* se o conjunto dos funcionais que atingem a norma é denso em X^*. Um dos mais consagrados teoremas nesta linha de pesquisa foi estabelecido pelos próprios Bishop e Phelps, que mostraram em 1961 que todo espaço de Banach é subreflexivo, resultado este que ficou conhecido como Teorema de Bishop-Phelps, como vimos no capítulo anterior (vide também [BP61], [BJ09], [Ski98]).

Dessa forma surgiram perguntas, feitas pelos próprios Bishop e Phelps, onde se questionavam se qualquer operador linear e contínuo poderia ser aproximado por um operador que atinge a norma. Dito de outra maneira, será que o conjunto dos operadores lineares e contínuos que atingem a norma é denso no espaço dos operadores lineares e contínuos? Os mais significativos trabalhos nessa linha de pesquisa, sem dúvida, foram feitos por Joram Lindenstrauss em 1963, que deu contra exemplos de espaços de Banach X e Y onde o conjunto dos operadores que atingem a norma não é denso no conjunto dos operadores lineares e contínuos de X em Y (vide [Lin63]). Entretanto, ele provou que o conjunto dos operadores lineares e contínuos dos quais seus respectivos *segundos adjuntos* atingem a norma é denso no conjunto dos operadores lineares e contínuos. Este é o teorema que apresentamos na primeira seção deste capítulo. Adiante, mostraremos duas versões deste teorema para aplicações bilineares e polinômios 2-homogêneos.

3.2 O Teorema Original de Lindenstrauss

Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e denote por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *atinge a norma* se existe $x_0 \in B_X$ tal que $\|T\| = \|T(x_0)\|$. O conjunto de tais operadores será denotado por $\mathcal{NAL}(X, Y)$.

Seja $T : X \to Y$ um operador linear e contínuo. Defina $T^* : Y^* \to X^*$ por

$$T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)),$$

para cada $x \in X$. Este é o (primeiro) *operador adjunto* de T. Assim, podemos definir o *segundo adjunto* de T como $T^{**} = (T^*)^*$, ou seja,

$$T^{**} : X^{**} \to Y^{**},$$

é dada por

$$T^{**}(x^{**})(y^*) = x^{**}(T^*(y^*)),$$

para cada $y^* \in Y^*$. Então, $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, $T^{**} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ e $\|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|$ (vide [Meg98] pg. 285).

Vamos mostrar que o conjunto dos operadores $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ cujo segundo adjunto T^{**} atinge a norma é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$. Denotamos o subespaço dos operadores $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ cujo segundo adjunto T^{**} atinge a norma por $\mathcal{P}_0(X, Y)$. Antes disso, será estabelecida uma caracterização para os operadores do espaço $\mathcal{P}_0(X, Y)$. Tal caracterização nos permitirá dizer se um operador T pertence a $\mathcal{P}_0(X, Y)$ através de sequências em X e em Y^* que satisfazem determinadas condições. Isto é o conteúdo do próximo lema.

Lema 3.2.1. (Lema 1, [Lin63]) Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $T : X \to Y$ não nulo pertence a $\mathcal{P}_0(X, Y)$ se, e somente se, existem sequências $(x_k) \subset S_X$ e $(y_k^*) \subset S_{Y^*}$ tais que:

$$|y_j^*(Tx_k)| > \|T\| - \frac{1}{j}, \text{ para todo } j \leq k, \text{ onde } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Demonstração. Suponha que $T \in \mathcal{P}_0(X, Y)$. Então, existe $x^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que $\|T^{**}(x^{**})\| = \|T^{**}\|$. Sabemos que $\|T^{**}\| = \|T\|$. Então, usando a definição de $\|T^{**}(x^{**})\|$, existe uma sequência de pontos distintos $(y_j^*) \subset S_{Y^*}$ tal que

$$\left|(T^{**}x^{**})(y_j^*)\right| \geq \|T\| - \frac{1}{2j}, \tag{3.2}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Considere $\delta_X : X \to X^{**}$ a inclusão canônica de X em X^{**}. Pelo Teorema de Goldstine, $\delta_X(B_X)$ é w^*-denso em $B_{X^{**}}$. Portanto, existe um ponto de $\delta_X(B_X)$ próximo de x^{**} em relação às vizinhanças básicas da topologia w^*. Sendo assim, existe, para cada $k \geq 2$, $y_k \in B_X$ tal que

$$\sup_{1 \leq j \leq k} \left|(\delta_X(y_k) - x^{**})(T^*(y_j^*))\right| < \frac{1}{2k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Veja que como x^{**} é não nulo, podemos supor que, para cada k, $y_k \neq 0$. Isto nos permite definir

$$x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, temos $\|x_k\| = 1$ e

$$\sup_{1 \leq j \leq k} \left|\|y_k\|(T^*(y_j^*))(x_k) - x^{**}(T^*(y_j^*))\right| < \frac{1}{2k}, \tag{3.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Usaremos (3.3) para provar as seguintes inequações:

$$\|T\| - \frac{1}{2j} \leq \left|x^{**}(T^*(y_j^*))\right| < \frac{1}{2k} + |(T^*(y_j^*)(x_k)|, \tag{3.4}$$

sempre que $1 \leq j \leq k$. De fato, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \left|x^{**}(T^*(y_j^*))\right| &\overset{\text{def}}{=} \left|(T^{**}x^{**})(y_j^*)\right| \\ &\overset{(3.2)}{\geq} \|T\| - \frac{1}{2j} \end{aligned}$$

o que prova a primeira desigualdade. Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \left|x^{**}(T^*(y_j^*))\right| &= \left|x^{**}(T^*(y_j^*)) - \|y_k\|(T^*(y_j^*))(x_k) + \|y_k\|(T^*(y_j^*))(x_k)\right| \\ &\leq \left|\|y_k\|(T^*(y_j^*))(x_k) - x^{**}(T^*(y_j^*))\right| + \|y_k\| \left|(T^*(y_j^*))(x_k)\right| \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq k$, temos, por (3.3),

$$\begin{aligned} \left|x^{**}(T^*(y_j^*))\right| &< \frac{1}{2k} + \|y_k\| \left|(T^*(y_j^*))(x_k)\right| \\ &\leq \frac{1}{2k} + \left|(T^*(y_j^*))(x_k)\right|, \end{aligned}$$

já que $y_k \in S_X$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto prova (3.4). Finalmente,

$$\begin{aligned} \left|y_j^*(Tx_k)\right| &\overset{\text{def}}{=} \left|(T^*(y_j^*))(x_k)\right| \\ &\overset{(3.4)}{>} \|T\| - \frac{1}{2j} - \frac{1}{2k} \\ &> \|T\| - \frac{1}{2j} - \frac{1}{2j} \\ &= \|T\| - \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

para cada $k \geq 2$ e todo $1 \leq j < k$. Isto prova a primeira implicação.

Reciprocamente, suponha que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ seja qualquer operador linear e contínuo de X em Y, e que existam sequências $(x_k) \subset S_X$ e $(y_k^*) \subset S_{Y^*}$ satisfazendo a condição (3.1). Vamos provar que T^{**} atinge a norma e, portanto, $T \in \mathcal{P}_0(X, Y)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\|T\| = 1$ e considere

$$M^* = \overline{[T^*(y_j^*) : j \in \mathbb{N}]},$$

que é um subespaço de X^*. Como M^* é um espaço separável, a bola $B_{M^{**}}$ é w^*-metrizável. Além disso, a sequência $(\delta_X(x_k))$ está contida em $B_{M^{**}}$, já que $X^{**} \hookrightarrow M^{**}$ e δ_X é uma isometria. Agora, como $B_{M^{**}}$ é w^*-metrizável e w^*-compacta (pelo Teorema de Banach-Alaoglu), existe uma subsequência, que continuaremos denotando por $(\delta_X(x_k))$, de $(\delta_X(x_k))$ w^*-convergente, digamos para $x_0^{**} \in B_{M^{**}}$. Como x_0^{**} toma valores em M^* segue, do Teorema de Hahn-Banach, que existe uma extensão $\tilde{x}_0^{**} \in B_{X^{**}}$ de x_0^{**}.

Assim, dados $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, podemos garantir, pela convergência w^*, que dada a seguinte vizinhança w^* de $\tilde{x}_0^{**}$,

$$V_{\tilde{x}_0^{**}} = \{x^{**} \in X^{**} : \sup_{j\in\{1,\ldots,n_0\}} |(x^{**} - \tilde{x}_0^{**})(T^*(y_j^*))| < \varepsilon\},$$

existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{j\in\{1,\ldots,n_0\}} |(\delta_X(x_k) - \tilde{x}_0^{**})(T^*(y_j^*))| < \varepsilon,$$

sempre que $k \geq k_0$. Além disso, para cada $k \geq 2$ e $1 \leq j < k$, temos

$$\begin{aligned} \|T\| - \frac{1}{j} - \left|x_0^{**}(T^*(y_j^*))\right| &\overset{(3.1)}{<} \left|y_j^*(Tx_k)\right| - \left|x_0^{**}(T^*(y_j^*))\right| \\ &\leq \left|y_j^*(Tx_k) - x_0^{**}(T^*(y_j^*))\right|. \end{aligned}$$

Então, se $k \geq k_0$, temos

$$\left|y_j^*(Tx_k) - x_0^{**}(T^*(y_j^*))\right| < \varepsilon,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n_0\}$. Portanto,

$$\|T\| - \frac{1}{j} - \left|x_0^{**}(T^*(y_j^*))\right| < \varepsilon,$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n_0\}$, ou ainda,

$$\left|x_0^{**}(T^*(y_j^*))\right| > \|T\| - \frac{1}{j} - \varepsilon, \tag{3.5}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n_0\}$. Como $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ são arbitrários, fazendo $j \to \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|T^{**}\| &\geq \|T^{**}(x_0^{**})\| \\ &\geq \left|T^{**}x_0^{**}(y_j^*)\right| \\ &\overset{\text{def}}{=} \left|x_0^{**}(T^*(y_j^*))\right| \\ &\overset{(3.5)}{>} \|T\| - \frac{1}{j} - \varepsilon \\ &\to \|T\| \\ &= \|T^{**}\|, \end{aligned}$$

ou seja, existe $x_0^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $\|T^{**}\| = \|T^{**}(x_0^{**})\|$ e, portanto, T^{**} atinge a norma.

□

Em [Lin63] é provado em um único teorema que o conjunto $\mathcal{P}_0(X,Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X,Y)$. Aqui, faremos um pouco diferente. Provaremos dois lemas e enunciaremos e demonstraremos o mencionado resultado. O primeiro lema é uma justificativa da existência de uma determinada sequência de números reais positivos que tem propriedades que vão nos ajudar na demonstração do lema seguinte, onde é construída uma sequência (T_k) de Cauchy de operadores em $\mathcal{L}(X,Y)$. Sendo esta sequência de Cauchy e o espaço $\mathcal{L}(X,Y)$ de Banach, o limite desta sequência T_0 será tal que $\|T - T_0\| \leq \varepsilon$ e $T_0 \in \mathcal{P}_0(X,Y)$, onde $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é fixado no início da demonstração, ou seja, qualquer operador de $\mathcal{L}(X,Y)$ pode ser aproximado por operadores em $\mathcal{P}_0(X,Y)$.

A parte mais árdua do trabalho é provar que a sequência de operadores construída no Lema

3.2.3 é de Cauchy. O próximo lema e o teorema final são mais simples de serem entendidos, valendo a pena passar pelas dificuldades do Lema 3.2.3.

Lema 3.2.2. Dado $0 < \varepsilon < 1/3$, existe uma sequência decrescente (ε_k) de números reais positivos que goza das seguintes propriedades.

(1) $2\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$,

(2) $2\sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_k^2$,

(3) $\varepsilon_k < \dfrac{1}{10k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Com efeito, considere a sequência definida por $\varepsilon_k = \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Construiremos uma subsequência de (ε_k) que goza das propriedades mencionadas acima. Antes dessa construção, note que a própria (ε_k) já possui algumas dessas propriedades, como mostrado a seguir:

$$2\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = 2\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^i = 2 \cdot \frac{\varepsilon/10}{1-\varepsilon/10} = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10-\varepsilon} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{9} < \varepsilon.$$

Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, sabendo que $0 < \varepsilon < 1/3$, tem-se

$$\varepsilon_k = \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^k < \frac{1}{10^k} < \frac{1}{10k}.$$

Agora, defina a subsequência de (ε_k), que denotamos por (ε_{k_j}), pondo $k_1 = 1$ e $k_j = 1 + 2k_{j-1}$ se $j \geq 2$. Observe que a sequência de números naturais que indexa a sequência (ε_{k_j}) é crescente. Isto justifica a primeira das desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=j+1}^{\infty} \varepsilon_{k_i} = 2\sum_{i=j+1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^{k_i} &< 2\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^{l+k_{j+1}} \\
&= 2\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^{l} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^{k_{j+1}} \\
&= 2\left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^{k_{j+1}} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon/10} \\
&= 2\left(\frac{\varepsilon^{k_{j+1}}}{10^{k_{j+1}}}\right) \cdot \frac{10}{10-\varepsilon} \\
&= \frac{\varepsilon^{k_{j+1}}}{10^{k_{j+1}-1}} \cdot \frac{2}{10-\varepsilon} \\
&< \frac{2}{9} \cdot \frac{\varepsilon^{k_{j+1}}}{10^{k_{j+1}-1}} \\
&= \frac{2}{9} \cdot \frac{\varepsilon^{k_{j+1}}}{10^{2k_j}} \\
&= \frac{2\varepsilon}{9} \cdot \frac{\varepsilon^{k_{j+1}-1}}{10^{2k_j}} \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^{2k_j} \\
&= \varepsilon_{k_j}^2.
\end{aligned}$$

Assim, a sequência (ε_{k_j}) goza das propriedades (1), (2) e (3). Denotando esta subsequência também por (ε_k), temos o resultado.

$\square$

Lema 3.2.3. (Teorema 1, [Lin63]) Dados X e Y espaços de Banach, $0 < \varepsilon < 1/3$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ não nulo, existem sequências $(x_k) \subset S_X$, $(y_k^*) \subset S_Y^*$ e $(T_k) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ que gozam das seguintes propriedades:

(4) $T_1 = T$,

(5) $\|T_k x_k\| \geq \|T_k\| - \varepsilon_k^2$, $k \in \mathbb{N}$,

(6) $y_k^*(T_k x_k) = \|T_k x_k\|$, $k \in \mathbb{N}$,

(7) $T_{k+1}(x) = T_k(x) + \varepsilon_k y_k^*(T_k x) \cdot (T_k x_k)$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$

e, consequentemente,

(8) $\|T_j - T_k\| \leq 2\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i$, com $\|T_k\| \leq 4/3$, $j < k$,

(9) $|y_j^*(T_j x_k)| \geq \|T_j\| - 6\varepsilon_j$, $j < k$,

onde (ε_k) é uma sequência como no Lema 3.2.2.

Demonstração. Seja $0 < \varepsilon < 1/3$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\|T\| = 1$ e considere (ε_k) a sequência decrescente de números reais positivos do Lema 3.2.2. Vamos construir indutivamente as sequências $(x_k) \subset X$, $(y_k^*) \subset Y^*$ e $(T_k) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ tais que satisfaçam as propriedades (4), (5), (6) e (7).

Primeiramente, ponha $T_1 = T$ e já temos (4). Em seguida, usando a definição de $\|T_1\|$, podemos encontrar $x_1 \in S_X$ tal que

$$\|T_1 x_1\| \geq \|T_1\| - \varepsilon_1^2,$$

já que $\varepsilon_1 > 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, como $T_1 x_1 \in Y$, existe um funcional $y_1^* \in S_{Y^*}$ tal que

$$y_1^*(T_1 x_1) = \|T_1 x_1\|.$$

Defina, então, $T_2 : X \to Y$ por

$$T_2(x) = T_1(x) + \varepsilon_1 y_1^*(T_1 x) \cdot (T_1 x_1),$$

para cada $x \in X$. Não é difícil ver que T_2 é linear e contínuo. Usando a definição de $\|T_2\|$ e o Teorema de Hahn-Banach, existem $x_2 \in S_X$ e $y_2^* \in S_{Y^*}$ tais que $\|T_2 x_2\| \geq \|T_2\| - \varepsilon_2^2$ e $y_2^*(T_2 x_2) = \|T_2 x_2\|$. Com isso, podemos definir a aplicação linear e contínua $T_3 : X \to Y$ por

$$T_3(x) = T_2(x) + \varepsilon_2 y_2^*(T_2 x) \cdot (T_2 x_2),$$

para cada $x \in X$. Procedendo assim, obtemos as sequências desejadas satisfazendo (4), (5), (6) e (7). Feito isso, devemos provar as propriedades (8) e (9).

A propriedade (8) é provada por indução sobre k. De fato, se $k = 2$, então $j = 1$ e, portanto, para cada $x \in S_X$, temos

$$\begin{aligned}
\|(T_1 - T_2)(x)\| &= \|T_1(x) - T_2(x)\| \\
&\overset{(7)}{=} \|T_1(x) - (T_1(x) + \varepsilon_1 y_1^*(T_1x)(T_1x_1))\| \\
&= \|\varepsilon_1 y_1^*(T_1x)(T_1x_1)\| \\
&= \varepsilon_1 |y_1^*(T_1x)| \|T_1x_1\| \\
&\leq \varepsilon_1 \|y_1^*\| \|T_1\| \|x\| \|T_1\| \|x_1\| \\
&= \varepsilon_1 \\
&< 2\varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|T_2\| &= \|T_2 - T_1 + T_1\| \\
&\leq \|T_1 - T_2\| + \|T_1\| \\
&< 2\varepsilon_1 + 1 \\
&\overset{(1)}{<} \varepsilon + 1 \\
&< 1/3 + 1 \\
&= 4/3.
\end{aligned}$$

Isso prova (8) para $k = 2$. Suponha agora que a propridade é válida para $k - 1$ e qualquer $1 \leq j \leq k - 1$, ou seja, $\|T_j - T_{k-1}\| \leq 2\sum_{i=j}^{k-2} \varepsilon_i$ e $\|T_{k-1}\| \leq 4/3$. Note, primeiramente, que para cada $x \in S_X$,

$$\begin{aligned}
\|(T_{k-1} - T_k)(x)\| &= \|T_{k-1}(x) - T_k(x)\| \\
&\overset{(7)}{=} \|\varepsilon_{k-1} y_{k-1}^*(T_{k-1}x) \cdot (T_{k-1}x_{k-1})\| \\
&\leq \varepsilon_{k-1} \|y_{k-1}^*\| \|T_{k-1}\| \|x\| \|T_{k-1}\| \|x_{k-1}\| \\
&= \varepsilon_{k-1} \|T_{k-1}\|^2 \\
&\overset{\texttt{(HI)}}{\leq} \varepsilon_{k-1} \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\
&= \frac{16}{9} \cdot \varepsilon_{k-1}
\end{aligned}$$

e para cada $1 \leq j \leq k - 1$,

$$\begin{aligned}
\|T_j - T_k\| &= \|T_j - T_{k-1} + T_{k-1} - T_k\| \\
&\leq \|T_j - T_{k-1}\| + \|T_{k-1} - T_k\| \\
&\overset{\texttt{(HI)}}{\leq} 2\sum_{i=j}^{k-2} \varepsilon_i + \|T_{k-1} - T_k\|.
\end{aligned}$$

Portanto, se $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, então

$$\begin{aligned}
\|T_j - T_k\| &\leq 2\sum_{i=j}^{k-2} \varepsilon_i + \frac{16}{9} \cdot \varepsilon_{k-1} \\
&< 2\sum_{i=j}^{k-2} \varepsilon_i + \frac{16}{8} \cdot \varepsilon_{k-1} \\
&= 2\sum_{i=j}^{k-2} \varepsilon_i + 2\varepsilon_{k-1} \\
&= 2\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|T_k\| &\leq \|T_k - T_{k-1}\| + \|T_{k-1}\| \\
&< 2\varepsilon_{k-1} + \|T_{k-1}\| \\
&\overset{\text{(HI)}}{\leq} 2\varepsilon_{k-1} + 4/3 \\
&\overset{(1)}{<} \varepsilon + 4/3
\end{aligned}$$

para cada $0 < \varepsilon < 1/3$. Portanto, $\|T_k\| \leq 4/3$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Isto prova (8). Resta-nos provar (9). Antes disso, provaremos duas desigualdades:

(a) $\|T_{k+1}\| \geq \|T_k\| + \varepsilon_k \|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

◀ De fato, note que

$$\begin{aligned}
\|T_{k+1}\| &\geq \|T_{k+1}x_k\| \\
&\overset{(7)}{=} \|T_k(x_k) + \varepsilon_k y_k^*(T_k x_k) \cdot (T_k x_k)\| \\
&\overset{(6)}{=} \|T_k(x_k) + \varepsilon_k \|T_k x_k\| \cdot (T_k x_k)\| \\
&\overset{(5)}{\geq} \|(1 + \varepsilon_k(\|T_k\| - \varepsilon_k^2))T_k x_k\| \\
&= |1 + \varepsilon_k(\|T_k\| - \varepsilon_k^2)| \cdot \|T_k x_k\| \\
&\overset{(5)}{\geq} |1 + \varepsilon_k(\|T_k\| - \varepsilon_k^2)| \cdot (\|T_k\| - \varepsilon_k^2) \\
&\geq \|T_k\| - \varepsilon_k^2 + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - \varepsilon_k^3\|T_k\| - \varepsilon_k^3\|T_k\| + \varepsilon_k^5 \\
&= \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - \varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k^3\|T_k\| + \varepsilon_k^5 \\
&\geq \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é provada a seguir. Temos que provar que $-\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k^3\|T_k\| + \varepsilon_k^5 \geq -4\varepsilon_k^2$, ou seja, temos que mostrar a seguinte desigualdade

$$\varepsilon_k^2 \left(3 - 2\varepsilon_k\|T_k\| + \varepsilon_k^3\right) \geq 0.$$

E, como $\varepsilon_k > 0$, basta provar que $3 - 2\varepsilon_k\|T_k\| + \varepsilon_k^3 \geq 0$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} 3 - 2\varepsilon_k\|T_k\| + \varepsilon_k^3 &\overset{(8)}{\geq} 3 - 2\varepsilon_k \cdot (4/3) \\ &= 3 - (8/3)\varepsilon_k \\ &> 3 - (9/3)\varepsilon_k \\ &= 3 - 3\varepsilon_k \\ &\overset{(3)}{>} 3 - (3/10k) \\ &> 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

(b) A sequência $(\|T_k\|)$ é estritamente crescente, ou seja, $\|T_k\| > \|T_j\| \geq 1$, para cada $j < k$.

