A Matemática do Ensino Médio

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
www.sbm.org.br
lojavirtual@sbm.org.br

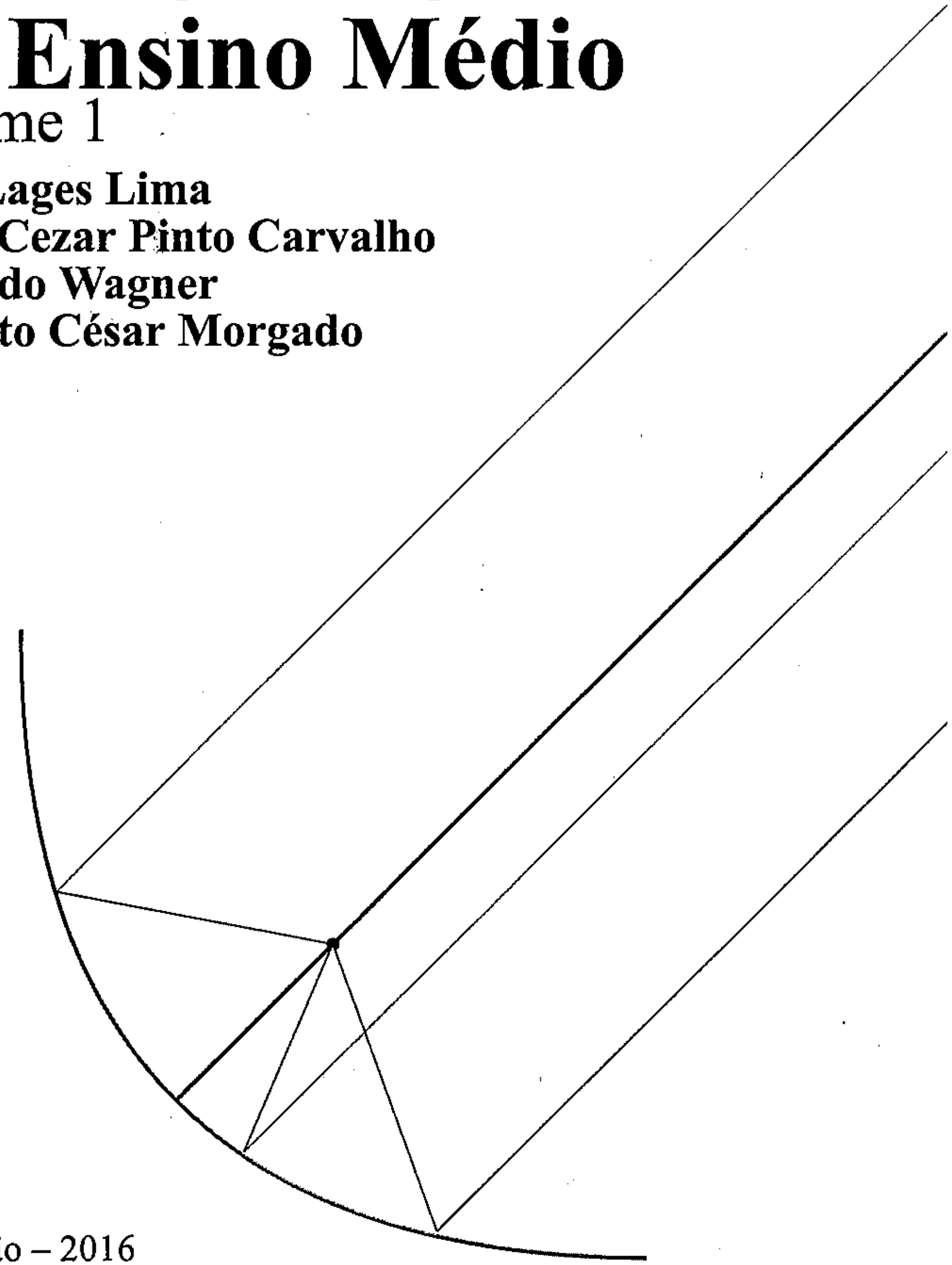
ISBN 978-85-8337-090-1
MSC (2010) Primary: 00-01

L732m Lima, Elon Lages
A Matemática do Ensino Médio / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. - 11.ed. -- Rio de Janeiro: SBM, 2016.
260 p. (Coleção Professor de Matemática; 13)
ISBN 978-85-8337-090-1
1. Conjuntos. 2. Funcões. 3. Números I. Carvalho, Paulo Cezar Pinto. II. Wagner, Eduardo. III. Morgado, Augusto César. IV. Título.
CDD: 511 CDU: 510

A Matemática do Ensino Médio

Volume 1

Elon Lages Lima
Paulo Cezar Pinto Carvalho
Eduardo Wagner
Augusto César Morgado



11ª edição – 2016
Rio de Janeiro
SBM
COLEÇÃO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio **ix**

1 Conjuntos **1**
1.1 A Noção de Conjunto 1
1.2 A Relação de Inclusão 4
1.3 O Complementar de um Conjunto 10
1.4 Reunião e Interseção 14
1.5 Comentário Sobre a Noção de Igualdade 17
1.6 Recomendações Gerais 18
1.7 Exercícios 19

2 Números Naturais **25**
2.1 Introdução 25
2.2 Comentário: Definições, Axiomas, etc. 26
2.3 O Conjunto dos Números Naturais 29
2.4 Destaque para o Axioma da Indução 32
2.5 Adição e Multiplicação 33
2.6 Ordem Entre os Números Naturais 34
2.7 Exercícios 36

3 Números Cardinais **39**
3.1 Funções 39

3.2 A Noção de Número Cardinal 43
3.3 Conjuntos Finitos 46
3.4 Sobre Conjuntos Infinitos 48
3.5 Exercícios 50

4 Números Reais **53**
4.1 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis 53
4.2 A Reta Real 56
4.3 Expressões Decimais 60
4.4 Desigualdades 68
4.5 Intervalos 72
4.6 Valor Absoluto 74
4.7 Sequências e Progressões 75
4.8 Exercícios 77

5 Funções Afins **81**
5.1 O Plano Numérico $\mathbb{R}^2$ 85
5.2 A Função Afim 90
5.3 A Função Linear 95
5.4 Caracterização da Função Afim 102
5.5 Funções Poligonais 105
5.6 Exercícios 106

6 Funções Quadráticas **117**
6.1 Definição e Preliminares 117
6.2 Um Problema Muito Antigo 122
6.3 A Forma Canônica do Trinômio 125
6.4 O Gráfico da Função Quadrática 128
6.5 Uma Propriedade Notável da Parábola 138
6.6 O Movimento Uniformemente Variado 144
6.7 Caracterização das Funções Quadráticas 147
6.8 Exercícios 153

7 Funções Polinomiais **163**
7.1 Funções Polinomiais vs Polinômios 163
7.2 Determinando um Polinômio a Partir de Seus Valores 166
7.3 Gráficos de Polinômios 168
7.4 Exercícios 173

8 Funções Exponenciais e Logarítmicas **175**
8.1 Introdução 175
8.2 Potências de Expoente Racional 177
8.3 A Função Exponencial 182
8.4 Caracterização da Função Exponencial 187
8.5 Funções Exponenciais e Progressões 190
8.6 Função Inversa 192
8.7 Funções Logarítmicas 195
8.8 Caracterização das Funções Logarítmicas 198
8.9 Logaritmos Naturais 200
8.10 A Função Exponencial de Base e 208
8.11 Vendo que $f(x+h)/f(x)$ depende só de h 214
8.12 Ainda Reconhecendo a Função $f(b,t) = b \cdot a^t$. 216
8.13 Exercícios 219

9 Funções Trigonométricas **221**
9.1 Introdução 221
9.2 A Função de Euler e a Medida de Ângulos 225
9.3 As Funções Trigonométricas 230
9.4 As Fórmulas de Adição 236
9.5 A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos 239
9.6 Exercícios 244

Índice Remissivo **246**

Prefácio

O programa de Matemática da primeira série do Ensino Médio tem como tema central as funções reais de uma variável real, estudadas sob o ponto de vista elementar, isto é, sem o uso do Calculo Infinitesimal. Como preliminar a esse estudo e preparação para as séries subsequentes, são apresentadas noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números (naturais, inteiros, racionais e, principalmente, reais).

O presente livro cobre esse programa. Ele contem a matéria lecionada no primeiro dos três módulos do curso de aperfeiçoamento para professores de Matemática, iniciado no segundo semestre de 1996, no IMPA, tendo como instrutores os professores A.C.O. Morgado, E. Wagner, Paulo Cézar Carvalho e o autor. A estes caros amigos e competentes colaboradores devo uma revisão crítica do manuscrito, a sugestão de alguns exemplos interessantes e a inclusão de numerosos exercícios. Por essa valiosa participação, registro meus agradecimentos.

O professor de Matemática, principalmente aquele que atua no chamado Segundo Grau, no escasso tempo que lhe resta da faina diária para preparar suas aulas, conta praticamente com uma única fonte de referência: o livro-texto que adota (ou os outros, que dele pouco diferem).

Visando dar ao professor maior apoio bibliográfico, a Sociedade Brasileira de Matemática, com a colaboração do IMPA, vem publicando na sua "Coleção do Professor de Matemática" uma série de monografias, cada uma delas dedicada a um tópico específico, principalmente a nível do Ensino Médio. A presente publicação, que pretende ser o primeiro livro de uma trilogia, tem a mesma finalidade. Só que agora, em vez de expor o programa de Matemática do segundo grau sob forma de temas isolados, estaremos dividindo os assuntos por série.

Em todo este livro, procuramos deixar claro que a Matemática oferece uma variedade de conceitos abstratos que servem de modelos para situação concretas, permitindo assim analisar, prever e tirar conclusões de forma eficaz em circunstâncias onde uma abordagem empírica muitas vezes não conduz a nada. Todos os temas aqui abordados são apresentados dentro dessa ótica.

Assim é que os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo para as operações de contagem e medida; as funções afins, as quadráticas, as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representar uma situação específica.

A fim de saber qual o tipo de função que deve ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características desse problema com as propriedades típicas da função que se tem em mente. Este processo requer que se conheçam os teoremas de caracterização para cada tipo de função. Sem tal conhecimento é impossível aplicar satisfatoriamente os conceitos e métodos matemáticos para resolver os problemas concretos que ocorrem, tanto no dia-a-dia como nas aplicações da Matemática às outras ciências e à tecnologia.

Vários desses teoremas de caracterização são expostos aqui, de forma elementar. Acho que todos os professores devem conhecê-los e ensinar seus alunos a usá-los de forma consciente. Quanto às demonstrações desses teoremas, embora acessíveis, elas foram incluídas aqui para o entendimento dos professores. Não considero essencial repassá-las aos estudantes, salvo em casos especiais, a critério de cada professor.

O importante é ter em mente que as aplicações aqui sugeridas despertam o interesse, justificam o esforço, exibem a eficiência e a utilidade dos

métodos da Matemática mas, por outro lado, só podem ser levadas a bom termo se contarem com uma base conceitual adequada.

Em preparação à segunda edição (1997) corrigimos alguns erros tipográficos, foi feita também uma pequena modificação no final do Capítulo 8, a inclusão de dois novos exercícios no Capítulo 6 e eliminação de uma asneira que escrevi e que o Gugu me apontou.

Em preparação à terceira edição (1998) a seção 7 do Capítulo 6 foi reescrita. Quero agradecer a Artur Ávila Cordeiro, por uma elegante sugestão ali incorporada. Agradeço também a Jonas Gomes pela imagem da página 146. Agradecimentos são devidos também a Maria Laura Magalhães Gomes por ter usado o texto num curso e ter feito uma cuidadosa revisão do mesmo.

Para a quinta edição (2000) foram feitas algumas modificações de pequena monta, visando maior clareza e correção. Agradeço aos diversos colegas que me apontaram os defeitos, em particular ao Prof. Antonio Paiva, que fez uma revisão sistemática do texto.

Em preparação à nona e décima edições (2012), por motivos técnicos, o texto foi inteiramente redigitado, o que causou mudanças na numeração das seções e das figuras. Além disso, foram feitos pequenos acréscimos visando esclarecer um pouco mais alguns pontos. Agradeço aos alunos e colegas que me sugeriram melhoras. Espero que o livro continue a receber a aceitação que tem tido até agora.

A publicação deste livro contou com o apoio da FAPERJ, em convênio com a CAPES, com a valiosa e sempre presente colaboração do IMPA e com a proverbial expertise de Wilson Góes.

Rio de Janeiro, 12 de março de 2012
Elon Lages Lima

1 | Conjuntos

1.1 A Noção de Conjunto

Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas.