◀ Novamente faremos por indução sobre k. Se $k = 2$, então de (a), temos

$$\|T_2\| \geq \|T_1\| + \varepsilon_1\|T_1\|^2 - 4\varepsilon_1^2.$$

Para provar que $\|T_2\| > \|T_1\|$, devemos mostrar que $\varepsilon_1\|T_1\|^2 - 4\varepsilon_1^2 > 0$, ou ainda, que $1 - 4\varepsilon_1 > 0$, já que $\|T_1\| = \|T\| = 1$ e $\varepsilon_1 > 0$. De fato, $2\varepsilon_1 < \varepsilon < 1/3$, por (1) e então, $\varepsilon_1 < 1/6 < 1/4$, ou seja, $4\varepsilon_1 < 1$ e logo temos $1 - 4\varepsilon_1 > 0$.

Suponha que provamos o resultado para k, ou seja, que $\|T_k\| > \|T_{k-1}\| > \ldots > \|T_1\|$ e mostremos que vale para $k+1$. Novamente por (a), temos

$$\|T_{k+1}\| \geq \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2.$$

Sendo assim, devemos mostrar que $\varepsilon_k\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2 > 0$, ou seja, que $\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k > 0$. De fato, $2\varepsilon_k < \varepsilon < 1/3$, para cada $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\varepsilon_k < 1/6 < 1/4$. Como, por hipótese de indução, temos $\|T_k\| \geq 1$, segue que $\|T_k\|^2/4 \geq 1/4 > \varepsilon_k$, ou seja, $\|T_k\|^2 > 4\varepsilon_k$ e logo temos $\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k > 0$. Portanto, $\|T_{k+1}\| > \|T_k\|$, como queríamos. ▶

Finalmente provemos (9). Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \|T_{j+1}x_k\| &= \|T_k x_k - T_k x_k + T_{j+1}x_k\| \\ &\geq \|T_k x_k\| - \|(T_k - T_{j+1})(x_k)\| \\ &\geq \|T_k x_k\| - \|T_{j+1} - T_k\| \end{aligned}$$

Assim, se $j < k$, então

$$\begin{aligned} \|T_{j+1}x_k\| &\geq \|T_k x_k\| - \|T_{j+1} - T_k\| \\ &\overset{(5)}{\geq} \|T_k\| - \varepsilon_k^2 - \|T_{j+1} - T_k\| \\ &\overset{(8)}{\geq} \|T_k\| - \varepsilon_k^2 - 2\sum_{i=j+1}^{k-1} \varepsilon_i \\ &\overset{(b)}{\geq} \|T_{j+1}\| - \varepsilon_k^2 - 2\sum_{i=j+1}^{k-1} \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Mas por (2) e lembrando que (ε_k) é uma sequência decrescente de números reais positivos, temos que

$$\|T_{j+1}x_k\| \geq \|T_{j+1}\| - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_j^2 \geq \|T_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2.$$

Agora, usando (7), temos que

$$\|T_{j+1}x_k\| = \|\varepsilon_j y_j^*(T_j x_k)(T_j x_k) + T_j(x_k)\| \leq \varepsilon_j |y_j^*(T_j x_k)|\|T_j\| + \|T_j\|$$

e, portanto,

$$\varepsilon_j |y_j^*(T_j x_k)|\|T_j\| + \|T_j\| \geq \|T_{j+1}x_k\| \geq \|T_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2.$$

Agora por (a), temos que $\|T_{j+1}\| \geq \|T_j\| + \varepsilon_j \|T_j\|^2 - 4\varepsilon_j^2$, donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_j |y_j^*(T_j x_k)|\|T_j\| + \|T_j\| &\geq \|T_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2 \\ &\overset{(a)}{\geq} \|T_j\| + \varepsilon_j \|T_j\|^2 - 4\varepsilon_j^2 - 2\varepsilon_j^2 \\ &= \|T_j\| + \varepsilon_j \|T_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|y_j^*(T_j x_k)|\|T_j\| \geq \|T_j\|^2 - 6\varepsilon_j,$$

já que $\varepsilon_j > 0$. Finalmente, como $1 \leq \|T_j\| \leq 4/3$, segue que

$$\begin{aligned} |y_j^*(T_j x_k)| &\geq \|T_j\| - 6 \cdot \frac{\varepsilon_j}{\|T_j\|} \\ &\geq \|T_j\| - 6\varepsilon_j, \end{aligned}$$

sempre que $j \leq k$. Isso prova (9).

□

Teorema 3.2.4. (Teorema 1, [Lin63]) Sejam X e Y espaços de Banach. Então $\mathcal{P}_0(X,Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X,Y)$.

Demonstração. Dados $0 < \varepsilon < 1/3$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, considere a sequência $(\varepsilon_k) \subset \mathbb{R}$ do Lema 3.2.2 e as sequências $(x_k) \subset S_X$, $(y_k^*) \subset S_Y^*$ e $(T_k) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ gozando das propriedades do Lema 3.2.3. Usando (1) e (8), podemos concluir que (T_k) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X,Y)$. Sendo Y um espaço de Banach, temos que $\mathcal{L}(X,Y)$ é completo e, portanto, existe $T_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_k T_k = T_0$. Agora, para o dado T, temos

$$\|T - T_k\| = \|T_1 - T_k\| \overset{(8)}{\leq} 2\sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \overset{(1)}{<} \varepsilon,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, $\|T - T_0\| \leq \varepsilon$.

Provemos agora que $T_0 \in \mathcal{P}_0(X,Y)$. Para tanto, vamos utilizar a caracterização para elementos de $\mathcal{P}_0(X,Y)$ dada pelo Lema 3.2.1. Já temos duas sequências, $(x_k) \subset S_X$ e $(y_k^*) \subset S_Y^*$. Devemos mostrar, então, que a desigualdade abaixo é válida:

$$|y_j^*(T_0(x_k))| \geq \|T_0\| - \frac{1}{j},$$

sempre que $j \leq k$. Com efeito, fazendo $k \to \infty$ em (8) e usando (2), temos

$$\|T_0 - T_j\| \leq 2\sum_{i=j}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_{j-1}^2$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\begin{aligned} |y_j^*(T_0(x_k))| &= \left|y_j^*(T_jx_k) - y_j^*(T_jx_k) + y_j^*(T_0(x_k))\right| \\ &\geq \left|y_j^*(T_jx_k)\right| - \left|y_j^*(T_jx_k) - y_j^*(T_0(x_k))\right| \\ &\geq \left|y_j^*(T_jx_k)\right| - \|T_j - T_0\|, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é justificada pelo fato de que $\|x_k\| = \|y_k^*\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, como $\|T_0 - T_j\| < \varepsilon_{j-1}^2$, temos

$$|y_j^*(T_0(x_k))| \geq \left|y_j^*(T_jx_k)\right| - \|T_j - T_0\| \overset{(9)}{\geq} \|T_j\| - 6\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}^2.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \|T_k\| &= \|T_k - T_j + T_j\| \\ &\leq \|T_k - T_j\| + \|T_j\| \\ &\overset{(8)}{\leq} 2\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i + \|T_j\| \\ &\leq 2\sum_{i=j}^{\infty} \varepsilon_i + \|T_j\| \\ &\overset{(2)}{<} \varepsilon_{j-1}^2 + \|T_j\|. \end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, temos

$$\|T_0\| \leq \varepsilon_{j-1}^2 + \|T_j\|$$

e, portanto,

$$\|T_j\| - \varepsilon_{j-1}^2 \geq \|T_0\| - 2\varepsilon_{j-1}^2.$$

Assim, sempre que $j \leq k$,

$$\begin{aligned} \left|y_j^*(T_0x_k)\right| &\geq \|T_j\| - 6\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}^2 \\ &\geq \|T_0\| - 2\varepsilon_{j-1}^2 - 6\varepsilon_j \\ &\overset{(3)}{>} \|T_0\| - 2\varepsilon_{j-1}^2 - \frac{6}{10j} \\ &\overset{(3)}{>} \|T_0\| - \frac{2}{10^2(j-1)^2} - \frac{6}{10j}. \end{aligned}$$

Resta-nos, então, provar que
$$-\frac{2}{10^2(j-1)^2}-\frac{6}{10j}\geq -\frac{1}{j},$$
para cada $j \geq 2$. Ou seja, temos que provar que vale
$$\frac{6}{10j}+\frac{2}{10^2(j-1)^2}\leq \frac{1}{j},$$
para cada $j \geq 2$. De fato, como $j \leq 2\cdot 10(j-1)^2$, para todo $j \geq 2$, temos
$$\frac{1}{j}\geq \frac{1}{2\cdot 10(j-1)^2},$$
para todo $j \geq 2$, o que implica em
$$\frac{2}{j}\geq \frac{1}{10(j-1)^2},$$
para cada $j \geq 2$. Portanto, sempre que $j \geq 2$,
$$\begin{aligned}\frac{6}{10j}+\frac{2}{10^2(j-1)^2} &= \frac{6}{10j}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{10(j-1)^2}\\ &\leq \frac{6}{10j}+\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{j}\\ &= \frac{6}{10j}+\frac{4}{10j}\\ &= \frac{10}{10j}\\ &= \frac{1}{j}.\end{aligned}$$

Concluímos, então, que $|y_j^*(T_0x_k)| \geq \|T_0\| - 1/j$, para todo $j \geq 2$ e, pelo Lema 3.2.1, temos $T_0 \in \mathcal{P}_0(X,Y)$. Portanto, dado $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, conseguimos $T_0 \in \mathcal{P}_0(X,Y)$ tal que $\|T-T_0\| \leq \varepsilon$, ou seja, $\overline{\mathcal{P}_0(X,Y)} = \mathcal{L}(X,Y)$, como queríamos demonstrar.

□

Em consequência do teorema acima, temos um resultado do tipo Bishop-Phelps, adicionando a hipótese de que o espaço de saída X de $\mathcal{L}(X,Y)$ seja um espaço reflexivo.

Corolário 3.2.5. Para todo espaço de Banach reflexivo X temos $\overline{\mathcal{NAL}(X,Y)} = \mathcal{L}(X,Y)$.

Demonstração. Vamos provar que $\mathcal{NAL}(X,Y) = \mathcal{P}_0(X,Y)$. Com efeito, sejam $T \in \mathcal{NAL}(X,Y)$. Então, existe $x_0 \in B_X$ tal que $\|Tx_0\| = \|T\|$. Como $\|\delta_X(x_0)\| = \|x_0\| \leq 1$, então $\delta_X(x_0) \in B_{X^{**}}$. Assim,
$$\|T^{**}\| = \|T\| = \|Tx_0\| = \|\delta_Y(Tx_0)\| = \|T^{**}(\delta_X(x_0))\|,$$
já que $\delta_Y(Tx_0) = T^{**}(\delta_X(x_0))$ e, portanto, $T \in \mathcal{P}_0(X,Y)$.

Reciprocamente, seja $T \in \mathcal{P}_0(X,Y)$. Então, existe $x_0^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $\|T^{**}\| = \|T^{**}x_0^{**}\|$. Como X é reflexivo, existe $x_0 \in B_X$ tal que $\delta_X(x_0) = x_0^{**}$. Daí,
$$\|T\| = \|T^{**}\| = \|T^{**}x_0^{**}\| = \|T^{**}(\delta_X(x_0))\| = \|\delta_Y(Tx_0)\| = \|T(x_0)\|,$$
o que acarreta a inclusão oposta. Portanto, $\overline{\mathcal{NAL}(X,Y)} = \mathcal{L}(X,Y)$. □

3.3 Teoremas de Lindenstrauss para Aplicações Bilineares e Polinômios 2-Homogêneos

O Teorema de Bishop-Phelps afirma que o conjunto dos funcionais contínuos que atingem a norma em X é denso de X^*. Desde seu surgimento em 1961, muitos trabalhos tentaram generalizar este teorema para outros tipos de funções, tais como operadores lineares, aplicações multilineares e polinômios homogêneos definidos em espaços de Banach. Um dos primeiros trabalhos nesta área e talvez um dos mais significativos, foi feito por Lindenstrauss, que exibiu exemplos onde não é válido um teorema do tipo Bishop-Phelps para operadores em determinados espaços. Apesar disso, ele mostrou que $\mathcal{P}_0(X,Y)$, o subespaço dos operadores $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ cujo segundo adjunto T^{**} atinge a norma, é denso em $\mathcal{L}(X,Y)$, como vimos na seção anterior. Teoremas dessa natureza ficaram conhecidos como teoremas do tipo Lindenstrauss.

Mais tarde, vários questionamentos foram levantados na tentativa de obter teoremas dos tipos Bishop-Phelps e Lindenstrauss para aplicações multilineares e polinômios homogêneos. Por exemplo, depois de tudo que vimos, fica natural nos perguntar se

(a) o conjunto das formas bilineares em X que atingem a norma é denso em $\mathcal{L}(^2X)$;

(b) o conjunto das formas bilineares em X, cuja extensão para $X^{**} \times X^{**}$ atinge a norma, é denso em $\mathcal{L}(^2X)$;

(c) o conjunto dos polinômios 2-homogêneos em X a valores escalares que atingem a norma, é denso em $\mathcal{P}(^2X)$;

(d) o conjunto dos polinômios 2-homogêneos em X a valores escalares, cuja extensão para X^{**} atinge a norma, é denso em $\mathcal{P}(^2X)$.

Em 1996, no artigo [AAP96], os autores mostraram que a resposta do item (a) é falsa para $X = G$, onde G é o espaço de Gowers [Gow90]. Além disso, existe um exemplo de um espaço de Banach X onde o conjunto dos polinômios N-homogêneos em X que atingem a norma não é denso em $\mathcal{P}(^NX)$, como podemos ver no artigo [SP98] de 1998. Isto mostra que também é falsa a resposta do item (c). Ou seja, *não* existem teoremas do tipo Bishop-Phelps para aplicações bilineares e polinômios N-homogêneos.

Apesar disso, a situação com os teoremas do tipo Lindenstrauss é um pouco diferente. Primeiramente, precisamos estender aplicações bilineares e contínuas definidas em $X \times Y$ para $X^{**} \times Y^{**}$. Em 1951, Richard Arens, nos artigos [Are51a] e [Are51b], introduziu duas extensões naturais para uma aplicação bilinear, como vimos na terceira seção do primeiro capítulo. Utilizaremos estas extensões e as ideias da seção anterior para apresentar a veracidade do item (d) acima. Mostraremos também que o conjunto das aplicações bilineares $A : X \times Y \to \mathbb{K}$ cujas extensões A^{ttt} e A^{TtttT} atingem suas respectivas normas simultaneamente nos mesmos pontos, é denso em $\mathcal{L}(^2(X \times Y))$. Em [Aco98] é provado que o conjunto das aplicações bilineares e contínuas definidas em $X \times Y$, onde X e Y são espaços de Banach, tal que A^{ttt} atinge a norma é denso em $\mathcal{L}(^2(X \times Y))$.

Dizemos que $P \in \mathcal{P}(^2X)$ atinge a norma se existe $x_0 \in X$ tal que $\|P\| = |P(x_0)|$. Já vimos no Capítulo 1 que existem duas extensões de Arens para cada $A \in \mathcal{L}(^2(X \times Y))$ dadas por

$$A^{ttt}(x^{**}, y^{**}) = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} A(x_\alpha, y_\beta),$$

e

$$A^{TtttT}(x^{**}, y^{**}) = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} A(x_\alpha, y_\beta),$$

onde $(x_\alpha) \subset X$ e $(y_\beta) \subset Y$ são redes convergindo w^* para x^{**} e y^{**}, respectivamente. Nesta seção, colocaremos $A_{12} = A^{ttt}$ e $A_{21} = A^{TtttT}$ no intuito de simplificar a notação. Em geral, temos $\|A_{12}\| = \|A\| = \|A_{21}\|$, mas $A_{12} \neq A_{21}$ (vide Exemplos 1 e 2 de [AGM03]).

Agora, se $P \in \mathcal{P}(^2X)$ e $A \in \mathcal{L}(^2X)$ é a aplicação bilinear simétrica associada a P, então a *extensão canônica* de $P : X \to \mathbb{K}$ para o bidual X^{**} é dada por

$$\tilde{P}(x^{**}) := A_{12}(x^{**}, x^{**}) = A_{21}(x^{**}, x^{**}),$$

para cada $x^{**} \in X^{**}$, como vimos no final da terceira seção do Capítulo 1. Assim, temos $\|\tilde{P}\| = \|P\|$, para todo $P \in \mathcal{P}(^2X)$.

Teorema 3.3.1. (Teorema 2.1, [AGM03]) Seja X um espaço de Banach. O conjunto de todos os polinômios 2-homogêneos contínuos cuja extensão canônica para X^{**} atinge a norma é denso em $\mathcal{P}(^2X)$.

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}(^2X)$ tal que $\|P\| = 1$ e seja $A \in \mathcal{L}_s(^2X)$ a aplicação bilinear simétrica contínua associada a P. Dado $0 < \varepsilon < 1/3$, existe (veja a demonstração do Lema 3.2.2) uma sequência decrescente (ε_k) de números reais positivos que satisfaz as seguintes condições:

(1.1) $8\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$,

(1.2) $8\sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_k^2$,

(1.3) $\varepsilon_k < \frac{1}{10k}$, $\quad k \in \mathbb{N}$.

A justificativa para a existência dessa sequência é feita de forma inteiramente análoga ao Lema 3.2.2. Na verdade, a sequência é a mesma que tomamos naquele lema. Agora, usando indução sobre k, podemos tomar duas sequências $(P_k) \subset \mathcal{P}(^2X)$ e $(x_k) \subset S_X$, satisfazendo:

(2) $P_1 = P$,

(3) $P_k(x_k) \geq \|P_k\| - \varepsilon_k^2$, $k \in \mathbb{N}$,

(4) $P_{k+1}(x) := P_k(x) + \varepsilon_k A_k(x, x_k)^2$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$,

onde A_k é a única aplicação bilinear simétrica contínua associada a P_k, para cada $k \in \mathbb{N}$. De fato, seja $P = P_1$. Pela definição de $\|P_1\| = \|P\|$, existe $x_1 \in S_X$ tal que

$$P_1(x_1) \geq \|P_1\| - \varepsilon_1^2,$$

já que $\varepsilon_1 > 0$. Defina, então, para cada $x \in X$,

$$P_2(x) := P_1(x) + \varepsilon_1 A_1(x, x_1)^2,$$

onde $A_1 \in \mathcal{L}_s(^2X)$ é a única aplicação bilinear simétrica associada a $P_1 = P$. Note que P_2 é um polinômio 2-homogêneo, já que a aplicação $B_1(x, y) = A_1(x, y) + \varepsilon_1 A_1(x, x_1)A_1(y, x_1)$ é bilinear e é tal que $B_1(x,x) = P_2(x)$, para cada $x \in X$. Assim, pela definição de $\|P_2\|$, existe $x_2 \in S_X$ tal que

$$P_2(x_2) \geq \|P_2\| - \varepsilon_2^2,$$

já que $\varepsilon_2 > 0$. Defina, então, para cada $x \in X$,

$$P_3(x) = P_2(x) + \varepsilon_2 A_2(x, x_2)^2,$$

onde A_2 é a única aplicação bilinear simétrica associada a P_2. Então, $P_3 \in \mathcal{P}(^2X)$ e podemos continuar o processo indefinidamente.

Usando as propriedades acima, vamos provar que

(5) $\|P_j - P_k\| \leq 4(4/3)^2 \sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i$ e $\|P_k\| \leq 4/3$, $j < k$, $k \in \mathbb{N}$.