Um conjunto é formado por elementos. Dados um conjunto A e um objeto qualquer a (que pode até mesmo ser outro conjunto), a pergunta cabível em relação a eles é: a é ou não um elemento do conjunto A? No caso afirmativo, diz-se que *a pertence* ao conjunto A e escreve-se $a \in A$. Caso contrário, põe-se $a \notin A$ e diz-se que *a não pertence* ao conjunto A.

A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc.

A linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica.

Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o objeto x goza da propriedade P" ou o "objeto

y satisfaz a condição C", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, onde A é o conjunto dos objetos que gozam da propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição C.

Por exemplo, sejam P a propriedade de um número inteiro x ser par (isto é, divisível por 2) e C a condição sobre o número real y expressa por

$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Por outro lado sejam

$$A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} \quad e \quad B = \{1, 2\}.$$

Então, tanto faz dizer que x goza da propriedade P e y satisfaz a condição C como afirmar que $x \in A$ e $y \in B$.

Qual é, porém, a vantagem que se obtém quando se prefere dizer que $x \in A$ e $y \in B$ em vez de dizer que x goza da propriedade P e y satisfaz a condição C?

A vantagem de se utilizar a linguagem e a notação de conjuntos é que entre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião ($A \cup B$) e interseção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$). As propriedades e regras operatórias dessa álgebra, como por exemplo

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad e \quad A \subset A \cup B,$$

são extremamente fáceis de manipular e representam um enorme ganho em simplicidade e exatidão quando comparadas ao manuseio de propriedades e condições.

Recomendações:

1. Evite dizer "teoria dos conjuntos". Essa teoria existe mas, neste nível, está-se apenas introduzindo a linguagem e a notação dos conjuntos. Não há teoria alguma aqui.

2. Resista à tentação de usar a expressão "x satisfaz a propriedade P". Um objeto pode *gozar* de uma propriedade, *possuir* uma propriedade, ou *ter* uma propriedade. Pode também *satisfazer* uma condição ou *cumprir* essa condição. Satisfazer uma propriedade é tão errado como gozar de uma condição. Propriedade é sinônimo de atributo; condição é o mesmo que requisito.

3. Nunca escreva coisas como $A = \{$conjunto dos números pares$\}$. Isto é incorreto. O símbolo $\{\ldots\}$ significa o conjunto cujos elementos estão descritos no interior das chaves. Escreva A = conjunto dos números pares, $A = \{$números pares$\}$ ou $A = \{2n; n \in \mathbb{Z}\}$.

Existe um conjunto excepcional e intrigante: o conjunto vazio, designado pelo símbolo $\varnothing$. Ele é aceito como conjunto porque cumpre a utilíssima função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções. Qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio. Por exemplo, tem-se $\varnothing = \{x; x \neq x\}$, ou seja, $\varnothing$ é o conjunto dos objetos x tais que x é diferente de si mesmo. Em muitas questões matemáticas é importante saber que um determinado conjunto X não é vazio. Para mostrar que X não é vazio, deve-se simplesmente encontrar um objeto x tal que $x \in X$.

Outros conjuntos curiosos são os conjuntos unitários. Dado um objeto x qualquer, o conjunto unitário $\{x\}$ tem como único elemento esse objeto x. Estritamente falando, x e $\{x\}$ não são a mesma coisa. Por exemplo, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ pois $\{\varnothing\}$ possui um elemento (tem-se $\varnothing \in \{\varnothing\}$) mas $\varnothing$ é vazio. Em certas ocasiões, entretanto, pode tornar-se um pedantismo fazer essa distinção. Nesses casos, admite-se escrever x em vez de $\{x\}$. Um exemplo disso ocorre quando se diz que a interseção de duas retas r e s é o ponto P (em lugar do conjunto cujo único elemento é P) e escreve-se $r \cap s = P$, em vez de $r \cap s = \{P\}$. (Com experiência e bom senso, quem se ocupa da Matemática percebe que a obediência estrita aos rígidos padrões da notação e do rigor, quando praticada ao pé da letra, pode ser um obstáculo à clareza, à elegância e ao entendimento dos alunos.)

1.2 A Relação de Inclusão

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um *subconjunto* de B, que A está *contido* em B ou que A é *parte* de B. Para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$.

Exemplo: sejam T o conjunto dos triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$.

A relação de $A \subset B$ chama-se *relação de inclusão*. Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$. Isto significa que nem todo elemento de A pertence a B, ou seja, que existe pelo menos um objeto a tal que $a \in A$ e $a \notin B$. Por exemplo, sejam A o conjunto dos números pares e B o conjunto dos múltiplos de 3. Tem-se $A \not\subset B$ porque $2 \in A$ mas $2 \notin B$. Tem-se também $B \not\subset A$ pois $3 \in B$ mas $3 \notin A$.

Há duas inclusões extremas. A primeira é obvia: para todo conjunto A, vale $A \subset A$ (pois é claro que todo elemento de A pertence a A). A outra é, no mínimo, curiosa: tem-se $\varnothing \subset A$, seja qual for o conjunto A. Com efeito, se quiséssemos mostrar que $\varnothing \not\subset A$, teríamos que obter um objeto x tal que $x \in \varnothing$ mas $x \notin A$. Como $x \in \varnothing$ é impossível, somos levados a concluir que $\varnothing \subset A$, ou seja, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro.

Diz-se que A é um *subconjunto próprio* de B quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \varnothing$ e $A \neq B$.

A relação de inclusão goza de três propriedades fundamentais. Dados quaisquer conjunto A, B e C tem-se:

reflexividade: $A \subset A$;

antisimetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$;

transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

A propriedade antisimétrica é constantemente usada nos raciocínios matemáticos. Quando se deseja mostrar que os conjuntos A e B são iguais, prova-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, que todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A. Na realidade, a propriedade antisimétrica da relação de inclusão contém, nela embutida, a condição de igualdade entre os conjuntos: os conjuntos A e B são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.

Por sua vez, a propriedade transitiva da inclusão é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de *silogismo*. Um exemplo de silogismo (tipicamente aristotélico) é o seguinte: todo ser humano é um animal, todo animal é mortal, logo todo ser humano é mortal. Na linguagem de conjuntos, isso seria formulado assim: sejam H, A e M respectivamente os conjuntos dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Temos $H \subset A$ e $A \subset M$, logo $H \subset M$.

Recomendações:

4. Se a é um elemento do conjunto A, a relação $a \in A$ pode também ser escrita sob a forma $\{a\} \subset A$. Mas é incorreto escrever $a \subset A$ e $\{a\} \in A$.

5. Em Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos. Seus elementos são pontos. Se r é uma reta contida no plano Π, escreve-se $r \subset \Pi$ pois, neste caso, a reta r é um subconjunto do plano Π. Não se deve escrever $r \in \Pi$ nem dizer que a reta r pertence ao plano Π, pois os elementos do conjunto Π são pontos e não retas.

A relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionada com a implicação lógica. Vejamos como. Sejam P e Q propriedades referentes a um elemento genérico de um conjunto U. Essas propriedades definem os conjuntos A, formado pelos elementos de U que gozam de P, e B, conjunto formado pelos elementos de U que têm a propriedade Q. Diz-se então que a propriedade P *implica*(ou *acarreta*) a propriedade Q, e escreve-se $P \Rightarrow Q$, para significar que $A \subset B$

Por exemplo, seja U o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Designemos com P a propriedade de um quadrilátero ter seus quatro ângulos retos e por Q a propriedade de um quadrilátero ter seus lados opostos paralelos. Então podemos escrever $P \Rightarrow Q$. Com efeito, neste caso, A é o conjunto dos retângulos e B é o conjunto dos paralelogramos, logo $A \subset B$.

Vejamos outro exemplo. Podemos escrever a implicação

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Ela significa que toda raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$ é também raiz de

$$x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Há diferentes maneiras de se ler a relação $P \Rightarrow Q$. Pode-se dizer "P implica Q", "se P então Q", "P é condição suficiente para Q", "Q é condição necessária para P" ou "P somente se Q".

Assim, no primeiro exemplo acima, podemos dizer: "ser retângulo implica ser paralelogramo", "se x é um retângulo então x é um paralelogramo", "ser retângulo é condição suficiente para ser paralelogramo", "ser paralelogramo é condição necessária para ser retângulo", ou, finalmente, "todo retângulo é um paralelogramo".

A implicação $Q \Rightarrow P$ chama-se a *recíproca* de $P \Rightarrow Q$. Evidentemente, a recíproca de uma implicação verdadeira pode ser falsa. Nos dois exemplos dados acima, as recíprocas são falsas: nem todo paralelogramo é retângulo e $x = 1$ é raiz da equação.

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

mas não da equação

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Quando são verdadeiras ambas as implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, escreve-se $Q \Leftrightarrow P$ e lê-se "P se, e somente se, Q", "P é equivalente a Q" ou "P é necessária e suficiente para Q". Isto significa que o conjunto dos elementos que gozam da propriedade P coincide com o conjunto dos elementos que gozam de Q.

Por exemplo, sejam P a propriedade de um triângulo, cujos lados medem $x \leqslant y \leqslant z$, ser retângulo e Q a propriedade de valer

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Então $P \Leftrightarrow Q$.

Recomendações:

6. Nunca escreva (ou diga) coisas do tipo

$$\text{“se} \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2x + 1 = 0\text{”.}$$

O símbolo $\Rightarrow$ não significa "então", mas sim "implica". Também é incorreto empregar o simbolo $\Rightarrow$ com o significado conclusivo da palavra "portanto". O símbolo adequado para esta palavra é $\therefore$ e não $\Rightarrow$.

7. As definições matemáticas consistem em atribuir nomes a objetos que gozam de certas propriedades particularmente interessantes. Elas contribuem para a clareza do discurso e a economia do pensamento. Por exemplo, um número natural $n > 1$ chama-se primo quando 1 e n são os únicos números naturais que são seus divisores. Embora, estritamente falando, não seja errado usar "se, e somente se," numa definição, trata-se de um costume didaticamente inadequado pois dá a impressão de ser um teorema, além de ocultar o fato de que se trata de simplesmente dar um nome a um conceito. Por exemplo, se queremos definir *paralelogramo* devemos dizer assim: "chama-se paralelogramo a um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos". Alguns autores escrevem: "um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, os lados opostos são paralelos". Isto não têm cara de definição.

Duas observações adicionais a respeito de proposições matemáticas:

A primeira é que em Matemática não há afirmações absolutas ou peremptórias. *Todas* as proposições matemáticas são do tipo "se P então Q". (Esta afirmação peremptória não pertence à Matemática. Ela é apenas sobre Matemática.)

Por exemplo, seja o Teorema de Pitágoras. Ele parece uma verdade absoluta mas na realidade é um afirmação condicional:

"Se $a > b \geqslant c$ são as medidas dos lados de um triângulo retângulo *então* $a^2 = b^2 + c^2$."

Por isso às vezes se diz que a Matemática é a ciência das condições necessárias. Ou então se diz como Bertrand Russel: "Na Matemática nunca sabemos do que estamos falando nem se é verdade o que estamos dizendo".

A segunda observação diz a respeito às afirmações que são vacuamente satisfeitas. Se um professor disser à sua classe que todos os alunos que tiverem 5 metros de altura passarão com nota 10 sem precisar prestar exames, ele certamente estará falando a verdade, mesmo que corrija suas provas com o máximo de rigor. Com efeito, sejam P a propriedade de um aluno ter 5 metros de altura e Q a de obter nota 10 sem prestar exames. Então $P \Rightarrow Q$ pois o conjunto definido pela propriedade P é vazio e o conjunto vazio está contido em qualquer outro. De um modo geral, a implicação $P \Rightarrow Q$ é verdadeira (vacuamente) sempre que não haja elementos com a propriedade P.

Às vezes é mais natural dizer que um objeto cumpre uma certa *condição* em lugar de afirmar que ele possui uma determinada *propriedade*. Por exemplo, uma equação como $x^2 - x - 2 = 0$ é mais apropriadamente vista como uma condição a que deve satisfazer o número x do que uma propriedade desse número. (Estamos falando de "mais ou menos conveniente", não de "certo ou errado".)

A propósito, a resolução de uma equação é um caso típico em que se tem uma sequência de implicações lógicas. Vejamos. Para resolver a equação

$$x^2 - x - 2 = 0$$

podemos seguir os passos abaixo:

(P) ...... $x^2 - x - 2 = 0$;
(Q) ...... $(x-2)(x+1) = 0$;
(R) ...... $x = 2$ ou $x = -1$;
(S) ...... $x \in \{2, -1\}$.