◀ Mostraremos isto usando indução sobre k. Se $k = 2$, então $j = 1$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|P_1 - P_2\| &= \sup_{x \in B_X} |(P_1 - P_2)(x)| \\
&= \sup_{x \in B_X} |P_1(x) - P_2(x)| \\
&\overset{(4)}{=} \sup_{x \in B_X} |P_1(x) - (P_1(x) + \varepsilon_1 A_1(x, x_1)^2)| \\
&= \sup_{x \in B_X} \varepsilon_1 |A_1(x, x_1)|^2 \\
&\leq \varepsilon_1 \|A_1\|^2 \\
&\leq \varepsilon_1 (2\|P_1\|)^2 \\
&= 4\varepsilon_1 \|P_1\|^2 \\
&\overset{(2)}{=} 4\varepsilon_1 \\
&< 4(4/3)^2 \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|P_2\| &= \|P_2 - P_1 + P_1\| \\
&\leq \|P_2 - P_1\| + \|P_1\| \\
&\leq 4\varepsilon_1 + 1 \\
&\overset{(1.1)}{<} \varepsilon/2 + 1 \\
&< 1/6 + 1 \\
&= 7/6 \\
&< 8/6 \\
&= 4/3.
\end{aligned}$$

Agora, suponha que (5) vale para $k \in \mathbb{N}$ e provemos para $k+1$. Note, primeiramente, que

$$\begin{aligned}
\|P_k - P_{k+1}\| &= \sup_{x \in B_X} |(P_k - P_{k+1})(x)| \\
&= \sup_{x \in B_X} |P_k(x) - P_{k+1}(x)| \\
&\overset{(4)}{=} \sup_{x \in B_X} |P_k(x) - (P_k(x) + \varepsilon_k A_k(x, x_k)^2)| \\
&= \sup_{x \in B_X} \varepsilon_k |A_k(x, x_k)|^2 \\
&\leq \varepsilon_k \|A_k\|^2 \\
&\leq \varepsilon_k (2\|P_k\|)^2 \\
&= 4\varepsilon_k \|P_k\|^2 \\
&\overset{\texttt{(HI)}}{<} 4(4/3)^2 \varepsilon_k.
\end{aligned}$$

Então, se $j < k$,

$$\begin{aligned}
\|P_j - P_{k+1}\| &= \|P_j - P_k + P_k - P_{k+1}\| \\
&\leq \|P_j - P_k\| + \|P_k - P_{k+1}\| \\
&\overset{\texttt{(HI)}}{<} 4(4/3)^2 \sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i + 4(4/3)^2 \varepsilon_k \\
&= 4(4/3)^2 \sum_{i=j}^{k} \varepsilon_i
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|P_{k+1}\| &= \|P_1 - P_1 + P_{k+1}\| \\
&\leq \|P_1\| + \|P_{k+1} - P_1\| \\
&< 1 + 4(4/3)^2 \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \\
&\leq 1 + 4(4/3)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \\
&\overset{(1.1)}{<} 1 + 4(4/3)^2 (1/8)\varepsilon \\
&< 1 + 4(4/3)^2 (1/8)(1/3) \\
&< 4/3,
\end{aligned}$$

já que

$$1 + 4\left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \left(\frac{16}{9}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{70}{54} < \frac{72}{54} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Isto prova (5). ▶

Agora, mostraremos que

(6.1) $\|P_{k+1}\| > \|P_k\| + \varepsilon_k \|P_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2$, para cada $k \in \mathbb{N}$, (6.2) $(\|P_k\|)$ é uma sequência estritamente crescente,

(6.3) $\|P_k\| \geq 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

◀ Vamos provar primeiro (6.1). Note que

$$\begin{aligned} \|P_{k+1}\| &\geq |P_{k+1}(x_k)| \\ &\overset{(4)}{=} |P_k(x_k) + \varepsilon_k A_k(x_k, x_k)^2| \\ &= |P_k(x_k) + \varepsilon_k P_k(x_k)^2| \\ &= |(1 + \varepsilon_k P_k(x_k))P_k(x_k)| \\ &\overset{(3)}{\geq} \left(1 + \varepsilon_k(\|P_k\| - \varepsilon_k^2)\right)\left(\|P_k\| - \varepsilon_k^2\right) \\ &= \left(1 + \varepsilon_k\|P_k\| - \varepsilon_k^3\right)\left(\|P_k\| - \varepsilon_k^2\right) \\ &\geq \|P_k\| + \varepsilon_k\|P_k\|^2 - \varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k^3\|P_k\| + \varepsilon_k^5 \\ &> \|P_k\| + \varepsilon_k\|P_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2 \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é provada a seguir. Temos que provar que

$$-\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k^3\|P_k\| + \varepsilon_k^5 > -4\varepsilon_k^2,$$

ou seja, que $3 - 2\varepsilon_k\|P_k\| + \varepsilon_k^3 > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} 3 - 2\varepsilon_k\|P_k\| + \varepsilon_k^3 &\geq 3 - 2\varepsilon_k\|P_k\| \\ &\overset{(5)}{\geq} 3 - 2\varepsilon_k(4/3) \\ &= 3 - (8/3)\varepsilon_k \\ &> 3 - 3\varepsilon_k \\ &\overset{(1.3)}{>} 3 - (3/10k) \\ &> 0, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto prova (6.1).

Para provar (6.2) e, consequentemente (6.3), usaremos indução sobre k. Se $k = 2$, então $j = 1$ e de (6.1), temos que

$$\|P_2\| > \|P_1\| + \varepsilon_1\|P_1\|^2 - 4\varepsilon_1^2.$$

Basta, então, mostrar que $\varepsilon_1\|P_1\|^2 - 4\varepsilon_1^2 > 0$, ou seja, que $\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1^2 > 0$, já que $\|P_1\| = \|P\| = 1$. Com efeito,

$$1 - 4\varepsilon_1 \overset{(1.1)}{>} 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} > 0.$$

Suponha agora o resultado válido para k e provemos para $k+1$. Novamente de (6.1), temos que

$$\|P_{k+1}\| > \|P_k\| + \varepsilon_k\|P_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2$$

e, portanto, devemos mostrar que $\varepsilon_k\|P_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2 > 0$. Por hipótese de indução, temos

$$\|P_k\| > \|P_{k-1}\| > \ldots > \|P_2\| > \|P_1\| = 1,$$

ou seja, $\|P_k\| \geq 1$. Daí,

$$\|P_k\|^2 - 4\varepsilon_k \geq 1 - 4\varepsilon_k > \frac{5}{6} > 0.$$

Isto prova (6.2) e que $\|P_k\| \geq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. ▶

Finalmente, vamos provar que

(7) $|A_j(x_k, x_j)|^2 \geq \|P_j\|^2 - 6\varepsilon_j$, para $j < k$ e $k \in \mathbb{N}$.

▶ Com efeito,

$$\begin{aligned}
|P_{j+1}(x_k)| &= |P_k(x_k) - P_k(x_k) + P_{j+1}(x_k)| \\
&\geq |P_k(x_k)| - |(P_{j+1} - P_k)(x_k)| \\
&\geq |P_k(x_k)| - \|P_{j+1} - P_k\| \\
&\overset{(3)}{\geq} \|P_k\| - \varepsilon_k^2 - \|P_{j+1} - P_k\| \\
&\overset{(5)}{\geq} \|P_k\| - \varepsilon_k^2 - 4(4/3)^2 \sum_{i=j+1}^{k-1} \varepsilon_i \\
&> \|P_k\| - \varepsilon_k^2 - 4(16/8) \sum_{i=j+1}^{k-1} \varepsilon_i \\
&\overset{(1.2)}{\geq} \|P_{j+1}\| - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_j^2 \\
&> \|P_{j+1}\| - \varepsilon_j^2 - \varepsilon_j^2 \\
&= \|P_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2 \\
&\overset{(6.1)}{\geq} \|P_j\| + \varepsilon_j\|P_j\|^2 - 4\varepsilon_j^2 - 2\varepsilon_j^2 \\
&= \|P_j\| + \varepsilon_j\|P_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|P_{j+1}(x_k)| &\overset{(4)}{=} |P_j(x_k) + \varepsilon_j A_j(x_k, x_j)^2| \\
&\leq \|P_j\| + \varepsilon_j |A_j(x_k, x_j)|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade

$$\|P_j\| + \varepsilon_j |A_j(x_k, x_j)|^2 \geq |P_{j+1}(x_k)| \geq \|P_j\| + \varepsilon_j \|P_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2$$

implica que

$$|A_j(x_k, x_j)|^2 \geq \|P_j\|^2 - 6\varepsilon_j,$$

sempre que $j < k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. ▶

Provados todos estes itens, partimos agora para a parte final da demonstração. De (5), temos que para cada $k \in \mathbb{N}$ e $j < k$,

$$\begin{aligned} \|P_j - P_k\| &\leq 4(16/9)\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i \\ &< 4(16/8)\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i \\ &= 8\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i \end{aligned}$$

e

$$\|A_j - A_k\| \leq 2\|P_j - P_k\| < 16\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i,$$

onde $A_j - A_k$ é a única aplicação bilinear simétrica contínua associada a $P_j - P_k$. Assim, usando (1.1), concluímos que (P_k) e (A_k) são sequências de Cauchy nos espaços de Banach $\mathcal{P}(^2X)$ e $\mathcal{L}_s(^2X)$, respectivamente. Sejam, portanto, $Q \in \mathcal{P}(^2X)$ e $B \in \mathcal{L}_s(^2X)$ tais que $Q = \lim_k P_k$ e $B = \lim_k A_k$. Vamos provar que B é a aplicação bilinear simétrica contínua associada a Q. Com efeito, para todo $(x, y) \in X \times X$, temos $A_k(x, y) \to B(x, y)$ quando $k \to \infty$. Em particular, $A_k(x, x) \to B(x, x)$, para cada $x \in X$, se $k \to \infty$. Mas para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k(x, x) = P_k(x)$, sempre que $x \in X$. Agora, como $P_k(x) \to Q(x)$, para cada $x \in X$, temos que pela unicidade do limite $B(x, x) = Q(x)$, para todo $x \in X$.

Dado $\eta > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|Q - P_j\| < \eta$ e $\|B - A_j\| < \eta$, para todo $j \geq j_0$. Agora, como $\|Q\| - \|P_j\| \leq \|Q - P_j\|$, temos que

$$\|Q\| - \|P_j\| \leq \|Q - P_j\| < \eta,$$

para todo $j \geq j_0$, ou seja,

$$\|P_j\| > \|Q\| - \eta, \ \forall j \geq j_0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} |B(x_k, x_j)| &= |A_j(x_k, x_j) - A_j(x_k, x_j) + B(x_k, x_j)| \\ &\geq |A_j(x_k, x_j)| - |(B - A_j)(x_k, x_j)| \\ &\geq |A_j(x_k, x_j)| - \|B - A_j\|\|x_k\|\|x_j\| \\ &= |A_j(x_k, x_j)| - \|B - A_j\| \\ &\overset{(7)}{>} \sqrt{\|P_j\|^2 - 6\varepsilon_j} - \eta \\ &> \sqrt{(\|Q\| - \eta)^2 - 6\varepsilon_j} - \eta, \end{aligned}$$

sempre que $k > j \geq j_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora note o seguinte: como $\delta_X(S_X)$ é um conjunto w^* relativamente compacto, podemos tomar

$x^{**} \in X^{**}$ um ponto de acumulação w^* da sequência (x_k). Então,

$$\begin{aligned} |B_{21}(x^{**}, x_j)| &= |B_{12}(x^{**}, x_j)| \\ &= |\lim_k B_{12}(x_k, x_j)| \\ &= |\lim_k B(x_k, x_j)| \\ &\geq \sqrt{(\|Q\| - \eta)^2 - 6\varepsilon_j} - \eta, \end{aligned}$$

sempre que $j \geq j_0$, donde

$$\begin{aligned} |B_{21}(x^{**}, x^{**})| &\geq \sqrt{(\|Q\| - \eta)^2} - \eta \\ &= \|Q\| - 2\eta. \end{aligned}$$

para todo $\eta > 0$. Portanto,

$$|\tilde{Q}(x^{**})| = |B_{21}(x^{**}, x^{**})| \geq \|Q\|.$$

Mas $\|\tilde{Q}\| \geq |\tilde{Q}(x^{**})|$ e $\|Q\| = \|\tilde{Q}\|$, ou seja,

$$\|\tilde{Q}\| \geq |\tilde{Q}(x^{**})| \geq \|Q\| \geq \|\tilde{Q}\|,$$

isto é, $|\tilde{Q}(x^{**})| = \|\tilde{Q}\|$. Logo, $\tilde{Q}$ atinge a norma em x^{**}. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \|P - P_k\| &\overset{(2)}{=} \|P_1 - P_k\| \\ &\overset{(5)}{\leq} 4(4/3)^2 \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i \\ &< 8 \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \\ &\overset{(1.1)}{<} \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|P - Q\| \leq \varepsilon$. Isto prova o teorema. □

Consideremos agora um teorema do tipo Lindenstrauss para aplicações bilineares. Dizemos que $A \in \mathcal{L}(^2(X \times Y))$ atinge a norma, se existe $(x_0, y_0) \in B_X \times B_Y$ tal que $\|A\| = |A(x_0, y_0)|$.

Teorema 3.3.2. (Teorema 2.2, [AGM03]) Sejam X e Y espaços de Banach. O conjunto das aplicações bilineares $A : X \times Y \to \mathbb{K}$ cujas extensões A_{12} e A_{21} atingem a norma simultaneamente nos mesmos pontos, é denso em $\mathcal{L}(^2(X \times Y))$.

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}(^2(X \times Y))$ e $0 < \varepsilon < 1/3$. Suponha que $\|A\| = 1$ e tome, como no Lema 3.2.2, (ε_k) uma sequência decrescente de números reais positivos que satisfazem as seguintes condições:

(1.1) $2\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$,

(1.2) $2\sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_k^2$,

(1.3) $\varepsilon_k < \frac{1}{10k}$, $\quad k \in \mathbb{N}$.

Indutivamente, construa sequências $(A_k) \subset \mathcal{L}(^2(X \times Y))$, $(x_k) \subset S_X$ e $(y_k) \subset S_Y$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(2) $A_1 = A$,

(3) $A_k(x_k, y_k) \geq \|A_k\| - \varepsilon_k^2$,

(4) $A_{k+1}(x, y) := A_k(x, y) + \varepsilon_k A_k(x, x_k) A_k(x_k, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ e $k \in \mathbb{N}$.

Agora, como no teorema anterior, podemos provar que

(5) $\|A_j - A_k\| \leq 2 \sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i$ e $\|A_k\| \leq 4/3$, sempre que $j < k$ e $k \in \mathbb{N}$,

(6.1) $\|A_{k+1}\| > \|A_k\| + \varepsilon_k \|A_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2$, para cada $k \in \mathbb{N}$,

(6.2) $(\|A_k\|)$ é uma sequência estritamente crescente,

(6.3) $\|A_k\| \geq 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$,

(7.1) $|A_j(x_k, y_j)| \geq \|A_j\| - 6\varepsilon_j,\ j < k$,

(7.2) $|A_j(x_j, y_k)| \geq \|A_j\| - 6\varepsilon_j,\ j < k$.

Feito isso, partimos para a reta final da demonstração. Por (5) e (1.1), podemos afirmar que (A_k) é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{L}(^2(X \times Y))$. Seja, então, $B \in \mathcal{L}(^2(X \times Y))$ tal que $B = \lim_j A_j$. Então, B satisfaz $\|A - B\| \leq \varepsilon$ por (5). Usando (7.1) e (7.2), e notando que $-6\varepsilon_j > -1/j$, para cada $j \in \mathbb{N}$, vamos provar que

$$|B(x_k, y_j)| \geq \|B\| - 1/j,$$

$$|B(x_j, y_k)| \geq \|B\| - 1/j,$$

sempre que $j < k$. De fato, se $j < k$, então

$$\begin{aligned}
|B(x_k, y_j)| &= |B(x_k, y_j) - A_j(x_k, y_j) + A_j(x_k, y_j)| \\
&\geq |A_j(x_k, y_j)| - \|B - A_j\| \\
&\geq \|A_j\| - \frac{1}{j} - \|B - A_j\|.
\end{aligned}$$

Só que $\|A_j\| = \|A_j - B + B\| \geq \|B\| - \|B - A_j\|$. Logo,

$$|B(x_k, y_j)| \geq \|B\| - \frac{1}{j} - 2\|B - A_j\|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|B - A_j\| \leq \|B - A\| + \|A - A_j\| &= \|B - A\| + \|A_1 - A_j\| \\
&\leq \varepsilon + 2\sum_{i=1}^{j-1} \varepsilon_i \\
&\leq \varepsilon + 2\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \\
&< 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $0 < \varepsilon < 1/3$, ou seja, $-2\|B - A_j\| \geq -4\varepsilon$. Segue, então, a primeira das desigualdades. Usando (7.2) podemos provar a outra desigualdade de forma inteiramente análoga.

Agora, sejam $x_0^{**} \in X^{**}$ e $y_0^{**} \in Y^{**}$ pontos de acumulação w^* das sequências $(x_k) \subset S_X$ e $(y_k) \subset S_Y$, respectivamente. Então, usando os resultados sobre extensões de Arens feitas no primeiro capítulo, temos

$$\begin{aligned} |B_{21}(x_0^{**}, y_j)| &= |B_{12}(x_0^{**}, y_j)| \\ &= |\lim_k B_{12}(x_k, y_j)| \\ &= |\lim_k B(x_k, y_j)| \\ &\geq \|B\| - 1/j, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |B_{12}(x_j, y_0^{**})| &= |B_{21}(x_j, y_0^{**})| \\ &= |\lim_k B_{21}(x_j, y_k)| \\ &= |\lim_k B(x_j, y_k)| \\ &\geq \|B\| - 1/j, \end{aligned}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} \|B\| = \|B_{21}\| &\geq |B_{21}(x_0^{**}, y_0^{**})| \\ &\geq \|B\| \\ &= \|B_{12}\| \\ &\geq |B_{12}(x_0^{**}, y_0^{**})| \\ &\geq \|B\| \\ &= \|B_{12}\|, \end{aligned}$$

ou seja, $\|B_{12}\| = |B_{12}(x_0^{**}, y_0^{**})| = \|B_{21}\| = |B_{21}(x_0^{**}, y_0^{**})|$. Isto termina com a demonstração do teorema.

□

Os resultados provados nesta seção foram obtidos em 2003 por Richard Aron, Domingo García e Manuel Maestre no artigo [AGM03]. Cinco anos antes, María D. Acosta em [Aco98] provou que o conjunto das aplicações bilineares e contínuas definidas em $X \times Y$ cujo terceiro adjunto atinge a norma, é denso em $\mathcal{L}(^2(X \times Y))$ que é o análogo ao que Lindenstrauss fez para operadores lineares. Assim, o Teorema 3.3.2 é um melhoramento deste resultado, já que em [AGM03], os autores exibem um exemplo de uma aplicação bilinear e contínua tal que somente uma de suas extensões de Arens atinge a norma. Outros resultados positivos em relação às aplicações multilineares e polinômios são descritos a seguir.

Em 1995, Richard Aron, C. Finet e E. Werner provaram que se X possui a *propriedade de Radon-Nikodym*, então o conjunto das aplicações N-lineares definidas em X que atingem a norma é denso em $\mathcal{L}(^N X)$, para todo $N \geq 1$, no artigo [AFW95]. Já na tese de doutorado de F. Aguirre [Agu96] de 1996, é mostrado que se para algum espaço de Banach X, o conjunto $\mathcal{NAL}(^{N+1}X)$

é denso em $\mathcal{L}(^{N+1}X)$, então o conjunto $\mathcal{NAL}(^N X)$ é denso em $\mathcal{L}(^N X)$ como vemos na próxima proposição.

Teorema 3.3.3. **(Proposição 3.1, [Agu96])** Sejam X um espaço de Banach e $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{NAL}(^{N+1}X)$ é denso em $\mathcal{L}(^{N+1}X)$ Então, $\mathcal{NAL}(^N X)$ é denso em $\mathcal{L}(^N X)$.

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}(^N X)$ com $\|A\| = 1$ e $0 < \varepsilon < 1$. Tome $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| = 1$ e defina $B \in \mathcal{L}(^{N+1}X)$ por

$$B(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) := A(x_1, \ldots, x_N)x^*(x_{N+1}),$$

para cada $x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} \in X$. Assim, por hipótese, existe $B' \in \mathcal{NAL}(^{N+1}X)$ tal que $\|B'\| = 1$ e $\|B - B'\| < \varepsilon/2$. Se $a_1, \ldots, a_N, a_{N+1} \in B_X$ são tais que $|B'(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1})| = \|B'\| = 1$, então, por um lado, temos

$$B(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1}) = A(a_1, \ldots, a_n)x^*(a_{N+1}),$$

o que acarreta

$$|B(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1})| \leq \|A\|\|a_1\| \cdots \|a_N\| \cdot |x^*(a_{N+1})| \leq |x^*(a_{N+1})|.$$

Por outro lado, temos

$$|\ B'(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1}) - B(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$|B'(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1})| - |B(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, portanto,

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < |B(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1})| \leq |x^*(a_{N+1})|,$$

já que $|B'(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1})| = 1$. Agora, como $x^*(a_{N+1}) \neq 0$, podemos definir

$$A'(x_1, \ldots, x_N) := \frac{1}{x^*(a_{N+1})} \cdot B'(x_1, \ldots, x_N, a_{N+1}).$$

Logo, A' é N-linear. Além disso, se $x_1, \ldots, x_N \in B_X$, então

$$\begin{aligned}
|(A - A')(x_1, \ldots, x_N)| &= \left| A(x_1, \ldots, x_N) - \frac{1}{x^*(a_{N+1})} \cdot B'(x_1, \ldots, x_N, a_{N+1}) \right| \\
&= \left| \frac{A(x_1, \ldots, x_N)x^*(a_{N+1}) - B'(x_1, \ldots, x_N, a_{N+1})}{x^*(a_{N+1})} \right| \\
&= \frac{|B(x_1, \ldots, x_N, a_{N+1}) - B'(x_1, \ldots, x_N, a_{N+1})|}{|x^*(a_{N+1})|} \\
&= \frac{|(B - B')(x_1, \ldots, x_N, a_{N+1})|}{|x^*(a_{N+1})|} \\
&\leq \frac{\|B - B'\|}{|x^*(a_{N+1})|}.
\end{aligned}$$

Mas $|x^*(a_{N+1})| \geq 1 - \varepsilon/2 = (2-\varepsilon)/2$, ou seja,

$$\frac{1}{|x^*(a_{N+1})|} \leq \frac{2}{2-\varepsilon}.$$

Logo,

$$|(A-A')(x_1,\ldots,x_N)| \leq \|B-B'\| \cdot \frac{1}{|x^*(a_{N+1})|} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{2-\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \varepsilon,$$

sempre que $x_1,\ldots,x_N \in B_X$. Portanto, $\|A-A'\| \leq \varepsilon$. Resta-nos provar que $A' \in \mathcal{NAL}(^N X)$. Note que

$$\|A'\| = \sup_{\|x_i\|=1} \frac{|B'(x_1,\ldots,x_N,a_{N+1})|}{|x^*(a_{N+1})|} \leq \frac{\|B'\|}{|x^*(a_{N+1})|} = \frac{1}{|x^*(a_{N+1})|},$$

ou seja,

$$\|A'\| \cdot |x^*(a_{N+1})| \leq 1.$$

Mas $|A'(a_1,\ldots,a_N)| = |B'(a_1,\ldots,a_N,a_{N+1})|/|x^*(a_{N+1})| = \frac{1}{|x^*(a_{N+1})|}$ e, portanto,

$$1 = |A'(a_1,\ldots,a_N)| \cdot |x^*(a_{N+1})|.$$

Logo,

$$\|A'\| \cdot |x^*(a_{N+1})| \leq 1 = |A'(a_1,\ldots,a_N)| \cdot |x^*(a_{N+1})|.$$

Como $|x^*(a_{N+1})| \neq 0$, segue que

$$\|A'\| \leq |A'(a_1,\ldots,a_N)| \leq \|A'\|.$$

Portanto, $\|A'\| = |A'(a_1,\ldots,a_N)|$. □

Entretanto, no artigo [SP98] de 1998, M. Jiménez Sevilla e R. Payá fornecem, para cada $N \in \mathbb{N}$, um espaço de Banach X tal que $\mathcal{NAL}(^N X)$ é denso em $\mathcal{L}(^N X)$ mas o conjunto $\mathcal{NAL}(^{N+1} X)$ *não* é denso em $\mathcal{L}(^{N+1} X)$.