Se chamarmos respectivamente de P, Q, R e S as condições impostas sobre o número x em cada uma das linhas acima, os passos que acabamos de seguir significam que

$$P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S,$$

isto é, se o número x satisfaz P então satisfaz Q e assim por diante. Por transitividade, a conclusão a tirar é $P \Rightarrow S$, ou seja:

$$\text{Se } x^2 - x - 2 = 0 \text{ então } x \in \{2, -1\}$$

Estritamente falando, esta afirmação não significa que as raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$ são 2 e -1. O que está dito acima é que se houver raízes desta equação elas devem pertencer ao conjunto $\{2, -1\}$. Acontece, entretanto, que no presente caso, os passos acima podem ser revertidos. É fácil ver que valem as implicações recíprocas $S \Rightarrow R \Rightarrow Q \Rightarrow P$, logo $S \Rightarrow P$. Portanto $P \Leftrightarrow S$, ou seja, 2 e -1 são de fato as (únicas) raízes da equação

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

É importante, quando se resolve uma equação, ter em mente que cada passo do processo adotado representa uma implicação lógica. Às vezes essa implicação não pode ser revertida (isto é, sua recíproca não é verdadeira). Nesses casos, o conjunto obtido no final apenas contém (mas não é igual a) o conjunto das raízes, este último podendo até mesmo ser vazio. Ilustremos esta possibilidade com um exemplo.

Seja a equação $x^2 + 1 = 0$. Sabemos que ela não possui soluções reais. Na sequência abaixo, cada uma das letras P, Q, R e S representa a condição sobre o número x expressa na igualdade ao lado. Assim, P significa $x^2 + 1 = 0$, etc.

$(P)\ x^2 + 1 = 0.$ (multiplicando por $x^2 - 1$)
$(Q)\ x^4 - 1 = 0;$
$(R)\ x^4 = 1;$
$(S)\ x \in \{-1, 1\}.$

Evidentemente, tem-se $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S$, logo $P \Rightarrow S$, ou seja, toda raiz real da equação $x^2 + 1 = 0$ pertence ao conjunto $\{-1, 1\}$. O raciocínio é absolutamente correto, mas apenas ilustra o fato de que o conjunto vazio está contido em qualquer outro. A conclusão que se pode tirar é que se houver raízes reais da equação $x^2 + 1 = 0$ elas pertencerão ao conjunto $\{-1, 1\}$. Nada mais. O fato é que a implicação $P \Rightarrow Q$ não pode ser revertida: sua recíproca é falsa. Este fenômeno ocorre frequentemente quando se estudam as chamadas "equações irracionais", mas às vezes ele se manifesta de forma sutil, provocando perplexidade. (Veja Exercício 6.)

Observação:

Não é raro que pessoas confundam “necessário” com “suficiente”. A. C. M. notou que os alunos têm mais facilidade de usar corretamente está última palavra do que a anterior, já que “suficiente” é sinônimo de “bastante”. Talvez isso tenha a ver com o fato de que uma condição suficiente é geralmente mais forte do que a conclusão que se quer chegar. Por exemplo, para que um número seja par é suficiente que seja múltiplo de 4. (Ou basta ser múltiplo de 4 para ser par.) Por outro lado, uma condição necessária é, em geral, mais fraca do que a conclusão desejada. Assim, por exemplo, para que um quadrilátero convexo Q seja um retângulo é necessário que seus lados opostos sejam paralelos, mas esta propriedade apenas não assegura que Q tenha ângulos todos retos. É claro que um conjunto completo de condições necessárias para que seja válida uma propriedade P constitui uma condição suficiente para P.

1.3 O Complementar de um Conjunto

A noção de complementar de um conjunto só faz pleno sentido quando se fixa um conjunto U, chamado o *universo do discurso*, ou *conjunto-universo*. U poderia ser chamado o assunto da discussão ou o tema em pauta: estaremos falando somente dos elementos de U.

Uma vez fixado U, todos os elementos a serem considerados pertencerão a U e todos os conjuntos serão subconjuntos de U, ou derivados destes. Por exemplo na Geometria Plana, U é o plano. Na teoria aritmética da divisibilidade, U é o conjunto dos números inteiros.

Então, dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de U), chama-se *complementar* de A ao conjunto A^c formado pelos objetos de U que não pertencem a A. Lembramos que fixado o conjunto A, para cada elemento x em U, vale uma, e somente uma, das alternativas: $x \in A$, ou $x \notin A$.

O fato de que, para todo $x \in U$, não existe uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ é conhecido em Lógica como o *princípio do terceiro excluído*, e o fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo chama-se o *princípio da não-contradição.*

Seguem-se dos princípios acima enunciados as seguintes regras operatórias referentes ao complementar:

(1) Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^c)^c = A$. (Todo conjunto é complementar do seu complementar.)

(2) Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$. (Se um conjunto está contido noutro, seu complementar contém o complementar desse outro.)

A regra (2) pode ser escrita com notação $\Rightarrow$, assumindo a forma seguinte

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad B^c \subset A^c.$$

Na realidade, na presença da regra (1), a regra (2) pode ser reforçada, valendo a equivalência abaixo

(3) $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad B^c \subset A^c.$

Esta equivalência pode ser olhada sob o ponto de vista lógico, usando-se as propriedades P e Q que definem respectivamente os conjuntos A e B. Então o conjunto A é formado pelos elementos de U que gozam da propriedade P, enquanto que os elementos de B são todos os que (pertencem a U) e gozam da propriedade Q. As propriedades que definem os conjuntos A^c e B^c são respectivamente a *negação* de P, representada por P', e a *negação* de Q, representada por Q'. Assim, dizer que um objeto x goza da propriedade P' significa (por definição) afirmar que x não goza da propriedade P (e analogamente, para Q). Com estas convenções, a relação(3) acima lê-se assim:

(4) $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $Q' \Rightarrow P'$.

Noutras palavras, a implicação $P \Rightarrow Q$ (P implica Q) equivale a dizer que $Q' \Rightarrow P'$ (a negação de Q implica a negação de P).

Vejamos um exemplo. Sejam U o conjunto dos quadriláteros convexos, R a propriedade que tem um quadrilátero x de ser um retângulo e P a propriedade de ser um paralelogramo. Então P' é a propriedade que tem um quadrilátero convexo de não ser um paralelogramo e R' a de não ser um retângulo. As implicações $R \Rightarrow P$ e $P' \Rightarrow R'$ se leem, neste caso, assim:

(a) Se x é um retângulo então x é um paralelogramo;

(b) Se x não é um paralelogramo então x não é um retângulo.

Evidentemente, as afirmações (a) e (b) são equivalentes, ou seja, elas são apenas duas maneiras diferentes de dizer a mesma coisa.

A implicação $Q' \Rightarrow P'$ chama-se a *contrapositiva* da implicação $P \Rightarrow Q$.

Sob o ponto de vista pragmático, a contrapositiva de uma implicação nada mais é do que a mesma implicação dita com outras palavras, ou vista de um ângulo diferente. Assim por exemplo, a afirmação de que todo número primo maior do que 2 é ímpar e a afirmação de que um número par maior do que 2 não é primo dizem exatamente a mesma coisa, ou seja, exprimem a mesma ideia, só que com diferentes termos.

No dia-a-dia da Matemática é frequente, e muitas vezes útil, substituir uma implicação por sua contrapositiva, a fim de tornar seu significado mais claro ou mais manejável. Por isso é extremamente importante entender que $P \Rightarrow Q$ e $Q' \Rightarrow P'$ são afirmações equivalentes.

A equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva é a base das *demonstrações por absurdo.*

Vejamos um exemplo.

No plano Π, consideremos as retas perpendiculares r e s. Seja P a propriedade que tem uma reta x, nesse mesmo plano, de ser diferente de s e perpendicular a r. Por outro lado, seja Q a propriedade de uma reta x (ainda no plano Π) ser paralela a s. Então P', negação de P, é a propriedade de uma reta em Π coincidir com s ou não ser perpendicular a r. A negação de Q é a propriedade Q' que tem uma reta do plano Π de não ser paralela a s.

A implicação $P \Rightarrow Q$ se lê, em linguagem comum, assim: se duas retas distintas (s e x) são perpendiculares a uma terceira (a saber, r) então elas (s e x) são paralelas.

A contrapositiva $Q' \Rightarrow P'$ significa: se duas retas distintas não são paralelas então elas não são perpendiculares a uma terceira.

(Nos dois parágrafos acima estamos tratando de retas do mesmo plano.)

Acontece que é mais fácil (e mais natural) provar a implicação $Q' \Rightarrow P'$ do que $P \Rightarrow Q$. Noutras palavras, prova-se que $P \Rightarrow Q$ por absurdo. O raciocínio é bem simples: se as retas distintas s e x não são paralelas elas têm um ponto A em comum. Então, como é única a perpendicular s à reta r pelo ponto A, segue-se que x não é perpendicular a r.

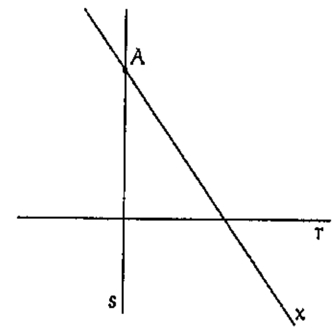


Figura 1.1

Observação:

Para provar que duas retas são paralelas, em geral se usa a demonstração por absurdo pois a definição de retas paralelas é baseada numa negação. (Retas paralelas são retas coplanares que *não* possuem pontos em comum.)

Observemos que se U é o universo então $U^c = \varnothing$ e $\varnothing^c = U$.

Recomendação:

8. Muitas vezes (principalmente nos raciocínios por absurdo) é necessário negar uma implicação $P \Rightarrow Q$. É preciso ter cuidado ao fazer isto. A negação de "todo homem é mortal" não é "nenhum homem é mortal" mas "existe (pelo menos) um homem imortal". Mais geralmente, negar $P \Rightarrow Q$ significa admitir que existe (pelo menos) um objeto que tem a propriedade P mas não tem a propriedade Q. Isto é bem diferente de admitir que nenhum objeto com propriedade P tem também propriedade Q. Por exemplo, se P é a propriedade que tem um triângulo de ser isósceles e Q a propriedade de ser equilátero, a implicação $P \Rightarrow Q$ significaria que todo triângulo isósceles é equilátero (o que é falso). A negação de $P \Rightarrow Q$ é a afirmação de que existe (pelo menos) um triângulo isósceles não-equilátero.

Neste contexto, convém fazer uma distinção cuidadosa entre a ideia matemática de *negação* e a noção (não-matemática) de *contrário*, ou oposto.

Se um conceito é expresso por uma palavra, o conceito contrário é expresso pelo antônimo daquela palavra. Por exemplo, o contrário de gigantesco é minúsculo, mas a negação de gigantesco inclui outras gradações de tamanho além de minúsculo.

1.4 Reunião e Interseção

Dados os conjuntos A e B, a *reunião* $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B, enquanto que a *interseção* $A \cap B$ é o conjunto dos objetos que são ao mesmo tempo elementos de A e de B. Portanto se consideramos as afirmações

$$x \in A, \quad x \in B,$$

veremos que $x \in A \cup B$ quando *pelo menos uma* dessas afirmações for verdadeira e, por outro lado, $x \in A \cap B$ quando *ambas* as afirmações acima forem verdadeiras.

Mais concisamente:

$$x \in A \cup B \text{ significa “} x \in A \text{ ou } x \in B \text{”}$$
$$x \in A \cap B \text{ significa “} x \in A \text{ e } x \in B \text{”}$$

Nota-se, deste modo, que as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ entre conjuntos constituem a contrapartida matemática dos conectivos lógicos “ou” e “e”. Assim, quando o conjunto A é formado pelos elementos que gozam da propriedade P e B pelos que gozam da propriedade Q então a propriedade que define o conjunto $A \cup B$ é “P ou Q” e o conjunto $A \cap B$ é definido pela propriedade “P e Q”.

Por exemplo, convencionemos dizer que um número x goza da propriedade P quando valer a igualdade

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Digamos ainda que x tem a propriedade Q quando for

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

O conjunto dos números que possuem a propriedade P é $A = \{1, 2\}$ e o conjunto dos números que gozam de Q é $B = \{2, 3\}$. Assim, a afirmação

$$\text{“} x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{”}$$

equivale a

$$\text{“} x \in \{1, 2, 3\} \text{”}$$

e a afirmação

$$\text{“} x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ e } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{”}$$

equivale a

$$\text{“} x \in \{2\}, \text{ isto é, } x = 2 \text{”}$$

Noutras palavras,

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \text{ e } A \cap B = \{2\}.$$

É importante ressaltar que a palavra “ou” em Matemática tem um significado específico um tanto diferente daquele que lhe é atribuído na linguagem comum. No dia-a-dia, “ou” quase sempre liga duas alternativas incompatíveis (“vamos de ônibus ou de trem?”). Em Matemática, a afirmação “P ou Q” significa que pelo menos uma das alternativas P ou Q é válida, podendo perfeitamente ocorrer que ambas sejam. Por exemplo, é correta a afirmação “todo número inteiro é maior do que 10 ou menor do que 20”. Noutras palavras, se

$$A = \{x \in \mathbb{Z}; x > 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}; x < 20\}$$

então $A \cup B = \mathbb{Z}$.