Assim vemos que teoremas do tipo Bishop-Phelps valem para esses tipos de funções se são adicionadas hipóteses sobre os espaços de Banach envolvidos. Por outro lado, utilizando as ideias desta seção quando trabalhamos com as extensões de aplicações bilineares, conseguimos resultados positivos sem adicionar hipótese alguma. Por isso, é natural nos perguntar se vale um teorema do tipo Lindenstrauss para aplicações N-lineares e polinômios N-homogêneos definidos em espaços de Banach como fizemos para aplicações bilineares e polinômios 2-homogêneos.

Recentemente, mais precisamente em 2006, María D. Acosta, Domingo García e Manuel Maestre generalizaram o Teorema 3.3.2 para aplicações N-lineares no artigo [AGM06]. Eles provaram os seguintes resultados:

1. *Seja X_k um espaço de Banach, onde $1 \leq k \leq N$. Então o conjunto das aplicações N-lineares definidas em $X_1 \times \ldots \times X_N$ tal que todas as extensões de Arens definidas em $X_1^{**} \times \ldots \times X_N^{**}$ atingem a norma simultaneamente na mesma N-upla, é denso no espaço $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$.*

2. *Sejam Y e X_k, onde $1 \leq k \leq N$, espaços de Banach. Então, o conjunto das aplicações N-lineares $B : X_1 \times \ldots \times X_N \to Y$ cujas extensões de Arens atingem a norma simultaneamente na mesma N-upla, é denso em $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N); Y)$.*

Mais atual ainda é o resultado obtido por Daniel Carando, Silvia Lassalle e Martin Mazzitelli em 2012 no artigo [CLM12]. Neste artigo, eles mostraram que vale um teorema do tipo Lindenstrauss para polinômios N-homogêneos com algumas hipóteses sobre os espaços de Banach. Mais precisamente, eles mostraram os seguintes resultados:

3. *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que X^* seja separável e que possua a propriedade de aproximação. Então, o conjunto de todos os polinômios em $\mathcal{P}(^N X, Y^*)$ cuja extensão canônica atinge a norma, é denso em $\mathcal{P}(^N X, Y^*)$,*

4. *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que X^* seja separável e que possua a propriedade de aproximação. Então, o conjunto dos polinômios em $\mathcal{P}(^N X)$ cuja extensão canônica atinge a norma, é denso em $\mathcal{P}(^N X)$.*

Apresentamos a demonstração do item 1 no último capítulo da dissertação.

Capítulo 4

O Teorema de Lindenstrauss Para Aplicações N-lineares

4.1 Introdução

O teorema de Bishop-Phelps [BP61], como vimos no Capítulo 2, afirma que se X é um espaço de Banach, então o conjunto dos funcionais que atingem a norma é denso em X^*. Desde o seu surgimento, muito se tem feito a fim de generalizá-lo para funções lineares e não lineares. Por exemplo, em 1963, Lindestrauss [Lin63] provou que o conjunto das aplicações lineares e contínuas $T : X \to Y$ cujo segundo adjunto $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ atinge a norma é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$, quando X e Y são espaços de Banach, como vimos no começo do terceiro capítulo. Neste mesmo artigo, ele apresentou exemplos que mostravam a não existência de um teorema do tipo Bishop-Phelps para operadores lineares. Além disso, como já mencionamos no final do capítulo anterior, também não valem teoremas do tipo Bishop-Phelps para polinômios N-homogêneos e tampouco para aplicações N-lineares.

O que falar então sobre teoremas do tipo Lindenstrauss para funções não-lineares? Quando apresentamos as versões deste teorema para aplicações bilineares e polinômios 2-homogêneos no Capítulo 3, foi necessário introduzir uma nova ferramenta. Definimos para uma dada aplicação bilinear e contínua a *extensão de Arens*, definida em $X^{**} \times Y^{**}$ e tal extensão fez o papel do segundo adjunto de um operador T (vide Teorema 3.2.4). Ademais, foram usadas as ideias originais de Lindenstrauss para conseguir resultados positivos para esses tipos de funções.

Assim, é natural nos perguntar se vale um teorema de mesma natureza para aplicações N-lineares e contínuas. Mais ainda, será que podemos fazer uso das mesmas ideias de Lindenstrauss para conseguirmos bons resultados? De qualquer maneira, uma coisa é certa, precisamos estudar extensões de aplicações N-lineares definidas em um produto de espaços de Banach. Tais extensões foram introduzidas no final do Capítulo 1 e, nesta seção, faremos uso das extensões de Davie-Gamelin, também conhecidas como extensões de Aron-Berner.

O que vamos apresentar neste capítulo é uma generalização do Teorema 3.3.2 substituindo as aplicações bilineares por aplicações N-lineares, com $N \geq 2$. Utilizaremos ideias próximas ao Teorema 3.2.4, mas não tão próximas a ponto de ter semelhança com as demonstrações dos teoremas Teorema 3.3.1 e Teorema 3.3.2. O resultado deste capítulo foi provado em 2006 por María Acosta, Domingo García e Manuel Maestre em [AGM06].

4.2 Preliminares

Vamos começar introduzindo novas ferramentas que vão nos auxiliar na demonstração do teorema principal. Relembramos alguns fatos que vimos no Capítulo 1 e demonstramos a existência de duas sequências de números reais que satisfazem algumas propriedades. Tais sequências gozam de propriedades semelhantes àquelas do Lema 3.2.2.

Sejam $X_1, \ldots, X_N$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, onde $N \geq 2$ é um número natural fixado. Consideremos um subconjunto H de $\{1, 2, \ldots, N\}$. Definimos a aplicação multilinear $P_H : X_1 \times \ldots \times X_N \to X_1 \times \ldots \times X_N$ por

$$P_H(x_1, \ldots, x_N) = (y_1, \ldots, y_N),$$

onde

$$y_k = \begin{cases} x_k, & \text{se} \quad k \in H \\ 0, & \text{se} \quad k \notin H. \end{cases}$$

Por exemplo, se $H = \{1\}$, então

$$P_H(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (x_1, 0, \ldots, 0),$$

onde $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$. Note que se $H = \emptyset$, então $P_H \equiv 0$ e se $H = \{1, \ldots, N\}$ então $P_H \equiv Id$, onde Id é o operador identidade de $X_1 \times \ldots \times X_N$ em $X_1 \times \ldots \times X_N$. Note que se a norma de um elemento $z \in X_1 \times \ldots \times X_N$, é considerada como sendo $\|z\| := \max\{\|z_k\| : 1 \leq k \leq N\}$, temos

$$\begin{aligned} \|P_H(x_1, \ldots, x_N)\| &= \|(y_1, \ldots, y_N)\| \\ &\leq \|(x_1, \ldots, x_N)\| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

para qualquer $H \subset \{1, \ldots, N\}$. Portanto, $\|P_H\| \leq 1$, para qualquer $H \subset \{1, \ldots, N\}$. Claro que se $H = \emptyset$, então $\|P_H\| = 0$ e se $H = \{1, \ldots, N\}$, então $\|P_H\| = \|Id\| = 1$. Utilizaremos várias vezes a aplicação P_H no decorrer deste capítulo.

Agora, sejam $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ e θ uma permutação do conjunto $\{1, \ldots, N\}$. Então, definimos a aplicação $\theta A : X_{\theta(1)} \times \ldots \times X_{\theta(N)} \to \mathbb{K}$ por

$$\theta A(x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)}) = A(x_1, \ldots, x_N), \tag{4.1}$$

para cada $(x_1, \ldots, x_N) \in X_1 \times \ldots \times X_N$. Então, θA é uma aplicação N-linear e

$$\begin{aligned} \|\theta A\| &= \sup_{\substack{\|x_{\theta(k)}\|=1 \\ k=1,\ldots,N}} |\theta A(x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)})| \\ &= \sup_{\substack{\|x_k\|=1 \\ k=1,\ldots,N}} |A(x_1, \ldots, x_N)| \\ &= \|A\|, \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação θA é contínua e satisfaz $\|\theta A\| = \|A\|$, para cada permutação θ do conjunto $\{1, \ldots, N\}$. Além disso, lembrando da expressão (1.4) do Capítulo 1, segue que se I é a permutação identidade

$$\begin{aligned} (\theta A)_I(x^{**}_{\theta(1)}, \ldots, x^{**}_{\theta(N)}) &= \lim_{d_{I(\theta(N))}} \cdots \lim_{d_{I(\theta(1))}} (\theta A)(x_{d_{\theta(1)}}, \ldots, x_{d_{\theta(N)}}) \\ &= \lim_{d_{\theta(N)}} \cdots \lim_{d_{\theta(1)}} A(x_{d_1}, \ldots, x_{d_N}) \\ &= A_\theta(x^{**}_1, \ldots, x^{**}_N), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\theta A)_I(x^{**}_{\theta(1)}, \ldots, x^{**}_{\theta(N)}) = A_\theta(x^{**}_1, \ldots, x^{**}_N), \tag{4.2}$$

onde $x^{**}_k \in X^{**}_k$, com $k = 1, \ldots, N$. A seguir, justificaremos a existência de duas sequências que nos auxiliarão mais tarde.

Lema 4.2.1. Dados $0 < \varepsilon < 1$ e $N \geq 2$, existem duas sequências decrescentes (a_n) e (η_n) de números reais positivos tais que

(1) $\eta_n < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

(2) $2^{N+2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \varepsilon < 1$,

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}{a_n^N} = 0$,

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{a_n^N} = 0$,

(5) As sequências $\left(\frac{\eta_n}{a_n^k}\right)_n$ e $\left(\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}{a_n^k}\right)_n$ são decrescentes, para todo $1 \leq k \leq N$.

Demonstração. Defina, para cada $i \in \mathbb{N}$, a sequência (a_n) por

$$a_i = \left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^i.$$

Então,

$$\begin{aligned} 2^{N+2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i &= 2^{N+2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^i \\ &= 2^{N+2} \cdot \frac{\frac{\varepsilon}{10^N}}{1 - \frac{\varepsilon}{10^N}} \\ &= 2^{N+2} \cdot \frac{\varepsilon}{10^N - \varepsilon} \\ &= \frac{2^{N+2}}{10^N - \varepsilon} \cdot \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, (2) está provado. Agora, vamos tomar uma subsequência (a_{p_j}) de (a_p) definida da seguinte maneira: $p_1 = 1$ e $p_j = 1 + (N+1)p_{j-1}$, se $j \geq 2$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{p_i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^{p_i} &< \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^{j+p_{n+1}} \\ &= \frac{\left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^{p_{n+1}}}{1 - \frac{\varepsilon}{10^N}} \\ &= \frac{\varepsilon^{p_{n+1}}}{10^{N\cdot p_{n+1}}} \cdot \frac{10^N}{10^N - \varepsilon} \\ &= \frac{1}{10^N - \varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^{p_{n+1}}}{10^{N(p_{n+1}-1)}}.\end{aligned}$$

Como $p_{n+1} = 1 + (N+1)p_n$, segue que $p_{n+1} - 1 = (N+1)p_n$ e, então, $10^{N(p_{n+1}-1)} = 10^{N(N+1)p_n}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{p_i} < \frac{1}{10^N - \varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^{1+(N+1)p_n}}{10^{N(N+1)p_n}} &= \frac{\varepsilon}{10^N - \varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^{(N+1)p_n}}{10^{N(N+1)p_n}} \\ &= \frac{\varepsilon}{10^N - \varepsilon} \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^{p_n}\right]^{N+1} \\ &< \varepsilon \cdot a_{p_n}^N \cdot a_{p_n}.\end{aligned}$$

Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{p_i}}{a_{p_n}^N} < \varepsilon \cdot a_{p_n}.$$

Como $a_{p_n} \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{p_i}}{a_{p_n}^N} = 0,$$

o que prova (3) se tomarmos no lugar da sequência (a_n) a subsequência (a_{p_i}). Com isso, para todo $1 \leq k \leq N$, temos que $a_n^k \geq a_n^N$, donde $\frac{1}{a_n^k} \leq \frac{1}{a_n^N}$ e, portanto,

$$0 < \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}{a_n^k} \leq \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}{a_n^N}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}{a_n^k} = 0,$$

para cada $1 \leq k \leq N$. Sendo assim, podemos assumir que a sequência $\left(\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}{a_n^k}\right)_n$ é decrescente para todo $1 \leq k \leq N$, já que, se necessário, tomamos uma subsequência que goza desta propriedade. Isto prova a segunda afirmação de (5).

Finalmente, tome $\eta_n = a_n^{2N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, como $0 < a_n < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\eta_n = a_n^{2N} = \left[\left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^n\right]^{2N} = \left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^{2Nn} = \left[\left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^n\right]^N \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon}{10^N}\right)^n\right]^N = a_n^N \cdot a_n^N < a_n^N \cdot a_n.$$

Logo,

$$0 < \frac{\eta_n}{a_n^N} < a_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{a_n^N} = 0,$$

já que $a_n \to 0$. Isto prova (4). Além disso, se $1 \leq k \leq N$, então $a_n^k \geq a_n^N$, o que implica que $\frac{1}{a_n^k} \leq \frac{1}{a_n^N}$ e, portanto,

$$0 < \frac{\eta_n}{a_n^k} \leq \frac{\eta_n}{a_n^N}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{a_n^N} = 0$, então $\frac{\eta_n}{a_n^k} \longrightarrow 0$ para cada $1 \leq k \leq N$. Ou seja, podemos assumir que a sequência $\left(\frac{\eta_n}{a_n^k}\right)_n$ é decrescente para todo $1 \leq k \leq N$, já que, se necessário, tomamos uma subsequência que goza desta propriedade. $\square$

4.3 A demonstração do teorema

Estamos aptos para demonstrar o teorema de Lindenstrauss para aplicações N-lineares contínuas. Este teorema, como demonstrado em [AGM06], possui uma vasta demonstração e, por isso, optamos por dividí-la em dois lemas e um teorema. No Lema 4.3.1, construiremos uma sequência de Cauchy (A_n) que goza de algumas propriedades. O limite B desta sequência estará próximo de uma aplicação N-linear A fixada previamente. A partir daí, passaremos a trabalhar somente com a aplicação B, fazendo uso das propriedades da sequência (A_n) já provadas anteriormente. No Lema 4.3.2, provaremos algumas desigualdades que relacionam as aplicações B e A_n. Por fim, enunciamos e demonstramos o resultado prometido desse capítulo.

De agora em diante, consideremos $N \geq 2$ e $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ tal que $\|A\| = 1$, onde $X_1, \ldots, X_N$ são espaços de Banach. Note a semelhança do próximo lema com o Lema 3.2.3.

Lema 4.3.1. Sejam $X_1, \ldots, X_N$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ uma aplicação N-linear tal que $\|A\| = 1$. Para cada $0 < \varepsilon < 1$, consideremos as sequências do Lema 4.2.1 gozando de suas respectivas propriedades lá indicadas. Então, existe uma sequência $(A_n) \subset \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ tal que

(1) $A_1 = A$,

(2) $A_n(x^n) = \operatorname{Re} A_n(x^n) > \|A_n\| - \eta_n$, onde $x^n := (x_1^n, \ldots, x_N^n) \in S_{X_1} \times \ldots \times S_{X_N}$,

(3) $\|A_{n+1} - A_n\| \leq 2^N a_n \|A_n\|$,

(4) $\|A_{n+1}\| \leq \|A_n\| + 2^N a_n \|A_n\|$.

Consequentemente, temos

(5) $\|A_m - A_n\| \leq 2^{N+1} \sum_{i=n}^{\infty} a_i$, se $n \leq m$,

(6) (A_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$,

(7) $(\|A_n\|)$ é uma sequência crescente,

(8) $\|A_{n+1}\| \geq \|A_n\| + 2^N a_n \|A_n\| - 2\eta_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para a propriedade (1), ponha simplesmente $A_1 = A$. Suponha, para um certo número natural n, que definimos uma aplicação N-linear A_n tal que $A_n \neq 0$. Pela definição de $\|A_n\|$, podemos escolher uma sequência $x^n := (x_1^n, \ldots, x_N^n) \in S_{X_1} \times \ldots \times S_{X_N}$ cujos seus elementos são dois a dois disjuntos satisfazendo o item (2):

$$A_n(x^n) = \operatorname{Re} A_n(x^n) > \|A_n\| - \eta_n.$$

Defina, portanto, a aplicação A_{n+1} por

$$A_{n+1}(x) = A_n(x) + a_n \sum_{H \subset \{1,\ldots,N\}} [A_n(P_H(x) + (I - P_H)(x^n))] \cdot \left[\frac{A_n}{\|A_n\|}(P_H(x^n) + (I - P_H)(x)) \right],$$

para cada $x \in X_1 \times \ldots \times X_N$. Logo, A_{n+1} é N-linear. Vamos primeiramente provar que A_{n+1} é contínua e que a sequência $(\|A_n\|)$ é crescente, o que mostra que A_n é uma aplicação N-linear não nula, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para isso, provaremos as propriedades (3) e (4):

$$\|A_{n+1} - A_n\| \leq 2^N a_n \|A_n\| \quad \text{e} \quad \|A_{n+1}\| \leq \|A_n\| + 2^N a_n \|A_n\|.$$

De fato, para cada $x := (x_1, \ldots, x_N) \in S_X := S_{X_1} \times \ldots \times S_{X_N}$, temos

$$\begin{aligned}
|A_{n+1}(x) - A_n(x)| &= \left| a_n \sum_{H \subset \{1,\ldots,N\}} [A_n(P_H(x) + (I - P_H)(x^n))] \cdot \left[\frac{A_n}{\|A_n\|}(P_H(x^n) + (I - P_H)(x)) \right] \right| \\
&\leq a_n \sum_{H \subset \{1,\ldots,N\}} \|A_n\| \|P_H(x) + (I - P_H)(x^n)\| \cdot \|P_H(x^n) + (I - P_H)(x)\| \\
&= a_n \cdot \|A_n\| \sum_{H \subset \{1,\ldots,N\}} \|P_H(x) + (I - P_H)(x^n)\| \cdot \|P_H(x^n) + (I - P_H)(x)\|.
\end{aligned}$$

Para provar a primeira desigualdade de (3), vamos provar que

$$\sum_{H \subset \{1,\ldots,N\}} \|P_H(x) + (I - P_H)(x^n)\| \cdot \|P_H(x^n) + (I - P_H)(x)\| = 2^N.$$

Estudemos a parcela $P_H(x) + (I - P_H)(x^n)$, que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$P_H(x) + (I - P_H)(x^n) = (y_1, \ldots, y_n) + (x_1^n, \ldots, x_N^n) - (y_1^n, \ldots, y_N^n),$$

onde

$$y_k = \begin{cases} x_k, & \text{se} \quad k \in H, \\ 0, & \text{se} \quad k \notin H \end{cases} \quad \text{e} \quad y_k^n = \begin{cases} x_k^n, & \text{se} \quad k \in H, \\ 0, & \text{se} \quad k \notin H. \end{cases}$$

Pela definição da aplicação P_H, para qualquer $H \neq \emptyset$, a diferença $(x_1^n, \ldots, x_N^n) - (y_1^n, \ldots, y_N^n)$ resulta em uma N-upla com alguma entrada identicamente nula, já que pelo menos algum dos y_i^n é igual a x_i^n. O restante das entradas desta diferença são os x_i^n's onde seus índices não pertencem ao conjunto H. Entretanto, esta mesma entrada nula é somada ao elemento y_i da N-upla $(y_1, \ldots, y_n)$ e o restante das entradas continuam as mesmas. Portanto, a parcela considerada acima é um vetor onde suas entradas são x_i's ou x_i^n's. Como $\|x_i\| = \|x_i^n\| = 1$, para cada i, segue que $\|P_H(x) + (I - P_H)(x^n)\| = 1$.

Com os mesmos argumentos, podemos concluir que $\|P_H(x^n)+(I-P_H)(x)\| = 1$. O mesmo acontece quando $H = \emptyset$, pois

$$\|P_H(x) + (I - P_H)(x^n)\| \cdot \|P_H(x^n) + (I - P_H)(x)\| = \|(x_1^n, \ldots, x_N^n)\| \cdot \|(x_1, \ldots, x_N)\| = 1.$$

Como existem 2^N subconjuntos do conjunto $\{1, \ldots, N\}$, segue o resultado. Logo,

$$\|A_{n+1} - A_n\| \leq 2^N a_n \|A_n\|$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \|A_{n+1}\| = \|A_{n+1} - A_n + A_n\| &\leq \|A_{n+1} - A_n\| + \|A_n\| \\ &\leq 2^N a_n \|A_n\| + \|A_n\| \\ &= \|A_n\| + 2^N a_n \|A_n\|. \end{aligned}$$

Isto prova as propriedades (3) e (4). Vamos provar agora que vale a seguinte desigualdade:

$$\|A_{n+1}\| \leq 1 + 2^{N+1} \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 2. \tag{4.3}$$

Faremos isto por indução sobre n. Se $n = 1$, então

$$\begin{aligned} \|A_2\| = \|A_{1+1}\| &\overset{(4)}{\leq} \|A_1\| + 2^N a_1 \|A_1\| \\ &\overset{A_1 = A}{=} \|A\| + 2^N a_1 \|A\| \\ &= 1 + 2^N a_1 \\ &\leq 1 + 2^{N+1} a_1 \\ &< 1 + 1/2 \\ &< 2, \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é justificada pela propriedade (2) do Lema 4.2.1. Agora, suponha que o resultado vale para $n \geq 2$. Novamente por (4), temos

$$\|A_{n+2}\| \overset{(4)}{\leq} \|A_{n+1}\| + 2^N a_{n+1} \|A_{n+1}\| = \|A_{n+1}\|(1 + 2^N a_{n+1}).$$

Mas usando a hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} \|A_{n+1}\|(1 + 2^N a_{n+1}) &\leq \left(1 + 2^{N+1} \sum_{i=1}^{n} a_i\right)(1 + 2^N a_{n+1}) \\ &= 1 + 2^N a_{n+1} + 2^{N+1} \sum_{i=1}^{n} a_i + 2^N a_{n+1} \cdot 2^{N+1} \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &\leq 1 + 2^{N+1} a_{n+1} + 2^{N+1} \sum_{i=1}^{n} a_i + 2^{N-1} a_{n+1} \cdot 2^{N+2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \\ &< 1 + 2^{N+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i + 2^{N-1} a_{n+1} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

para cada $0 < \varepsilon < 1$. Mas $2^{N-1}a_{n+1} < 2^{N+2}a_{n+1} < 1$ e, portanto,

$$\|A_{n+2}\| \leq \|A_{n+1}\|(1 + 2^N a_{n+1}) < 1 + 2^{N+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i + \varepsilon,$$

para cada $0 < \varepsilon < 1$. Daí, segue (4.3). Consequentemente, temos

$$\|A_{n+1} - A_n\| \overset{(3)}{\leq} 2^N a_n \|A_n\| \overset{(4.3)}{\leq} 2^N a_n \cdot 2 = 2^{N+1} a_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos, com isso, que se $n \leq m$, então vale (5):

$$\|A_m - A_n\| \leq 2^{N+1}\sum_{i=n}^{\infty} a_i := C_n. \tag{4.4}$$

De fato, sabemos que $\|A_{n+1} - A_n\| \leq 2^{N+1}a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, se $n \leq m$, então aplicando a desigualdade triangular sucessivas vezes, temos

$$\begin{aligned}
\|A_m - A_n\| &= \|A_m - A_{m-1} + A_{m-1} - A_{m-2} + A_{m-2} - \ldots + A_{n+2} - A_{n+1} + A_{n+1} - A_n\| \\
&\leq \|A_m - A_{m-1}\| + \|A_{m-1} - A_{m-2}\| + \ldots + \|A_{n+2} - A_{n+1}\| + \|A_{n+1} - A_n\| \\
&\leq 2^{N+1}(a_{m-1} + a_{m-2} + \ldots + a_{n+1} + a_n) \\
&\leq 2^{N+1}\sum_{i=n}^{\infty} a_i.
\end{aligned}$$

Agora, como $2^{N+2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \varepsilon$, segue que $2^{N+1}\sum_{i=n}^{\infty} a_i < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Isto quer dizer que a sequência (A_n) é de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$. Isso prova (6).

Finalmente provaremos que $A_{n+1} \neq 0$. Para tanto, vamos provar por indução que vale $\|A_n\| \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Já temos que para $n = 1$, $\|A_1\| \overset{(1)}{=} \|A\| = 1$. Suponha, então, que $\|A_n\| \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e provemos que vale $\|A_{n+1}\| \geq 1$. De fato, temos que $\|A_{n+1}\| \geq |A_{n+1}(x^n)|$, onde (x^n) é a sequência escolhida no início da demonstração. Daí,

$$\begin{aligned}
|A_{n+1}(x^n)| &= \left| A_n(x^n) + a_n \sum_{H \subset \{1,\ldots,N\}} [A_n(P_H(x^n) + (I - P_H)(x^n))] \cdot \left[\frac{A_n}{\|A_n\|}(P_H(x^n) + (I - P_H)(x^n))\right] \right| \\
&= \left| A_n(x^n) + a_n \sum_{H \subset \{1,\ldots,N\}} A_n(x^n) \cdot \frac{A_n}{\|A_n\|}(x^n) \right| \\
&= \left| A_n(x^n) + 2^N \cdot a_n \cdot \frac{1}{\|A_n\|}[A_n(x^n)]^2 \right|
\end{aligned}$$

já que $\{1, \ldots, N\}$ possui 2^N subconjuntos. Mas por (2), segue que

$$\begin{aligned}
\left| A_n(x^n) + 2^N \cdot a_n \cdot \frac{1}{\|A_n\|}[A_n(x^n)]^2 \right| &\overset{(2)}{>} \|A_n\| - \eta_n + 2^N \cdot a_n \cdot \frac{1}{\|A_n\|} \cdot [\|A_n\| - \eta_n]^2 \\
&= \|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n(\|A_n\| - \eta_n)\left(1 - \frac{\eta_n}{\|A_n\|}\right) \\
&\geq \|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n(\|A_n\| - \eta_n)(1 - \eta_n) \\
&= \|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n(\|A_n\| - \eta_n\|A_n\| - \eta_n + \eta_n^2)
\end{aligned}$$

Só que

$$\begin{aligned}
\|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n(\|A_n\| - \eta_n\|A_n\| - \eta_n + \eta_n^2) &= \|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n\|A_n\| + 2^N a_n(\eta_n^2 - \eta_n\|A_n\| - \eta_n) \\
&\geq \|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n\|A_n\| + 2^N a_n(-\eta_n(\|A_n\| + 1)).
\end{aligned}$$

Agora, por (4.3), temos que $\|A_n\| + 1 \leq 2 + 1 = 3$ e, portanto, $-(\|A_n\| + 1) \geq -3$. Então,

$$\begin{aligned}
\|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n\|A_n\| + 2^N a_n(-\eta_n(\|A_n\| + 1)) &\geq \|A_n\| - \eta_n + 2^N a_n\|A_n\| - 3 \cdot 2^N a_n\eta_n \\
&= \|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - \eta_n - 3 \cdot 2^N a_n\eta_n.
\end{aligned}$$

Como $2^{N+2}a_n < 1$, segue que $2^N a_n < 1/4$, donde

$$\begin{aligned}
\|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - \eta_n - 3 \cdot 2^N a_n\eta_n &> \|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - \eta_n - (3/4)\eta_n \\
&> \|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - \eta_n - \eta_n \\
&= \|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - 2\eta_n.
\end{aligned}$$

Mostramos, então, que

$$\|A_{n+1}\| \geq \|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - 2\eta_n.$$

Portanto, usando a hipótese de indução $\|A_n\| \geq 1$ e as condições sobre as sequências (a_n) e (η_n) descritas no Lema 4.2.1, temos

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}\| \geq \|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - 2\eta_n &\geq \|A_n\| + 2^N a_n - 2\eta_n \\
&> \|A_n\| - 2\eta_n \\
&> \|A_n\| - 2a_n \\
&> \|A_n\| - \varepsilon/4,
\end{aligned}$$

para cada $0 < \varepsilon < 1$. Logo, $\|A_{n+1}\| \geq \|A_n\| \geq 1$ e, portanto, $(\|A_n\|)$ é crescente e $A_{n+1} \neq 0$, como queríamos mostrar. Resumindo, provamos as propriedades (7) e (8):

$$\|A_{n+1}\| \geq \|A_n\| \geq 1 \quad \text{e} \quad \|A_{n+1}\| \geq \|A_n\| + 2^N a_n\|A_n\| - 2\eta_n, \tag{4.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 4.3.2. Sejam $X_1, \ldots, X_N$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ uma aplicação N-linear tal que $\|A\| = 1$. Então, existe $B \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ tal que

(1) $\|B - A\| < \varepsilon$,

(2) $\operatorname{Re} B(x_1^{\sigma(N)}, x_2^{\sigma(N-1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) \geq \|B\| - \dfrac{(2N-1)\eta_{\sigma(1)} + (N-1)C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{N-1}} - 2C_{\sigma(1)}$,

onde $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)$ são números naturais satisfazendo $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(N)$, $x^n = (x_1^n, \ldots, x_N^n)$ como no item (2) do Lema 4.3.1 e C_n como definido em (4.4).

Demonstração. Considere a sequência de Cauchy $(A_n) \subset \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ construída no Lema 4.3.1. Como $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ é um espaço de Banach, (A_n) converge para uma aplicação N-linear, digamos B. Do item (5) do Lema 4.3.1, temos

$$\|B - A_n\| \leq C_n < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde C_n foi definido em (4.4). Consequentemente,

$$\|B - A\| = \|B - A_1\| < \varepsilon.$$

Nossos esforços estão voltados para provar que todas as extensões de Aron-Berner de B atingem suas respectivas normas em um mesmo elemento, como veremos adiante no Teorema 4.3.3. Mas, para isso, provaremos primeiramente que a norma desta aplicação satisfaz a desigualdade (2). Tal desigualdade é provada usando argumentos indutivos e os primeiros passos dessa indução serão descritos a seguir.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $z \in S_X$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\operatorname{Re} A_n(z) \geq \|A_n\| - \alpha. \tag{4.6}$$

Mostraremos que sempre que vale (4.6), vale também que

$$\|A_j\| \leq \operatorname{Re} A_j(P_H(z) + (I - P_H)(x^j)) + \frac{2\eta_j + C_{j+1}}{a_j} + \frac{\alpha}{a_j}, \tag{4.7}$$

para todo $H \subset \{1, \ldots, N\}$, onde $j < n$ e $C_{j+1} = 2^{N+1} \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i$. De fato, podemos escrever

$$A_{j+1}(z) = A_j(z) + a_j \sum_{H \subset \{1, \ldots, N\}} \left[A_j(P_H(z) + (I - P_H)(x^j))\right] \cdot \left[\frac{A_j}{\|A_j\|}(P_H(x^j) + (I - P_H)(z))\right].$$

Logo, para todo $H \subset \{1, \ldots, N\}$, temos

$$A_{j+1}(z) = A_j(z) + a_j A_j(P_H(z) + (I - P_H)(x^j)) \cdot \frac{A_j}{\|A_j\|}(P_H(x^j) + (I - P_H)(z))$$

$$+ a_j \sum_{\substack{H' \subset \{1, \ldots, N\} \\ H' \neq H}} \left[A_j(P_{H'}(z) + (I - P_{H'})(x^j))\right] \cdot \left[\frac{A_j}{\|A_j\|}(P_{H'}(x^j) + (I - P_{H'})(z))\right].$$

Portanto,

$$\operatorname{Re} A_{j+1}(z) \leq \operatorname{Re} A_j(z) + a_j \operatorname{Re}(A_j(P_H(z) + (I - P_H)(x^j))) \cdot \frac{\|A_j\|}{\|A_j\|}\|P_H(x^j) + (I - P_H)(z)\|$$

$$+ a_j \sum_{\substack{H' \subset \{1,\dots,N\} \\ H' \neq H}} \left[\|A_j\|(\|P_{H'}(z) + (I - P_{H'})(x^j)\|)\right] \cdot \left[\frac{\|A_j\|}{\|A_j\|}\|P_{H'}(x^j) + (I - P_{H'})(z)\|\right].$$

Agora como $\|P_{H'}(x^j)+(I-P_{H'})(z)\| = \|P_H(x^j)+(I-P_H)(z)\| = 1$ e existem (2^N-1) subconjuntos de $\{1, \dots, N\} - H$, tem-se

$$\operatorname{Re} A_{j+1}(z) \leq \|A_j\| + a_j \operatorname{Re} A_j(P_H(z) + (I - P_H(x^j)) + (2^N - 1)a_j\|A_j\|$$

para todo $H \subset \{1, \dots, N\}$. Por outro lado, como $j < n$, então $j + 1 \leq n$ e, portanto,

$$\|A_n - A_{j+1}\| \leq C_{j+1},$$

pelo item (5) do Lema 4.3.1. Daí,

$$\operatorname{Re}(A_n(z) - A_{j+1}(z)) \leq \|A_n - A_{j+1}\| \leq C_{j+1}$$

o que acarreta

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} A_{j+1}(z) &\geq \operatorname{Re} A_n(z) - C_{j+1} \\
&\overset{(4.6)}{\geq} \|A_n\| - \alpha - C_{j+1} \\
&\overset{(4.5)}{\geq} \|A_{j+1}\| - \alpha - C_{j+1} \\
&\overset{(4.5)}{\geq} \|A_j\| + 2^N a_j\|A_j\| - 2\eta_j - \alpha - C_{j+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, ficamos com a seguinte desigualdade:

$$\|A_j\| + 2^N a_j\|A_j\| - 2\eta_j - \alpha - C_{j+1} \leq \|A_j\| + a_j \operatorname{Re} A_j(P_H(z) + (I - P_H(x^j)) + (2^N - 1)a_j\|A_j\|.$$

Simplificando, temos

$$-2\eta_j - \alpha - C_{j+1} \leq a_j \operatorname{Re} A_j(P_H(z) + (I - P_H(x^j)) - a_j\|A_j\|.$$

Logo, passando $a_j\|A_j\|$ para o primeiro membro, obtemos

$$a_j\|A_j\| - 2\eta_j - \alpha - C_{j+1} \leq a_j \operatorname{Re} A_j(P_H(z) + (I - P_H(x^j)),$$

ou ainda,

$$a_j\|A_j\| \leq a_j \operatorname{Re} A_j(P_H(z) + (I - P_H(x^j)) + 2\eta_j + C_{j+1} + \alpha$$

e dividindo esta última desigualdade por a_j, obtemos (4.7).

Agora, note que pelo item (2) do Lema 4.3.1, x^n e η_n satisfazem a desigualdade (4.6). Sendo assim, pondo $H = \{1\}$, temos

$$\begin{aligned} P_H(x^n) + (I - P_H)(x^j) &= (x_1^n, 0, \dots, 0) + (x_1^j, x_2^j, \dots, x_N^j) - (x_1^j, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1^n, x_2^j, \dots, x_N^j) \end{aligned}$$

e, portanto, se $j < n$, então aplicando a desigualdade (4.7) para $z = x^n$ e $\alpha = \eta_j$, temos

$$\begin{aligned} \|A_j\| &\leq \operatorname{Re} A_j(x_1^n, x_2^j, \dots, x_N^j) + \frac{2\eta_j + C_{j+1}}{a_j} + \frac{\eta_j}{a_j} \\ &= \operatorname{Re} A_j(x_1^n, x_2^j, \dots, x_N^j) + \frac{3\eta_j + C_{j+1}}{a_j}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{Re} A_j(x_1^n, x_2^j, \dots, x_N^j) \geq \|A_j\| - \frac{3\eta_j + C_{j+1}}{a_j},$$

se $j < n$ e, então, estamos nas hipóteses de (4.6) para os elementos $z = (x_1^n, x_2^j, \dots, x_N^j)$ e $\alpha = \frac{3\eta_j + C_{j+1}}{a_j}$. Com isso, se $H = \{1, 2\}$ e $m < j < n$, então

$$\begin{aligned} P_H(x_1^n, x_2^j, \dots, x_N^j) + (I - P_H)(x^m) &= (x_1^n, x_2^j, 0, \dots, 0) + (x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m) - (x_1^m, x_2^m, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1^n, x_2^j, x_3^m, \dots, x_N^m). \end{aligned}$$

Portanto, por (4.7), temos

$$\|A_m\| \leq \operatorname{Re} A_m(x_1^n, x_2^j, x_3^m, \dots, x_N^m) + \frac{2\eta_m + C_{m+1}}{a_m} + \frac{3\eta_j + C_{j+1}}{a_j a_m}.$$

Lembrando agora das propriedades das sequências do Lema 4.2.1 e da definição de C_n em (4.4), temos

$$\begin{aligned} \frac{2\eta_m + C_{m+1}}{a_m} + \frac{3\eta_j + C_{j+1}}{a_j a_m} &< \frac{2\eta_m}{a_m^2} + \frac{C_{m+1}}{a_m^2} + \frac{3\eta_j}{a_j a_m} + \frac{C_{j+1}}{a_j} \cdot \frac{1}{a_m} \\ &= \frac{2\eta_m}{a_m^2} + \frac{C_{m+1}}{a_m^2} + 3 \cdot \frac{\eta_j}{a_j} \cdot \frac{1}{a_m} + \frac{C_{j+1}}{a_j} \cdot \frac{1}{a_m} \\ &\leq \frac{2\eta_m}{a_m^2} + \frac{C_{m+1}}{a_m^2} + 3 \cdot \frac{\eta_m}{a_m} \cdot \frac{1}{a_m} + \frac{C_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{1}{a_m} \\ &= \frac{2\eta_m}{a_m^2} + \frac{C_{m+1}}{a_m^2} + \frac{3\eta_m}{a_m^2} + \frac{C_{m+1}}{a_m^2} \\ &= 5 \cdot \frac{\eta_m}{a_m^2} + 2 \cdot \frac{C_{m+1}}{a_m^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|A_m\| \leq \operatorname{Re} A_m(x_1^n, x_2^j, x_3^m, \dots, x_N^m) + 5 \cdot \frac{\eta_m}{a_m^2} + 2 \cdot \frac{C_{m+1}}{a_m^2},$$

ou seja,

$$\operatorname{Re} A_m(x_1^n, x_2^j, x_3^m, \dots, x_N^m) \geq \|A_m\| - 5 \cdot \frac{\eta_m}{a_m^2} - 2 \cdot \frac{C_{m+1}}{a_m^2}.$$

Usando esses primeiros passos, provaremos que para quaisquer N números naturais satisfazendo

$\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(N)$, temos

$$\|A_{\sigma(1)}\| \leq \operatorname{Re} A_{\sigma(1)}(x_1^{\sigma(N)}, x_2^{\sigma(N-1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) + \frac{(2N-1)\eta_{\sigma(1)} + (N-1)C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{N-1}}. \tag{4.8}$$

Para isso, usaremos um raciocínio indutivo da seguinte maneira: para cada $1 < k < N$ tal que $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(k) < \sigma(k+1)$ assumimos que vale

$$\|A_{\sigma(2)}\| \leq \operatorname{Re} A_{\sigma(2)}(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma(3)}, x_k^{\sigma(2)}, \ldots, x_N^{\sigma(2)})$$

$$+ (2k-1)\frac{\eta_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} + (k-1)\frac{C_{\sigma(2)+1}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}}$$

e, daí, provaremos que

$$\|A_{\sigma(1)}\| \leq \operatorname{Re} A_{\sigma(1)}(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_k^{\sigma(2)}, x_{k+1}^{\sigma(1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) + \frac{(2k+1)\eta_{\sigma(1)} + k \cdot C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{k}}.$$

Observe que isso foi feito anteriormente com $k = 3$, $\sigma(1) = m$, $\sigma(2) = j$ e $\sigma(3) = n$.