A diferença entre o uso comum e o uso matemático do conectivo “ou” é ilustrada pela anedota do obstetra que também era matemático. Ao sair da sala onde acabara de realizar um parto, foi abordado pelo pai da criança, que lhe perguntou: 'Foi menino ou menina, doutor?". Resposta do médico: "Sim". (Com efeito se A é o conjunto das meninas, B o conjunto dos meninos e x o recém-nascido, certamente tem-se $x \in A \cup B$.)

As operações de reunião e intersecção são obviamente comutativas:

$$A \cup B = B \cup A \text{ e } A \cap B = B \cap A$$

e associativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Além disso, cada uma delas é distributiva em relação à outra:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Estas igualdades, que podem ser verificadas mediante a consideração dos casos possíveis, constituem, na realidade, regras que regem o uso combinado dos conectivos lógicos "ou" e "e".

A conexão entre as operações $\cup$, $\cap$ e a relação de inclusão $\subset$ é dada pelas seguintes equivalências:

$$A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A.$$

Além disso $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$ e $A \cap C \subset B \cap C$ para todo C. E, finalmente, se A e B são subconjuntos do universo U, tem-se:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ e } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Estas relações, atribuídas ao matemático inglês Augustus de Morgan, significam que a negação de "P ou Q" é "nem P nem Q" e a negação de "P e Q" é "não P ou não Q".

1.5 Comentário Sobre a Noção de Igualdade

Uma coisa só é igual a si própria.

Quando se escreve $a = b$, isto significa que a e b são símbolos usados para designar o mesmo objeto.

Por exemplo, se a é a reta perpendicular ao segmento AB, levantada a partir do seu ponto médio e b é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de A e B então $a = b$.

Em Geometria, às vezes ainda se usam expressões como "os ângulos α e β são iguais" ou "os triângulos ABC e $A'B'C'$ são iguais" para significar que são figuras que podem ser superpostas exatamente uma sobre a outra. A rigor, porém, esta terminologia é inadequada. Duas figuras geométricas que coincidem por superposição devem ser chamadas *congruentes*.

Talvez valha a pena observar que a palavra "igual" em Geometria já foi usada num sentido até bem mais amplo. Euclides, que viveu há 2300 anos, chamava "iguais" a dois segmentos de reta com o mesmo comprimento, a dois polígonos com a mesma área e a dois sólidos com o mesmo volume.

Na linguagem corrente, às vezes se diz que duas pessoas ou objetos são iguais quando um certo atributo, ao qual se refere o discurso naquele momento, é possuído igualmente pelas pessoas ou objetos em questão. Assim, por exemplo, quando dizemos que "todos são iguais perante a lei", isto significa que dois cidadãos quaisquer têm os mesmos direitos e deveres legais.

A relação "a é igual a b", que se escreve $a = b$, goza das seguintes propriedades:

Reflexividade: $a = a$;

Simetria: se $a = b$ então $b = a$;

Transitividade: se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$.

Diante da simetria, a transitividade também se exprime assim: se $a = b$ e $c = b$ então $a = c$. Em palavras: dois objetos (a e c) iguais a um terceiro (b) são iguais entre si. Formulada deste modo, esta propriedade era uma das noções comuns (ou axiomas) que Euclides enunciou nas primeiras páginas do seu famoso livro "Os Elementos".

1.6 Recomendações Gerais

A adoção da linguagem e da notação de conjuntos em Matemática só se tornou uma prática universal a partir da terceira ou quarta década do século vinte. Esse uso, responsável pelos elevados graus de precisão, generalidade e clareza nos enunciados, raciocínios e definições, provocou uma grande revolução nos métodos, no alcance e na profundidade dos resultados matemáticos. No final do século 19, muitos matemáticos ilustres viam com séria desconfiança as novas ideias lançadas nos trabalhos pioneiros de G. Cantor. Mas, lenta e seguramente, esse ponto de vista se impôs e, no dizer de D. Hilbert, com sua extraordinária autoridade, "ninguém nos expulsará desse paraíso que Cantor nos doou".

Portanto, se queremos iniciar os jovens em Matemática, é necessário que os familiarizemos com os rudimentos da linguagem e da notação dos conjuntos. Isto, inclusive, vai facilitar nosso próprio trabalho, pois a precisão dos conceitos é uma ajuda indispensável para a clareza das ideias. Mas, na sala de aula, há alguns cuidados a tomar. O principal deles refere-se ao comedimento, ao equilíbrio, à moderação. Isto consiste em evitar o pedantismo e os exageros que conduziram ao descrédito da onda de "Matemática Moderna". Não convém insistir em questões do tipo $\{\varnothing\} \neq \{\{\varnothing\}\}$ ou mesmo naquele exemplo $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ dado acima.

Procure, sempre que possível, ilustrar seus conceitos com exemplos de conjuntos dentro da Matemática. Além de contribuir para implantar a linguagem de conjuntos, este procedimento pode também ajudar a relembrar, ou até mesmo aprender, fatos interessantes sobre Geometria, Aritmética, etc.

Seja cuidadoso, a fim de evitar cometer erros. A autocrítica é o maior aliado do bom professor. Em cada aula, trate a si mesmo como um aluno cujo trabalho está sendo examinado. Pense antes no que vai dizer mas critique-se também depois: será que falei bobagem? Se achar que falou, não hesite em corrigir-se em público. Longe de desprestigiar, esse hábito fortalecerá a confiança dos alunos no seu mestre.

Esteja atento também à correção gramatical. Linguagem correta é essencial para a limpidez do raciocínio. Muitos dos nossos colegas professores de Matemática, até mesmo autores de livros, são um tanto descuidados a esse respeito. Dizem, por exemplo que "a reta r intercepta o plano α no ponto P", quando deveriam dizer intersecta (ou interseta) já que o ponto P é a interseção (ou intersecção) mas não a interceptação de r com α.

Eis aqui outros erros comuns de linguagem que devem ser evitados: "Maior ou igual a". O correto é: "maior do que ou igual a". (Tente dizer "igual ou maior a" e veja como soa mal.)

"Euclideano". O correto é "euclidiano".