Temos

$$\operatorname{Re} A_{\sigma(2)}(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma(3)}, x_k^{\sigma(2)}, \ldots, x_N^{\sigma(2)}) \geq \|A_{\sigma(2)}\|$$

$$- \left[(2k-1)\frac{\eta_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} + (k-1)\frac{C_{\sigma(2)+1}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}}\right].$$

Estamos, então, nas hipóteses de (4.6) com

$$z = (x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma(3)}, x_k^{\sigma(2)}, \ldots, x_N^{\sigma(2)})$$

e

$$\alpha = (2k-1)\frac{\eta_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} + (k-1)\frac{C_{\sigma(2)+1}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}}.$$

Tomando $H = \{1, \ldots, k\}$, temos

$$P_H(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma(3)}, x_k^{\sigma(2)}, \ldots, x_N^{\sigma(2)}) + (I - P_H)(x_1^{\sigma(1)}, x_2^{\sigma(1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)})$$

que é igual a

$$(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma(3)}, x_k^{\sigma(2)}, 0, \ldots, 0) + (x_1^{\sigma(1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) - (x_1^{\sigma(1)}, x_2^{\sigma(1)}, \ldots, x_k^{\sigma(1)}, 0, \ldots, 0),$$

ou ainda,

$$(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_k^{\sigma(2)}, x_{k+1}^{\sigma(1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)})$$

e, portanto, aplicando (4.7) para $H = \{1, \ldots, k\}$, temos

$$\|A_{\sigma(1)}\| \leq \operatorname{Re} A_{\sigma(1)}(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_k^{\sigma(2)}, x_{k+1}^{\sigma(1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)})$$

$$+ \frac{2\eta_{\sigma(1)} + C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}} + \frac{1}{a_{\sigma(1)}} \cdot \left[(2k-1)\frac{\eta_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} + (k-1)\frac{C_{\sigma(2)+1}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}}\right].$$

Vamos provar agora que

$$\frac{2\eta_{\sigma(1)} + C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}} + \frac{1}{a_{\sigma(1)}} \cdot \left[(2k-1)\frac{\eta_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} + (k-1)\frac{C_{\sigma(2)+1}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}}\right] \leq \frac{(2k+1)\eta_{\sigma(1)} + k \cdot C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{k}},$$

usando o fato de que as sequências $(\eta_n/a_n^{k-1})_n$ e $(C_{n+1}/a_n^{k-1})_n$ são decrescentes e o fato de que $a_n < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, como $\sigma(2) > \sigma(1)$, tem-se que

$$\frac{\eta_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} \leq \frac{\eta_{\sigma(1)}}{a_{\sigma(1)}^{k-1}} \quad \text{e} \quad \frac{C_{\sigma(2)+1}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} \leq \frac{C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{k-1}}.$$

Além disso, como $a_{\sigma(1)} < 1$, temos que $a_{\sigma(1)} \geq a_{\sigma(1)}^k$, o que acarreta $1/a_{\sigma(1)} \leq 1/a_{\sigma(1)}^k$. Portanto,

$$\begin{aligned}
& \frac{2\eta_{\sigma(1)} + C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}} + \frac{1}{a_{\sigma(1)}} \cdot \left[(2k-1)\frac{\eta_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}} + (k-1)\frac{C_{\sigma(2)+1}}{a_{\sigma(2)}^{k-1}}\right] \\
\leq \quad & \frac{2\eta_{\sigma(1)} + C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^k} + \frac{1}{a_{\sigma(1)}} \cdot \left[(2k-1)\frac{\eta_{\sigma(1)}}{a_{\sigma(1)}^{k-1}} + (k-1)\frac{C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{k-1}}\right] \\
= \quad & \frac{2\eta_{\sigma(1)} + C_{\sigma(1)+1} + (2k-1)\eta_{\sigma(1)} + (k-1)C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^k} \\
= \quad & \frac{(2k+1)\eta_{\sigma(1)} + k \cdot C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^k}.
\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que

$$\|A_{\sigma(1)}\| \leq \operatorname{Re} A_{\sigma(1)}(x_1^{\sigma(k+1)}, x_2^{\sigma(k)}, \ldots, x_k^{\sigma(2)}, x_{k+1}^{\sigma(1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) + \frac{(2k+1)\eta_{\sigma(1)} + k \cdot C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^k}.$$

Agora, fazendo $N = k+1$ na última desigualdade, segue o desejado.

Finalmente, vamos obter uma propriedade semelhante a (4.8) para a aplicação $B = \lim A_n$ e provar (2). Para isso, note primeiramente que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(A_{\sigma(1)}(x_1^{\sigma(N)}, x_2^{\sigma(N-1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) - B(x_1^{\sigma(N)}, x_2^{\sigma(N-1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)})\right) \quad & \leq \quad \|A_{\sigma(1)} - B\| \\
& \leq \quad C_{\sigma(1)}
\end{aligned}$$

usando (4.4). Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} B(x_1^{\sigma(N)}, x_2^{\sigma(N-1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) &\geq \operatorname{Re} A_{\sigma(1)}(x_1^{\sigma(N)}, x_2^{\sigma(N-1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) - C_{\sigma(1)} \\
&\overset{(4.8)}{\geq} \|A_{\sigma(1)}\| - \frac{(2N-1)\eta_{\sigma(1)} + (N-1)C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{N-1}} - C_{\sigma(1)} \\
&\overset{(\star)}{\geq} \|B\| - C_{\sigma(1)} - \frac{(2N-1)\eta_{\sigma(1)} + (N-1)C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{N-1}} - C_{\sigma(1)},
\end{aligned}$$

onde $(\star)$ é justificada pelo seguinte: como $\|B - A_{\sigma(1)}\| \leq C_{\sigma(1)}$, segue que $\|B\| - \|A_{\sigma(1)}\| \leq C_{\sigma(1)}$ e, daí, $\|A_{\sigma(1)}\| \geq \|B\| - C_{\sigma(1)}$. Então,

$$\operatorname{Re} B(x_1^{\sigma(N)}, x_2^{\sigma(N-1)}, \ldots, x_N^{\sigma(1)}) \geq \|B\| - \frac{(2N-1)\eta_{\sigma(1)} + (N-1)C_{\sigma(1)+1}}{a_{\sigma(1)}^{N-1}} - 2C_{\sigma(1)}.$$

□

Finalmente, usaremos os lemas 4.3.1 e 4.3.2 para demonstrar um teorema do tipo Lindenstrauss para aplicações N-lineares contínuas provado por M. D. Acosta, D. García e M. Maestre em [AGM06].

Teorema 4.3.3. (Teorema 2.1, [AGM06]) Sejam $N \geq 2$ e $X_1, \ldots, X_N$ espaços de Banach. Então, o conjunto das aplicações N-lineares definidas em $X_1 \times \ldots \times X_N$ tais que suas extensões de Aron-Berner para $X_1^{**} \times \ldots \times X_N^{**}$ atingem suas respectivas normas na mesma N-upla é denso em $\mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(^N(X_1 \times \ldots \times X_N))$ com $\|A\| = 1$. Considere a sequência (A_n), construída a partir de A, e seu limite B como nos lemas 4.3.1 e 4.3.2. Primeiramente, vamos mostrar que a extensão de Aron-Berner B_I (veja a definição de B_I em (1.4)) atinge a norma.

De fato, sejam $1 \leq k \leq N$ e $x_k^{**} \in X_k^{**}$ um ponto de acumulação w^* da sequência $(x_k^n)_n$. Então, $\|x_k^{**}\| \leq 1$, para cada k. Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} B_I(x_1^{**}, \ldots, x_N^{**}) &= \operatorname{Re}\left(\lim_{n_N\to\infty} \cdots \lim_{n_1\to\infty} B(x_1^{n_1}, \ldots, x_N^{n_N})\right) \\
&= \lim_{n_N\to\infty} \cdots \lim_{n_1\to\infty} \operatorname{Re} B(x_1^{n_1}, \ldots, x_N^{n_N}) \\
&\geq \lim_{n_N\to\infty} \left(\|B\| - \frac{(2N-1)\eta_{n_N} + (N-1)C_{n_N+1}}{a_{n_N}^{N-1}} - 2C_{n_N}\right) \\
&= \lim_{n_N\to\infty} \left(\|B\| - (2N-1)\cdot\frac{\eta_{n_N}}{a_{n_N}^{N-1}} - (N-1)\cdot\frac{C_{n_N+1}}{a_{n_N}^{N-1}} - 2C_{n_N}\right) \\
&= \|B\|.
\end{aligned}$$

usando o Lema 4.2.1. Assim,

$$\operatorname{Re} B_I(x_1^{**}, \ldots, x_N^{**}) \geq \|B\|,$$

donde,

$$\begin{aligned}\|B_I\| \geq |B_I(x_1^{**},\dots,x_N^{**})| &\geq \operatorname{Re} B_I(x_1^{**},\dots,x_N^{**})\\ &\geq \|B\|\\ &= \|B_I\|,\end{aligned}$$

ou seja, $\|B_I\| = |B_I(x_1^{**},\dots,x_N^{**})|$. Isto prova que a extensão de Aron-Berner B_I de B atinge a norma no elemento $(x_1^{**},\dots,x_N^{**})$. Para finalizar a demonstração, resta-nos mostrar que qualquer extensão de Aron-Berner B_θ de B atinge sua norma em $(x_1^{**},\dots,x_N^{**})$, já que $\|B-A\|<\varepsilon$ pelo item (2) do Lema 4.3.2. É o que vamos fazer a seguir.

A fim de mostrar que B_θ atinge a norma no elemento $(x_1^{**},\dots,x_N^{**})$, onde θ é uma permutação qualquer do conjunto $\{1,\dots,N\}$, vamos mostrar que na definição da sequência (A_n) que fizemos no Lema 4.3.1, a ordem das variáveis é essencialmente a mesma, ou seja, podemos definir a sequência $(\theta A)_n$ de modo que $(\theta A)_n = \theta A_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, onde a aplicação θA é definida por (4.1) . De fato, pondo $(\theta A)_n = \theta A_n$, veja que o elemento $(x^n_{\theta(1)},\dots,x^n_{\theta(N)})$ satisfaz a desigualdade abaixo:

$$\begin{aligned}(\theta A)_n(x^n_{\theta(1)},\dots,x^n_{\theta(N)}) = (\theta A_n)(x^n_{\theta(1)},\dots,x^n_{\theta(N)}) &= A_n(x_1^n,\dots,x_N^n)\\ &= A_n(x^n)\\ &> \|A_n\|-\eta_n\\ &= \|\theta A_n\|-\eta_n\\ &= \|(\theta A)_n\|-\eta_n.\end{aligned}$$

Portanto, defina $(\theta A)_{n+1} = \theta A_{n+1}$. Agora, como $\lim A_n = B$, temos que para cada $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que se $n\geq n_0$ então

$$\|B-A_n\|<\varepsilon.$$

Já que

$$\begin{aligned}\theta(A_n-B)(x_{\theta(1)},\dots,x_{\theta(N)}) &= (A_n-B)(x_1,\dots,x_N)\\ &= A_n(x_1,\dots,x_N)-B(x_1,\dots,x_N)\\ &= (\theta A_n)(x_{\theta(1)},\dots,x_{\theta(N)})-(\theta B)(x_{\theta(1)},\dots,x_{\theta(N)})\\ &= (\theta A_n-\theta B)(x_{\theta(1)},\dots,x_{\theta(N)})\end{aligned}$$

segue que

$$\|\theta A_n-\theta B_n\| = \|\theta(A_n-B)\| = \|A_n-B\|<\varepsilon,$$

ou seja, $\lim\theta A_n = \theta B_n$. Portanto, aplicando o item (2) do Lema 4.3.2 para θB, temos

$$\operatorname{Re}(\theta B)\left(x^{\sigma(N)}_{\theta(1)},\dots,x^{\sigma(1)}_{\theta(N)}\right) \geq \|\theta B\| - \frac{(2N-1)\eta_{\sigma(1)}+(N-1)C_{\sigma(1)+1}}{a^{N-1}_{\sigma(1)}} - 2C_{\sigma(1)}.$$

Então,

$$|(\theta B)_I(x^{**}_{\theta(1)},\dots,x^{**}_{\theta(N)})| = \|(\theta B)_I\|,$$

isto é, $(\theta B)_I$ atinge sua norma em $(x^{**}_{\theta(1)}, \ldots, x^{**}_{\theta(N)})$. Agora, como $\|(\theta B)_I\| = \|B\| = \|B_\theta\|$, temos

$$\begin{aligned} |B_\theta(x_1^{**}, \ldots, x_N^{**})| &\overset{(4.2)}{=} |(\theta B)_I(x^{**}_{\theta(1)}, \ldots, x^{**}_{\theta(N)})| \\ &= \|(\theta B)_I\| \\ &= \|B_\theta\|, \end{aligned}$$

para cada permutação θ do conjunto $\{1, \ldots, N\}$.

Concluímos que B_θ atinge sua norma em $(x_1^{**}, \ldots, x_N^{**})$ para qualquer permutação θ do conjunto $\{1, \ldots, N\}$, ou seja, todas as extensões de Aron-Berner de B atingem a norma em um mesmo elemento e B satisfaz a desigualdade $\|A - B\| < \varepsilon$ pelo item (2) do Lema 4.3.2. Isto prova o teorema. $\square$

Apêndice A

O Teorema de James

A.1 Introdução

O teorema de James afirma que se X é um espaço de Banach tal que para cada $x^* \in X^*$, existe $x_0 \in B_X$ com $\|x^*\| = |x^*(x_0)|$, então X é um espaço reflexivo. Em outras palavras, se todo funcional em X^* *atinge a norma*, então X é reflexivo. Em 1957 Robert C. James provou este teorema com a hipótese adicional de que o espaço de Banach X fosse separável [Jam57]. Apenas em 1964 é que ele conseguiu provar esse resultado para um espaço de Banach arbitrário [Jam64].

Stanislaw Mazur foi o primeiro a se perguntar se um espaço de Banach deveria ser reflexivo caso todo elemento de X^* atingisse a norma [Maz33]. Essa pergunta foi feita em 1933 e somente em 1950 houve algum tipo de resposta: James provou que se um espaço de Banach separável X possui base de Schauder, então X é reflexivo se cada espaço de Banach Y isomorfo a X tem a propriedade de que todo elemento em Y^* atinge a norma [Jam50].

Neste capítulo, provamos o teorema de James [Jam72] de 1972 cuja demonstração é mais simples do que àquela feita em 1964. Nosso plano é seguir os mesmos passos históricos descritos acima, isto é, demonstrar primeiro a versão para espaços de Banach separáveis e depois generalizar para espaços de Banach quaisquer. Vários resultados, teoremas e lemas técnicos são necessários para provar esses teoremas.

A.2 Preliminares

Reservamos este espaço para enunciarmos os principais resultados que usaremos na próxima seção. As demonstrações destes são omitidas e sugerimos [Meg98] para maiores detalhes. O resultado a seguir é consequência do Teorema de Hahn-Banach.

Proposição A.2.1 ([Meg98], pg. 88)**.** Sejam X um espaço normado e $x \in X$. Então, a norma de x pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)|.$$

Além disso, este supremo é atingido em algum ponto de B_{X^*}.

Lembre-se que se X é um espaço normado, então denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$ o espaço X sobre $\mathbb{R}$ tal que a operação multiplicação por escalar é restrita ao corpo dos números reais.

Proposição A.2.2 ([Meg98], pg. 115)**.** Seja X um espaço normado. Então X é reflexivo se, e somente se, $X_{\mathbb{R}}$ é reflexivo.

Um teorema muito conhecido em Análise Funcional é o Teorema de Helly que usaremos na seção a seguir. Idem para o Teorema de Riesz.

Teorema A.2.3 ([Meg98], pg. 77)**.** **(Teorema de Helly)** Suponha que X seja um espaço normado. Sejam $x_1^*, \ldots, x_n^*$ uma coleção de funcionais lineares e contínuos em X e $c_1, \ldots, c_n$ escalares em $\mathbb{K}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) Existe $x_0 \in X$ tal que $x_j^*(x_0) = c_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

(b) Existe $M > 0$ tal que

$$|\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_n c_n| \leq M \|\alpha_1 x_1^* + \ldots + \alpha_n x_n^*\|$$

para cada combinação linear $\alpha_1 x_1^* + \ldots + \alpha_n x_n^*$.

Se (b) é válido, então dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher x_0 em (a) tal que $\|x_0\| \leq M + \varepsilon$.

Teorema A.2.4 ([Kre78], pg. 78)**.** **(Lema de Riesz)** Sejam X um espaço normado, M um subespaço fechado próprio de X e $\theta \in (0, 1)$. Então, existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$ e $\|x_0 - y\| \geq \theta$, para cada $y \in M$.

Uma caracterização para espaços reflexivos que usaremos adiante é a seguinte:

Teorema A.2.5 ([Meg98], pg. 120)**.** Um espaço normado X é reflexivo se, e somente se, todo subespaço de X fechado e separável é reflexivo.

A.3 A demonstração do teorema

O enunciado da Proposição A.2.1 nos leva ao seguinte questionamento: quando o supremo de um funcional linear e contínuo é atingido por algum $x_0 \in B_X$? Se X possui dimensão finita, então a compacidade de B_X e a continuidade da aplicação $x^* \in X^*$ garantem que este supremo é atingido em algum ponto da bola unitária de X. Mesmo se a dimensão de X for infinita, muitos funcionais possuem esta propriedade. Por exemplo, se $x_0 \in S_X$ então pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$ tal que $|x^*(x_0)| = \|x^*\| = 1$. Porém, existem funcionais que *não* atingem a norma. De fato, considere $x^* \in c_0^* \simeq \ell_1$ um elemento de c_0^* representado pela sequência (2^{-n}) em ℓ_1. Então

$$\|x^*\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

Por outro lado, se $(\alpha_n) \in B_{c_0}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_n| < 1/2$, para cada $n \geq n_0$. Portanto,

$$|x^*(\alpha_n)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\alpha_n|.$$

Mas

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|\alpha_n| &= \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}|\alpha_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n}|\alpha_n| \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-(n+1)} \\ &< 1,\end{aligned}$$

ou seja, x^* não atinge a norma. O teorema de James nos dará uma caracterização para funcionais que atingem a norma. Uma das implicações deste resultado é de fácil compreensão e está provada no próximo teorema.

Teorema A.3.1. Seja X um espaço normado reflexivo sobre $\mathbb{K}$. Então todo elemento de X^* atinge a norma.

Demonstração. Seja $x^* \in X^*$. Então, pela Proposição A.2.1, existe $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $|x^{**}(x^*)| = \|x^*\|$. Se $\delta_X : X \to X^{**}$ é a inclusão canônica de X em X^{**}, então existe $x \in X$ tal que $\delta_X(x) = x^{**}$. Logo, $x \in B_X$ e

$$\|x^*\| = |x^{**}(x^*)| = |\delta_X(x)(x^*)| = |x^*(x)|,$$

ou seja, x^* atinge a norma. Pela arbitrariedade de x^*, segue o resultado. □

Provaremos agora que um espaço de Banach separável é reflexivo se, e somente se, todo funcional em X^* atinge a norma. Para isso, será provado um lema técnico que tem uma extensa demonstração, porém com inúmeras ideias interessantes. Os leitores que não tiverem interesse na demonstração deste lema, poderão ir diretamente para o teorema seguinte. Todas as demonstrações dos próximos resultados foram retirados de [Meg98], porém, ao lado de cada lema e teorema, é colocado a referência original dos artigos de James.

Lema A.3.2. (Lema 1, [Jam72]) Sejam X um espaço normado e $A \subseteq B_X$ não vazio. Suponha que (β_n) seja uma sequência de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$. Suponha também que $\theta \in (0,1)$ e que (x_n^*) seja uma sequência em B_{X^*} tal que $\sup_{x\in A} |x^*(x)| \geq \theta$ para cada $x^* \in \operatorname{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$. Então, existem $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\theta \leq \alpha \leq 1$ e uma sequência $y_n^* \subset B_{X^*}$ tais que

(a) $y_n^* \in \operatorname{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\displaystyle\sup_{x\in A}\left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^* x\right| = \alpha$,

(c) $\displaystyle\sup_{x\in A}\left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* x\right| < \alpha\left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Construiremos a sequência (y_n^*) de forma indutiva tal que os itens (a), (b) e (c) do enunciado sejam satisfeitos. Também construímos uma sequência (α_n) que converge para α, indicado na tese deste lema, e provamos algumas desigualdades auxiliares.

Primeiramente, vamos convencionar uma notação e considerar uma sequência de números reais que satisfaz determinada desigualdade. Para cada $x^* \in X^*$, escreva

$$|x^*|_A = \sup_{x \in A} |x^*(x)|.$$

Então,

$$\begin{aligned} |\lambda x^*|_A &= \sup_{x \in A} |(\lambda x^*)(x)| \\ &= \sup_{x \in A} |\lambda||x^*(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x \in A} |x^*(x)| \\ &= |\lambda||x^*|_A \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |x^* + y^*|_A &= \sup_{x \in A} |(x^* + y^*)(x)| \\ &= \sup_{x \in A} |x^*(x) + y^*(x)| \\ &\leq \sup_{x \in A} |x^*(x)| + \sup_{x \in A} |y^*(x)| \\ &= |x^*|_A + |y^*|_A, \end{aligned}$$

ou seja, $| \, . \, |_A$ é uma seminorma[1] em X^* tal que

$$\begin{aligned} |x^*|_A &= \sup_{x \in A} |x^*(x)| \\ &\leq \|x^*\| \sup_{x \in A} |x| \\ &\leq \|x^*\|, \end{aligned}$$

para cada $x^* \in X^*$. Agora seja (e_n) uma sequência que converge a zero de números reais positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k e_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} < 1 - \theta, \tag{A.1}$$

onde (β_n) é a sequência dada que satisfaz $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$.

Uma sequência $(y_n^*) \subset X^*$ será construída indutivamente de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $y_n^* \in \mathrm{co}(\{x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots\}) \subset B_X$ e

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* \right|_A < \alpha_n (1 + e_n), \tag{A.2}$$

[1]Uma *seminorma* é uma função $p : X \to \mathbb{K}$ tal que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ e $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para cada $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

onde

$$\alpha_n = \inf\left\{\left|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) y^*\right|_A : y^* \in \mathrm{co}(\{x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots\})\right\}. \tag{A.3}$$

As somas nas quais aparecem $n-1$ como soma superior serão consideradas como sendo o elemento neutro de X^* quando $n=1$.

Comecemos a indução. Note que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \inf\{|y^*|_A : y^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq 1\})\} \\
&= \inf\{\ \sup\{|y^*(x)| : x \in A\} : y^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq 1\})\} \\
&\overset{\text{hip.}}{\geq} \theta \\
&> 0
\end{aligned}$$

Por outro lado, por argumento de inf, existe $y_1^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq 1\})$ tal que

$$|y_1^*|_A < \alpha_1(1+e_1),$$

o que prova a desigualdade (A.2) para $n=1$.

Suponha que $y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*$ tenham sido encontrados com as propriedades desejadas. Se $y^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) y^* &= \sum_{j=1}^{n-2}\beta_j y_j^* + \beta_{n-1}y_{n-1}^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) y^* \\
&= \sum_{j=1}^{n-2}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{\beta_{n-1}y_{n-1}^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) y^*}{\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-2}\beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{\beta_{n-1}}{\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j}y_{n-1}^* + \frac{\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j}{\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j}y^*\right),
\end{aligned}$$

onde as somas que aparecem $n-2$ são entendidas como $0 \in X^*$ quando $n=2$. A expressão que aparece no último parênteses da igualdade acima é uma combinação convexa de dois elementos de $\mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq n-1\})$ e, portanto, pertence a $\mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq n-1\})$. Observando a igualdade acima e olhando para a expressão que determina α_{n-1}, podemos usar a hipótese de indução para concluir que $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$. Como α_1 é positivo, segue que α_n também o é e, portanto, podemos encontrar $y_n^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$ satisfazendo a desigualdade (A.2). Isto finaliza a indução.

Note agora que para cada $n \in \mathbb{N}$, como $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ e $|x^*|_A \leq \|x^*\|$, para cada $x^* \in X^*$, segue que

$$\theta \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq 1,$$

ou seja, a sequência (α_n) é limitada e crescente e, portanto, converge para algum $\alpha \in [\theta, 1]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\alpha_n \leq \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* \right|_A < \alpha_n(1+e_n).$$

Fazendo $n \to \infty$, segue que

$$\alpha = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^* \right|_A = \sup_{x \in A} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^*(x) \right|,$$

o que demonstra (b).

Resta-nos provar que α e (y_n^*) satisfazem a parte (c) do lema. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Se $n \geq 2$, então

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* \right|_A &= \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \beta_n y_n^* \right|_A \\
&= \left| \left(\frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \beta_n y_n^* \right|_A \\
&= \left| \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \beta_n y_n^* \right|_A \\
&= \left| \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* \right) + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A \\
&\leq \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* \right|_A + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A \\
&\overset{(A.2)}{<} \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \alpha_n(1+e_n) + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A \\
&= \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right) \left(\frac{\beta_n \alpha_n (1+e_n)}{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} + \frac{\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \right).
\end{aligned}$$

Isto nos dá uma cota superior para $\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^* \right|_A$ em termos de $\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A$. Fazendo os mesmos cálculos, poderíamos conseguir uma cota superior para $\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* \right|_A$ em termos de $\left| \sum_{j=1}^{n-2} \beta_j y_j^* \right|_A$ e assim por diante. Dessa forma, se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j^*\right|_A &< \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{\beta_n\alpha_n(1+e_n)}{\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j}+\frac{\left|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j y_j^*\right|_A}{\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j}\right).\\
&< \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{\beta_n\alpha_n(1+e_n)}{\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j}+\frac{\beta_{n-1}\alpha_{n-1}(1+e_{n-1})}{\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j}+\frac{\left|\sum_{j=1}^{n-2}\beta_j y_j^*\right|_A}{\sum_{j=n-1}^{\infty}\beta_j}\right)\\
&< \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&< \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{\beta_k\alpha_k(1+e_k)}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\}+\frac{|\beta_1 y_1^*|_A}{\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j}\right)\\
&\overset{(A.2)}{<} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k\alpha_k(1+e_k)}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, como $\alpha_k \leq \alpha$, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j^*\right|_A &< \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k\alpha_k(1+e_k)}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right)\\
&< \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k(1+e_k)}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right)\\
&= \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j}+\frac{\beta_k e_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right)\\
&\overset{(A.1)}{<} \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j}-\frac{1}{\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\}+(1-\theta)\right)\\
&= \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{1}{\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j}-1+(1-\theta)\right)\\
&= \alpha\left(1-\theta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right),
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

□

Provaremos agora o Teorema de James para espaços de Banach separáveis.

Teorema A.3.3. (Teorema 1, [Jam72]) Seja X um espaço de Banach separável. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) O espaço X não é reflexivo.

(b) Se $\theta \in (0,1)$, então existe uma sequência $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ tal que $\lim_n x_n^*(x) = 0$ para cada $x \in X$ e $\mathrm{d}(0, \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}) \geq \theta$.

(c) Se $\theta \in (0,1)$ e (β_n) é uma sequência de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$, então existem $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\theta \leq \alpha \leq 1$ e uma sequência $(y_n^*) \subset B_{X^*}$, tais que

(1) $\lim_n y_n^*(x) = 0$ para cada $x \in X$,

(2) $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^*\right\| = \alpha$,

(3) $\left\|\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^*\right\| < \alpha\left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(d) Existe um funcional $z^* \in X^*$ que não atinge a norma.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que X não seja reflexivo e fixe $\theta \in (0,1)$. Como $\delta_X(X) \subset X^{**}$ é um subespaço próprio fechado de X^{**}, existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que $\|x^*\| = 1$ e

$$\theta < \mathrm{d}(x^{**}, \delta_X(X)) = \|x^{**} + \delta_X(X)\| \leq \|x^{**}\| = 1, \tag{A.4}$$

usando o Teorema A.2.4 (Lema de Riesz). Como X é separável, podemos tomar $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, um subconjunto denso e enumerável de X. Para provar a implicação, construiremos uma sequência $(x_n^*) \subset X^*$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\|x_n^*\| \leq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $x^{**}(x_n^*) = \theta$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $x_n^*(x_j) = 0$, para cada $j \leq n$.

Considere $M = \theta / \mathrm{d}(x^{**}, \delta_X(X))$ e note que $0 < M < 1$. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ são escalares quaisquer, temos

$$M \left\| x^{**} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_X(x_j) \right\| \geq M \cdot \mathrm{d}(x^{**}, \delta_X(X)) = \theta.$$

Coloque $c_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$ e seja $c_{n+1} = \theta$. Então, para cada combinação linear $\alpha_1 \delta_X(x_1) + \dots + \alpha_n \delta_X(x_n)$, temos

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j c_j \right| = |\alpha_{n+1}| \theta \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_X(x_j) + \alpha_{n+1} x^{**} \right\|.$$

Pelo Teorema de A.2.3 (Teorema de Helly), para cada $\varepsilon > 0$, existe $y_\varepsilon^* \in X^*$ tal que

(iv) $\|y_\varepsilon^*\| \leq M + \varepsilon$,

(v) $\delta_X(x_j)(y_\varepsilon^*) = c_j = 0$, para $j = 1, \dots, n$,

(vi) $x^{**}(y_\varepsilon^*) = c_{n+1} = \theta$.

Definindo $x_n^* = y_\varepsilon^*$ para ε suficientemente pequeno, (x_n^*) satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) acima.

Agora, se $x^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$, então $x^* = \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j x_j^*$, para algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j = 1$. Logo, usando o item (ii)

$$\begin{aligned} x^{**}(x^*) &= x^{**}\left(\sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j x_j^*\right) \\ &= \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j x^{**}(x_j^*) \\ &= (\lambda_n + \ldots + \lambda_{n+N})\theta \\ &= \theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \theta &= |x^{**}(x^*)| \\ &\leq \|x^{**}\|\|x^*\| \\ &\overset{(A.4)}{\leq} \|x^*\|, \end{aligned}$$

o que implica $\mathrm{d}(0, \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}) \geq \theta$. Finalmente, suponha que $x_0 \in X$ e seja $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned} |x_n^*(x_0)| &= |x_n^*(x_k) + x_n^*(x_0) - x_n^*(x_k)| \\ &= |x_n^*(x_k) + x_n^*(x_0 - x_k)| \\ &\leq |x_n^*(x_k)| + |x_n^*(x_0 - x_k)| \\ &\leq |x_n^*(x_k)| + \|x_n^*\|\|x_0 - x_k\| \\ &\overset{\text{(i)}}{\leq} |x_n^*(x_k)| + \|x_0 - x_k\|. \end{aligned}$$

Como $\lim_n x_n^*(x_k) = 0$, por (iii), e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X, segue que $x_n^*(x_0) \to 0$. Como x_0 é qualquer, segue que (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Sejam $\theta \in (0, 1)$ e (β_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$. Considere a sequência $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ como em (b). Tomando $A = B_X$ no Lema A.3.2 e percebendo que (x_n^*) está nas hipóteses deste lema, existem $\alpha \in [\theta, 1]$ e uma sequência $y_n^* \subset B_{X^*}$ tais que valem (2) e (3). Também vale (1), pois $y_n^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \geq n\})$ e $\lim_n x_n^*(x) = 0$ para cada $x \in X$ implicam que $y_n^*(x) \to 0$ para cada $x \in X$.

(c) $\Rightarrow$ (d) O funcional que *não* atinge a norma é dado por

$$z^* := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^*.$$

Vamos justificar o por quê. Note primeiramente que $\|z^*\| = \alpha$ por (2). Agora, seja $x \in B_X$ qualquer e, usando (1), seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $|y_j^*(x)| < \alpha\theta$, sempre que $j > n$. Então

$$
\begin{aligned}
|z^*(x)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j y_j^*(x)\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^*(x)\right| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j |y_j^*(x)| \\
&< \left\|\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^*\right\| + \alpha\theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \\
&\overset{(3)}{<} \alpha\left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) + \alpha\theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \\
&= \alpha \\
&= \|z^*\|,
\end{aligned}
$$

ou seja, z^* não atinge a norma.

(d) $\Rightarrow$ (a) Como existe $z^* \in X^*$ que não atinge a norma, pelo Teorema A.3.1, segue que X não pode ser reflexivo. □

Assim, um espaço de Banach separável é reflexivo se, e somente se, todo funcional $x^* \in X^*$ atinge a norma. A partir de agora, vamos caminhar para a demonstração deste mesmo resultado retirando a hipótese do espaço de Banach ser separável. Para tanto, precisamos estabelecer algumas notações.

Sejam X um espaço normado real e (x_n^*) uma sequência limitada em X^*, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M > 0$ tal que $\|x_n^*\| \leq M$. Daí, para todo $x \in X$, tem-se $\|x_n^*(x)\| \leq \|x_n^*\|\|x\| \leq M\|x\|$, isto é, a sequência $(x_n^*(x))$ também é limitada para cada $x \in X$. Com isso, podemos definir os seguintes conjuntos:

$$L(x_n^*) = \{x^* \in X^* : x^*(x) \leq \limsup x_n^*(x),\ \forall x \in X\}$$

e

$$V(x_n^*) = \{(y_n^*) \subset X^* : y_n^* \in \operatorname{co}(\{x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots\}),\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Algumas observações sobre esses dois conjuntos são listadas abaixo.

Observação 1. $(x_n^*) \in V(x_n^*)$;

De fato, (x_n^*) é uma sequência em X^*, onde $x_n^* \in \operatorname{co}(\{x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots\})$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2. Cada elemento de $V(x_n^*)$ é uma sequência na bola fechada de centro 0 e raio $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\|$.

De fato, se $(y_n^*) \in V(x_n^*)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n^* \in \operatorname{co}(\{x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots\})$, ou seja,

$$y_n^* = \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) x_j^*,$$

para algum $N \in \mathbb{N}$, onde $\sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) = 1$ e $\lambda_j(n) \geq 0$ para cada j. Logo,

$$\begin{aligned} \|y_n^* - 0\| &= \|y_n^*\| \\ &= \left\| \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) x_j^* \right\| \\ &\leq \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) \|x_j^*\| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|. \end{aligned}$$

Observação 3. $V(y_n^*) \subset V(x_n^*)$ e $L(y_n^*) \subset L(x_n^*)$, sempre que $(y_n^*) \in V(x_n^*)$.

De fato, a primeira inclusão é de fácil entendimento. Provemos que $L(y_n^*) \subset L(x_n^*)$, sempre que $(y_n^*) \in V(x_n^*)$. Seja $y^* \in L(y_n^*)$. Então para cada $x \in X$, temos

$$y^*(x) \leq \limsup y_n^*(x).$$

Precisamos provar que $y^*(x) \leq \limsup x_n^*(x)$, para cada $x \in X$. Como $(y_n^*) \in V(x_n^*)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$

$$y_n^* = \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) x_j^*$$

para algum $N \in \mathbb{N}$ com $\sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} y^*(x) &\leq \limsup y_n^*(x) \\ &= \limsup \left(\sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) x_j^* \right) x \\ &= \limsup \sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) x_j^*(x) \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{n+N} \lambda_j(n) \right) \limsup x_n^*(x) \\ &= \limsup x_n^*(x). \end{aligned}$$

Observação 4. Note que se $x^* \in L(x_n^*)$, então $\|x^*\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|$.

De fato,

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &\leq \limsup |x_n^*(x)| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \\ &\leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| \right) \|x\| \end{aligned}$$

Logo, $\|x^*\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\|$.

Observação 5. Se $x^* \in L(x_n^*)$, então $\liminf x_n^*(x) \leq x^*(x)$, para cada $x \in X$.

De fato, como $x^* \in L(x_n^*)$, temos que $-x^*(x) \geq -\limsup x_n^*(x)$, para cada $x \in X$. Mas $\liminf x_n^*(x) = -\limsup x_n^*(-x)$. Daí, para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} \liminf x_n^*(x) &= -\limsup x_n^*(-x) \\ &\leq -x^*(-x) \\ &= x^*(x). \end{aligned}$$

Observação 6. Se (x_n^*) é uma sequência limitada em X^*, então $L(x_n^*) \neq \emptyset$.

Com efeito, seja $p : X \to \mathbb{R}$ dado por $p(x) = \limsup x_n^*(x)$ para cada $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \limsup x_n^*(\lambda x) \\ &= \limsup \lambda x_n^*(x) \\ &= \lambda p(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \limsup x_n^*(x+y) \\ &= \limsup (x_n^*(x) + x_n^*(y)) \\ &\leq \limsup x_n^*(x) + \limsup x_n^*(y) \\ &= p(x) + p(y), \end{aligned}$$

para cada $x, y \in X$ e $\lambda > 0$. Então, p é um funcional sublinear[2]. Considere y^* o funcional identicamente nulo definido no subespaço $\{0\}$ de X. Então, $y^*(0) = p(0)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe x^*, uma extensão de y^* para X, tal que $x^*(x) \leq p(x)$, para cada $x \in X$, o que implica que $x^*(x) \leq \limsup x_n^*(x)$, para cada $x \in X$. Além disso,

$$|x^*(x)| \leq \limsup |x_n^*(x)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| \cdot \|x\|,$$

para cada $x \in X$, ou seja, $x^* \in X^*$. Logo, $x^* \in L(x_n^*)$ e $L(x_n^*)$ é não vazio.

Provaremos agora o lema que dá imenso suporte à demonstração do teorema de James. Note a semelhança desse novo lema com o Lema A.3.2. A mesma recomendação lá feita, é feita aqui: os leitores que não têm interesse neste lema técnico, poderão ir direto para a demonstração do teorema seguinte. Lembremos que um conjunto A é *equilibrado* se $\lambda x \in A$ para todo $x \in A$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$.

Lema A.3.4. (Lema 2, [Jam72]) Sejam X um espaço normado real e $A \subseteq B_X$ não vazio e equilibrado. Suponha que (β_n) seja uma sequência de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$. Suponha também que $\theta \in (0,1)$ e que (x_n^*) seja uma sequência em B_{X^*} tal que $\sup_{x\in A} |(x^* -$

[2] Seja $p : X \to \mathbb{R}$. Se $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ e $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para todos $x, y \in X$ e $\lambda > 0$, então dizemos que p é um *funcional sublinear*.

$w^*)(x)| \geq \theta$ para cada $x^* \in \operatorname{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ e $w^* \in L(x_n^*)$. Então existem α tal que $\theta \leq \alpha \leq 2$ e $(y_n^*) \subset B_{X^*}$ tais que para todo $w^* \in L(y_n^*)$,

(a) $\sup_{x \in A} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*)(x) \right| = \alpha,$

(b) $\sup_{x \in A} \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*)(x) \right| < \alpha \left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Defina, como no Lema A.3.2, $|x^*|_A = \sup_{x \in A} |x^*(x)|$, para cada $x^* \in X^*$. Já vimos que $| \ . \ |_A$ é uma seminorma em X^* e que $|x^*|_A \leq \|x^*\|$, para todo $x^* \in X^*$. Novamente, seja (e_n) uma sequência de números reais positivos que converge a zero tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k e_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} < 1 - \theta. \tag{A.5}$$

Vamos usar indução sobre n para obter uma sequência real (α_j) e sequências (y_j^*), $({}^0x_j^*)$, $({}^nx_j^*)$ e $({}^nz_j^*)$ em X^* tais que $({}^0x_j^*) \subset B_{X^*}$ e que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(1) y_n^*, $({}^nx_j^*)$ e $({}^nz_j^*)$ estejam em B_{X^*},

(2) $({}^nz_j^*) \in V({}^{n-1}x_j^*)$,

(3) $({}^nx_j^*)$ seja uma subsequência de $({}^nz_j^*)$,

(4) $y_n^* \in \operatorname{co}(\{{}^{n-1}x_n^*, {}^{n-1}x_{n+1}^*, {}^{n-1}x_{n+2}^*, \ldots\})$,

(5) $\theta \leq \alpha_n \leq 2$,

(6) $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$, sempre que $n \geq 2$.

Para começar a indução, seja $({}^0x_j^*) = (x_j^*)$. Agora, suponha que $m \in \mathbb{N}$ e que se $m \geq 2$, então α_n, y_n^*, $({}^nz_j^*)$ e $({}^nx_j^*)$ são escolhidos de forma a cumprir as condições de (1) à (6) acima quando $n = 1, \ldots, m-1$.

Faremos o resto da demonstração por etapas. No que se segue, consideramos 0 a soma que tem limitante superior $N \leq 0$.

Etapa 1. Se $(v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$, então $(v_j^*) \subset B_{X^*}$.

Note que é suficiente mostrar que $({}^{m-1}x_j^*) \subset B_{X^*}$. Isto ocorre pois se $m = 1$, então $({}^{m-1}x_j^*) = ({}^0x_j^*) = (x_j^*)$ que está contido em B_{X^*} por hipótese. Se $m \geq 2$, então o resultado segue por (1), usando a hipótese de indução.

Etapa 2. Se $y^* \in \operatorname{co}(\{{}^{m-1}x_m^*, {}^{m-1}x_{m+1}^*, {}^{m-1}x_{m+2}^*, \ldots\})$ e $(v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$, então

$$S_m(y^*, (v_j^*)) = \left\{ \left| \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j \right) y^* - w^* \right|_A : w^* \in L(v_j^*) \right\}$$

é um subconjunto não vazio de $[0,2]$ e, portanto,

$$\alpha_m = \inf\left\{\sup S_m(y^*, (v_j^*)) : y^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_m^*, {}^{m-1}x_{m+1}^*, {}^{m-1}x_{m+2}^*, \ldots\}), (v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)\right\}$$

é um número entre 0 e 2.

Para provar isto, fixe $y^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_m^*, {}^{m-1}x_{m+1}^*, {}^{m-1}x_{m+2}^*, \ldots\})$ e $(v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$. Então, como $({}^{m-1}x_j^*) \subset B_{X^*}$, segue que $y^* \in B_{X^*}$. Também temos que, como $(v_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$, então $(v_j^*) \subset B_{X^*}$, pela Etapa 1. Portanto, se $x^* \in L(v_j^*)$, temos que $\|x^*\| \leq \sup_j \|v_j^*\| \leq 1$, ou seja, $L(v_j^*) \subset B_{X^*}$. Além disso, por hipótese de indução, $y_1^*, \ldots, y_{m-1}^* \in B_{X^*}$. Sendo assim, se $w^* \in L(v_j^*)$, temos que

$$\begin{aligned}
0 \leq \left|\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) y^* - w^*\right|_A &\leq \left\|\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^*\right\| + \left\|\left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) y^*\right\| + \|w^*\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \|y_j^*\| + \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j \|y^*\| + \|w^*\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j + \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j + \|w^*\| \\
&= 1 + \|w^*\| \\
&\leq 1 + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Como $L(v_j^*)$ é não vazio pela Observação 6, segue que $S_m(y^*, (v_j^*)) \subset [0,2]$ e α_m de fato define um número entre 0 e 2.

Etapa 3. Se $m \geq 2$, então $V({}^{m-2}x_j^*) \supseteq V({}^{m-1}x_j^*)$.

Note que se $m \geq 2$, então por (3), $({}^{m-1}x_j^*)$ é uma subsequência de $({}^{m-1}z_j^*)$ que por sua vez pertence a $V({}^{m-2}x_j^*)$ por (1). Logo ${}^{m-1}x_j^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_j^*, {}^{m-2}x_{j+1}^*, \ldots\})$, para cada $j \in \mathbb{N}$ e, portanto, $({}^{m-1}x_j^*) \in V({}^{m-2}x_j^*)$.

Etapa 4. Se $m \geq 2$ e $x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_m^*, {}^{m-1}x_{m+1}^*, \ldots\})$, então

$$\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} y_{m-1}^* + \frac{\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_{m-1}^*, {}^{m-2}x_m^*, \ldots\}).$$

De fato, note primeiramente que $({}^{m-1}x_j^*) \in V({}^{m-2}x_j^*)$ pela Etapa 3 e, portanto,

$${}^{m-1}x_j^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_k^* : k \geq m-1\})$$

quando $j \geq m$. Como $x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_m^*, {}^{m-1}x_{m+1}^*, \ldots\})$, segue que $x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_k^* : k \geq m-1\})$. Por (4), $y_{m-1}^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_k^* : k \geq m-1\})$, usando a hipótese de indução. Como toda combinação convexa de elementos de $\mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_k^* : k \geq m-1\})$ continua em $\mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_k^* : k \geq m-1\})$ segue o resultado.

Etapa 5. Se $m \geq 2$, então $\alpha_{m-1} \leq \alpha_m$.

Seja

$$y_0^* = \frac{\beta_{m-1}}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} y_{m-1}^* + \frac{\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=m-1}^{\infty} \beta_j} x^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-2}x_{m-1}^*, {}^{m-2}x_m^*, \ldots\}).$$

O resultado segue das etapas 3 e 4, e do fato de que o ínfimo de um subconjunto é maior ou igual ao ínfimo do conjunto que o contém. Basta calcular α_{m-1} e usar a definição de $S_{m-1}(y^*, (v_j^*))$ para ver esta etapa concluída.

Etapa 6. $\theta \leq \alpha_m \leq 2$.

A Etapa 2 nos diz que $0 \leq \alpha_m \leq 2$, enquanto que a Etapa 5 nos diz que $\alpha_{m-1} \leq \alpha_m$. Isto sempre que $m \geq 2$. Logo, se mostramos que $\alpha_1 \geq \theta$, então $\theta \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_m \leq \ldots \leq 2$ e, daí, teremos o resultado desejado. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \inf\left\{\sup S_1(y^*, (v_j^*)) : y^* \in \mathrm{co}(\{{}^0x_1^*, {}^0x_2^*, \ldots\}), (v_j^*) \in V({}^0x_j^*)\right\} \\ &= \inf\left\{\sup S_1(y^*, (v_j^*)) : y^* \in \mathrm{co}(\{x_1^*, x_2^*, \ldots\}), (v_j^*) \in V(x_j^*)\right\}. \end{aligned}$$

Se $y^* \in \mathrm{co}(\{x_j^* : j \in \mathbb{N}\})$ e $(v_j^*) \in V(x_j^*)$, então é suficiente mostrar que $\sup S_1(y^*, (v_j^*)) \geq \theta$, isto é,

$$\sup S_1(y^*, (v_j^*)) = \sup\{|y^* - w^*|_A : w^* \in L(v_j^*)\} \geq \theta.$$

Mas é suficiente mostrar apenas que $|y^* - w^*|_A \geq \theta$ para $w^* \in L(v_j^*)$. Mas isto é verdade pela hipótese do lema e porque $L(v_j^*) \subset L(x_j^*)$, já que $(v_j^*) \in V(x_j^*)$. Isto prova a etapa 6.

Agora, usando a definição de α_m, podemos escolher $y_m^* \in \mathrm{co}(\{{}^{m-1}x_m^*, {}^{m-1}x_{m+1}^*, \ldots\})$ e $({}^m z_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$ tais que

$$\alpha_m \leq \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) y_m^* - w^*\right|_A : w^* \in L({}^m z_j^*)\right\} < \alpha_m(1 + e_m), \tag{A.6}$$

e, portanto, podemos tomar $w_m^* \in L({}^m z_j^*)$ tal que

$$\alpha_m(1 - e_m) < \left|\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) y_m^* - w_m^*\right|_A.$$

Como A é equilibrado, podemos obter $x_m \in A$ tal que

$$\alpha_m(1 - e_m) < \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j y_j^* x_m + \left(\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right) y_m^*(x_m) - w_m^*(x_m). \tag{A.7}$$

Agora, como $({}^m z_j^*) \in V({}^{m-1}x_j^*)$, segue da Etapa 1 que $({}^m z_j^*) \subset B_{X^*}$ e, portanto,

$$|\liminf({}^m z_j^*(x_m))| \leq 1.$$

Seja $({}^m x_j^*)$ uma subsequência de $({}^m z_j^*)$ tal que $\lim({}^m x_j^*(x_m)) = \liminf({}^m z_j^*(x_m))$. Portanto, como

$({}^{m-1}x_j^*) \subset B_{X^*}$ e valem as etapas 1, 5 e 6, segue que as sequências α_m, y_m^*, $({}^m z_j^*)$ e $({}^m x_j^*)$ satisfazem (1), (2), (3), (4), (5) e (6) quando $n = m$ e isto completa a indução.

Etapa 7. $L(y_j^*) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} L({}^n x_j^*) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} L({}^n z_j^*)$.

Para ver a prova da segunda inclusão, suponha que $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $L({}^n x_j^*) \subset L({}^n z_j^*)$. Isto ocorre se $({}^n x_j^*) \in V({}^n z_j^*)$. Mas este último é válido porque $({}^n x_j^*)$ é uma subsequências de $({}^n z_j^*)$.

Para provar que $L(y_j^*) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} L({}^n x_j^*)$, seja $n \in \mathbb{N}$. Note que se $j \in \mathbb{N}$, então (2), (3) e (4) garantem que

$$\begin{aligned} y_j^* &\overset{(4)}{\in} \operatorname{co}(\{{}^{j-1}x_j^*, {}^{j-1}x_{j+1}^*, \ldots\}) \\ &\overset{(3)}{\subseteq} \operatorname{co}(\{{}^{j-1}z_j^*, {}^{j-1}z_{j+1}^*, \ldots\}) \\ &\overset{(2)}{\subseteq} \operatorname{co}(\{{}^{j-2}x_j^*, {}^{j-2}x_{j+1}^*, \ldots\}) \\ &\overset{(3)}{\subseteq} \operatorname{co}(\{{}^{j-2}z_j^*, {}^{j-2}z_{j+1}^*, \ldots\}) \\ &\subseteq \ldots \\ &\subseteq \operatorname{co}(\{{}^{0}x_j^*, {}^{0}x_{j+1}^*, \ldots\}) \end{aligned}$$

Portanto, sempre que $j > n$, temos que $y_j^* \in \operatorname{co}(\{{}^n x_j^*, {}^n x_{j+1}^*, \ldots\})$, donde

$$\limsup_j (y_j^*(x)) \leq \limsup_j ({}^n x_j^*(x)), \forall x \in X.$$

Assim, se $x^* \in L(y_j^*)$, então

$$x^*(x) \leq \limsup_j (y_j^*(x)) \leq \limsup_j ({}^n x_j^*(x)),$$

para cada $x \in X$, o que implica que $x^* \in L({}^n x_k^*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue, portanto, a outra inclusão.

Etapa 8. Se $w^* \in L(y_j^*)$ e $m \in \mathbb{N}$, então a desigualdade (A.7) continua válida para o mesmo elemento $x_m \in A$ quando w_m^* é trocado por w^*.

Note que da Etapa 7, temos que $w^* \in L({}^m x_j^*)$. Assim,

$$w^*(x_m) = \lim_j ({}^m x_j^*(x_m)) = \liminf_j ({}^m z_j^*(x_m)) \leq w_m^*(x_m).$$

Isto completa a demonstração da etapa 8 e, portanto, podemos finalizar a demonstração: Fixe $w^* \in L(y_j^*)$. Segue da desigualdade (A.6) e dos passos 7 e 8, que se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\alpha_n(1 - e_n) < \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j y_j^* + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) y_n^* - w^* \right|_A < \alpha_n(1 + e_n).$$

Pelos passos 5 e 6, existe $\lim_n \alpha_n$ e ele pertence a $[\theta, 2]$. Chame este limite de α. Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos (a). Resta-nos, então, provar (b). Esta prova é feita da mesma maneira que fizemos na demonstração do Lema A.3.2, trocando y_k^* por $(y_k^* - w^*)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

□

Teorema A.3.5. (Teorema 2, [Jam72]) Seja X um espaço de Banach real. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) O espaço X não é reflexivo.

(b) Se $\theta \in (0,1)$, então existem um subespaço fechado M de X e uma sequência $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ tais que $\mathrm{d}(M^\perp, \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})) \geq \theta$ e $x_n^*(x) \to 0$, para cada $x \in M$. [3]

(c) Se $\theta \in (0,1)$ e (β_n) é uma sequência de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^\infty \beta_n = 1$, então existem α tal que $\theta \leq \alpha \leq 2$ e uma sequência $(y_n^*) \subset B_{X^*}$ tais que para todo $w^* \in L(y_n^*)$ tem-se

(1) $\left\|\sum_{j=1}^\infty \beta_j (y_j^* - w^*)\right\| = \alpha$,

(2) $\left\|\sum_{j=1}^n \beta_j (y_j^* - w^*)\right\| < \alpha \left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^\infty \beta_j\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(d) Existe um funcional $z^* \in X^*$ que não atinge a norma.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que X não seja reflexivo e tome arbitrariamente $\theta \in (0,1)$. Pelo Teorema A.2.5, existe um subespaço fechado separável M de X que não é reflexivo. Logo, pelo item (b) do Teorema A.3.3, existe uma sequência $(m_n^*) \subset B_{M^*}$ tal que

$$\mathrm{d}(0, \mathrm{co}(\{m_n^* : n \in \mathbb{N}\})) \geq \theta$$

e $m_n^*(x) \to 0$, para todo $x \in M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja x_n^* uma extensão de Hahn-Banach dos funcionais m_n^* para X. Se $x^* \in \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})$ e $y^* \in M^\perp$, então a restrição de $x^* - y^*$ a M é um elemento $m^* \in \mathrm{co}(\{m_n^* : n \in \mathbb{N}\})$, já que $y^*|_M \equiv 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\|x^* - y^*\| &= \sup_{x \in B_X} |(x^* - y^*)(x)| \\
&\geq \sup_{x \in B_M} |(x^* - y^*)(x)| \\
&= \|m^*\| \\
&\geq \mathrm{d}(0, \mathrm{co}(\{m_n^* : n \in \mathbb{N}\})) \\
&\geq \theta.
\end{aligned}$$

Daí, $\mathrm{d}(M^\perp, \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})) \geq \theta$ e $x_n^*(x) \to 0$ para cada $x \in M$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sejam $\theta \in (0,1)$ fixo e (β_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^\infty \beta_n = 1$. Para este θ considere M o subespaço fechado e $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ com as propriedades do item (b). Como $x_n^*(x) \to 0$ para cada $x \in M$, segue que se $x^* \in L(x_n^*)$, então $x^*(x) = 0$, para cada $x \in M$, isto é, $x^* \in M^\perp$. Logo, $L(x_n^*) \subset M^\perp$ e, portanto,

$$\mathrm{d}(L(x_n^*), \mathrm{co}(\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\})) \geq \theta.$$

Então, pelo Lema A.3.4 aplicado a $A = B_X$, segue que existe $(y_n^*) \subset B_{X^*}$ tal que para todo $w^* \in L(y_n^*)$, valem (1) e (2).

[3]Denotamos por $M^\perp$ o conjunto dos funcionais $x^* \in X^*$ tais que $x^*(x) = 0$ para cada $x \in M$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sejam θ e Δ escalares tais que $\theta \in (0,1)$ e $0 < \Delta < \theta^2/2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\beta_n = \frac{2-\Delta}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^n.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n &= \frac{2-\Delta}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2-\Delta}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\Delta}{2}} \\
&= \frac{2-\Delta}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{2}{2-\Delta} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sejam α e (y_n^*) como em (c). Seja $w^* \in L(y_n^*)$ e seja

$$z^* = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*).$$

Então $\|z^*\| = \alpha$. Vamos mostrar que z^* *não* atinge a norma. Suponha que $x \in B_X$. Como $w^* \in L(y_n^*)$, segue que

$$\liminf_j y_j^*(x) \leq w^*(x).$$

Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(y_{n+1}^* - w^*)(x) < \theta^2 - 2\Delta = \theta \cdot \theta - 2\Delta \leq \alpha\theta - 2\Delta,$$

lembrando que $\theta \leq \alpha$. Como $w^*(y) \leq \limsup y_j^*(y) \leq 1$, para cada $y \in B_X$, segue que $\|w^*\| \leq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
z^*(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*)(x) + \beta_{n+1}(y_{n+1}^* - w^*)(x) + \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*)(x) \\
&< \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*)(x) + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j (y_j^* - w^*)(x) \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*) \right\| + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j (\|y_j^*\| + \|w^*\|) \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j (y_j^* - w^*) \right\| + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+1} + 2\sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j \\
&< \alpha\left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) + (\alpha\theta - 2\Delta)\beta_{n+1} + 2\sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j.
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j &= \frac{\Delta}{2}\left(\beta_{n+1}+\beta_{n+2}+\dots\right)\\
&= \frac{\Delta}{2}\left(\frac{2-\Delta}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{n+1}+\frac{2-\Delta}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{n+2}+\dots\right)\\
&= \frac{2-\Delta}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{n+2}+\frac{2-\Delta}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{n+3}+\dots\\
&= \beta_{n+2}+\beta_{n+3}+\dots\\
&= \sum_{j=n+2}^{\infty}\beta_j,
\end{aligned}$$

temos $\sum_{j=n+2}^{\infty}\beta_j = \frac{1}{2}\Delta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j < \Delta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
z^*(x) &< \alpha\left(1-\theta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)+(\alpha\theta-2\Delta)\beta_{n+1}+2\sum_{j=n+2}^{\infty}\beta_j\\
&< \alpha-\alpha\theta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j+(\alpha\theta-2\Delta)\beta_{n+1}+2\Delta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\\
&= \alpha-(\alpha\theta-2\Delta)\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j+(\alpha\theta-2\Delta)\beta_{n+1}\\
&= \alpha-(\alpha\theta-2\Delta)\sum_{j=n+2}^{\infty}\beta_j\\
&< \alpha-(\alpha\theta-2\Delta)\\
&< \alpha\\
&= \|z'\|,
\end{aligned}$$

pois $(\alpha\theta-2\Delta)\sum_{j=n+2}^{\infty}\beta_j < (\alpha\theta-2\Delta) < \alpha-2\Delta < \alpha$, já que $\Delta > 0$ e $\alpha \geq \theta > 0$. Agora, como $-x \in B_X$, segue que

$$-z^*(x) = z^*(-x) < \|z^*\|,$$

o que acarreta $|z^*(x)| < \|z^*\|$. Portanto, z^* não atinge sua norma.

(d) $\Rightarrow$ (a) Como existe $z^* \in X^*$ que não atinge sua norma, pelo Teorema A.3.1, X não pode ser reflexivo.

□

Finalmente, podemos enunciar e demonstrar o Teorema de James.

Teorema A.3.6. (Teorema de James) [Jam64] Se todo funcional linear contínuo em um espaço de Banach X atinge a norma, então X é reflexivo.

Demonstração. Seja X um espaço de Banach onde todo funcional linear e contínuo atinge a norma. Se X é um espaço de Banach real, então o teorema anterior nos garante o resultado. Então, assuma que X seja um espaço de Banach complexo. Seja $X_{\mathbb{R}}$ o espaço de Banach real obtido a partir de X. Seja $u^* \in (X_{\mathbb{R}})^*$ e seja $x^* \in X^*$ tal que $\mathrm{Re}(x^*) = u^*$. Para cada $x \in X$, seja $\alpha_x \in \mathbb{K}$ tal que

$|\alpha_x| = 1$ e

$$\alpha_x x^*(x) > 0,$$

o que implica que $x^*(\alpha_x x) = u^*(\alpha_x x)$. Assim, como todo funcional em X^* atinge a norma, existe $x \in B_X$ tal que $\|x^*\| = |x^*(x)|$ e

$$\|u^*\| = \|x^*\| = |x^*(x)| = |\alpha_x||x^*(x)| = |x^*(\alpha_x x)| = |u^*(\alpha_x x)|.$$

onde a primeira igualdade é justificada no item (c) do Teorema 1.1.1. Então, cada elemento de $u^* \in (X_{\mathbb{R}})^*$ atinge a norma. Logo, $X_{\mathbb{R}}$ é reflexivo e pelo Teorema A.2.2, segue que X é reflexivo, como queríamos demonstrar.

□

Depois que James demonstrou esta importante caracterização, surgiram questionamentos sobre a necessidade da hipótese de X ser um espaço de Banach. Em 1971, o próprio James encontrou um exemplo de um espaço normado incompleto e, portanto, não reflexivo, onde todos os seus funcionais lineares e contínuos atingiam a norma (vide [Jam71]). Consulte também [Mel11, Fil78]. No Capítulo 2, mostramos como o Teorema de James motivou os matemáticos Bishop e Phelps a demonstrarem um teorema que iniciou uma nova teoria e que possui belíssimos resultados como aqueles demonstrados nos capítulos 3 e 4.

Referências Bibliográficas

[AAP96] M. D. Acosta, F. Aguirre e R. Payá. There is no bilinear Bishop-Phelps theorem. *Israel J. Math*, 93:221–227, 1996. xi, 41

[AB78] R. M. Aron e P. Berner. A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. *Bull. Soc. Math. France*, 106:3–24, 1978. xi, 4, 10

[Aco98] M. D. Acosta. On multilinear mappings attaining their norms. *Studia Math.*, 131:155–165, 1998. 41, 50

[AFW95] R. M. Aron, C. Finet e E. Werner. Some remarks on norm-attaining n-linear forms. Em *K. Jarosz (Ed.), Proceedings of the Second Conference on Function Spaces, Lectures Notes in Pure and Appl. Math.*, páginas 19–28, vol. 172, Dekker, Nova Iorque, 1995. 50

[AGM03] R. M. Aron, D. García e M. Maestre. On norm attaining polynomials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 39:165–172, 2003. xi, xii, 10, 42, 48, 50

[AGM06] M. D. Acosta, D. García e M. Maestre. A multilinear Lindenstrauss theorem. *J. Funct. Anal.*, 235(1):122–136, 2006. xi, xii, 52, 55, 59, 69

[Agu96] F. Aguirre. *Algunos problemas de optimización en dimensión infinita: aplicaciones lineales y multilineales que alcanzan su norma.* Tese de Doutorado, Universidade de Granada, Espanha, 1996. 50, 51

[Are51a] R. Arens. The adjoint of a bilinear operation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:839–848, 1951. xi, 3, 41

[Are51b] R. Arens. Operations induced in function classes. *Monatsh. Math.*, 55:1–19, 1951. 3, 41

[BJ09] N. C. Bernardes Jr. Sobre os teoremas de Bishop-Phelps. III ENAMA. Rio de Janeiro, 2009. 17, 29

[BP61] E. Bishop e R. R. Phelps. A proof that every Banach space is subreflexive. *Bull. Amer. Math. Soc. 67*, páginas 97–98, 1961. 29, 55

[BP63] E. Bishop e R. R. Phelps. The support functionals of a convex set. *Proc. Symp. Pure Math. (Convexity), AMS*, 7:27–35, 1963. xi, 17

[CLM12] D. Carando, S. Lassalle e M. Mazzitelli. On the polynomial Lindenstrauss theorem. *J. Funct. Anal.*, 7:1809–1824, 2012. 53

[DG89] A. M. Davie e T. W. Gamelin. A theorem on polynomial-star approximation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106:351–356, 1989. xi, 4, 10, 15

[Fil78] R. E. Filho. Reflexividade, aproximação ótima e otimização convexa. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil, 1978. 92

[Gow90] W. T. Gowers. Symmetric block bases of sequences with large average growth. *Israel J. Math*, 69:129–151, 1990. 41

[Jam50] R. C. James. Bases and reflexivity of Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56:58, abstract 80, 1950. 73

[Jam57] R. C. James. Reflexivity and the supremum of linear functionals. *Ann. of Math.*, 66:159–169, 1957. 73

[Jam64] R. C. James. Characterizations of reflexivity. *Studia Math.*, 23:205–216, 1964. xi, 73, 91

[Jam71] R. C. James. A counterexample for a sup theorem in normed spaces. *Israel J. Math.*, 9:511–512, 1971. 92

[Jam72] R. C. James. Reflexivity and the sup of linear functionals. *Israel J. Math.*, 13:289–300, 1972. 73, 75, 79, 84, 89

[Jr.99] D. P. Pombo Jr. *Introdução à Análise Funcional.* EDUFF, Universidade Federal Fluminense, 1ª edição, 1999. 1

[Kre78] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1978. 74

[Las01] S. B. Lassalle. *Polinomios sobre un espacio de Banach y su relación con el dual.* Tese de Doutorado, Universidade de Buenos Aires, Argentina, 2001. 4, 10

[Lin63] J. Lindenstrauss. On operators which attain their norms. *Israel J. Math*, 1:139–148, 1963. xi, xii, 27, 29, 30, 32, 34, 38, 55

[Maz33] S. Mazur. Über schwache konvergenz in den Räumen (l_p). *Studia Math.*, 4:128–133, 1933. 73

[Meg98] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer, 1998. xii, 1, 2, 30, 73, 74, 75

[Mel11] T. R. S. Mello. Espaços reflexivos. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2011. 92

[Muj86] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces.* North Holland, math. studies 120 edição, 1986. 2, 3

[Mur10] Santiago Muro. *Funciones holomorfas de tipo acotado e ideales de polinomios homogéneos en espacios de Banach.* Tese de Doutorado, Universidade de Buenos Aires, Argentina, 2010. 4

[Pel01] L. Pellegrini. Um teorema de Hahn-Banach para polinômios homogêneos. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil, 2001. 10

[SGV00] F. C. Sánchez, R. García e I. Villanueva. Extension of multilinear operators on Banach spaces. *Extracta Mathematicae*, 15:291–334, 2000. 4

[Ski98] F. Skilnik. O teorema de Bishop-Phelps e alguns resultados associados. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil, 1998. 29

[SP98] M. J. Sevilla e R. Payá. Norm attaining multilinear forms and polynomials on preduals of Lorentz sequence spaces. *Studio Math.*, 127:99–112, 1998. xi, 41, 52

Índice Remissivo