"Assumir", no lugar de "supor" (vamos assumir que as retas r e s sejam paralelas). Isto é correto em inglês mas não em português.

Não diga "completude", diga "completeza". (Belo $\rightarrow$ beleza; rico $\rightarrow$ riqueza; nobre $\rightarrow$ nobreza; completo $\rightarrow$ completeza.)

Não diga "Espaço de tempo". Espaço e tempo são conceitos físicos fundamentais e independentes. Não se deve misturá-los. Diga "intervalo de tempo".

1.7 Exercícios

1. Sejam P_1, P_2, Q_1, Q_2 propriedades referentes a elementos de um conjunto-universo U. Suponha que P_1 e P_2 esgotam todos os casos possíveis (ou seja, um elemento qualquer de U ou tem a propriedade P_1 ou tem P_2). Suponha ainda que Q_1 e Q_2 são incompatíveis (isto é, excluem-se mutuamente). Suponha, finalmente, que $P_1 \Rightarrow Q_1$ e $P_2 \Rightarrow Q_2$. Prove que valem as recíprocas: $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$.

2. Enquadre no contexto do exercício anterior o seguinte fato geométrico: *Duas oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular são iguais. Se se afastam desigualmente então são desiguais e a maior é a que mais se afasta.*

3. Sejam X_1, X_2, Y_1, Y_2 subconjuntos do conjunto-universo U. Suponha que $X_1 \cap X_2 = U$ e $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, que $X_1 \subset Y_1$ e que $X_2 \subset Y_2$. Prove que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

4. Compare o exercício anterior com o primeiro em termos de clareza e simplicidade dos enunciados. Mostre que qualquer um deles pode ser resolvido usando o outro. Estabeleça resultados análogos com n propriedades ou n subconjuntos em vez de 2. Veja no livro "Coordenadas no Espaço", (Coleção do Professor de Matemática, SBM) ao final da seção 12 uma utilização deste fato com $n = 8$.

5. Ainda no tema do primeiro exercício, seria válido substituir as implicações $P_1 \Rightarrow Q_1$ e $P_2 \Rightarrow Q_2$ na hipóteses por suas recíprocas $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$?

6. Escreva as implicações lógicas que correspondem à resolução da equação $\sqrt{x} + 2 = 2$, veja quais são reversíveis e explique o aparecimento de raízes estranhas. Faça o mesmo com a equação $\sqrt{x} + 3 = x$

7. Mostre que, para todo $m > 0$, a equação $\sqrt{x} + m = x$ tem exatamente uma raiz.

8. Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas:

$$\begin{aligned} x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2\cdot 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 1. \end{aligned}$$

Conclusão(?): $x = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Onde está o erro?

9. As raízes do polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ são 1, 2 e 3. Substitua, nesse polinômio, o termo $11x$ por $11 \times 2 = 22$, obtendo então $x^3 - 6x^2 + 16$, que ainda tem 2 como raiz mas não se anula para $x = 1$ nem $x = 3$. Enuncie um resultado geral que explique este fato e o relacione com o exercício anterior.

10. Expressões tais como "para todo" e "qualquer que seja" são chamadas de quantificadores e aparecem em sentenças dos tipos:

(1) "Para todo x, é satisfeita a condição $P(x)$"

(2) "Existe algum x que satisfaz a condição $P(x)$", onde $P(x)$ é uma condição envolvendo a variável x.

a) Sendo A o conjunto de todos os objetos x (de um certo conjunto universo U) que satisfazem a condição $P(x)$, escreva as sentenças (1) e (2) acima, usando a linguagem de conjuntos.

b) Quais são as negações de (1) e (2)? Escreva cada uma destas negações usando conjuntos e compare com as sentenças obtidas em a).

c) Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa e forme sua negação:

- Existe um número real x tal que $x^2 = -1$.
- Para todo número inteiro n, vale $n^2 > n$.
- Para todo número real x, tem-se $x > 1$ ou $x^2 < 1$.
- Para todo número real x existe um número natural n tal que $n > x$.
- Existe um número natural n tal que, para todo número real x, tem-se $n > x$.

11. Considere os conjuntos abaixo:

F = conjunto de todos os filósofos
M = conjunto de todos os matemáticos
C = conjunto de todos os cientistas
P = conjunto de todos os professores

a) Exprima cada uma das afirmativas abaixo usando a linguagem de conjuntos:

1) Todos os matemáticos são cientistas.
2) Alguns matemáticos são professores.
3) Alguns cientistas são filósofos.

4) Todos os filósofos são cientistas ou professores.
5) Nem todo professor é cientista.
b) Faça o mesmo com as afirmativas abaixo:
6) Alguns matemáticos são filósofos.
7) Nem todo filósofo é cientista.
8) Alguns filósofos são professores.
9) Se um filósofo não é matemático, ele é professor.
10) Alguns filósofos são matemáticos.
c) Tomando as cinco primeiras afirmativas como hipóteses, verifique quais das afirmativas do segundo grupo são necessariamente verdadeiras.

12. O artigo 34 da Constituição Brasileira de 1988 diz o seguinte:
"A União não intervirá nos Estados nem no Distrito Federal, exceto para:
I. Manter a integridade nacional;
II. Repelir invasão estrangeira ou de unidade da Federação em outra"
III. ...;
a) Suponhamos que o estado do Rio de Janeiro seja invadido por tropas do estado de São Paulo. O texto acima obriga a União a intervir no estado? Na sua opinião, qual era a intenção dos legisladores nesse caso?
b) Reescreva o texto do artigo 34 de modo a torná-lo mais preciso.

13. Prove que $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$.

14. Prove que, para x. y, k inteiros, tem-se $x + 4y = 13k \Leftrightarrow 4x + 3y = 13(4k - y)$. Conclua que $4x + 3y$ e $x + 4y$ são divisíveis por 13 para os mesmos valores inteiros de x e y.

15. O diagrama de Venn para os conjuntos X, Y, Z decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de algumas dessas regiões.
(Por exemplo: $X \cap Y = 1 \cup 2$.)
a) $(X^c \cup Y)^c$; b) $(X^c \cup Y) \cup Z^c$;
c) $(X^c \cap Y) \cup (X \cap Z^c)$; d)$(X \cup Y)^c \cap Z$.

16. Exprimindo cada membro como reunião de regiões numeradas, prove as igualdades:
a) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
b) $X \cup (Y \cap Z)^c = X \cup Y^c \cup Z^c$.

17. Sejam A, B e C conjuntos. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

18. A diferença entre conjuntos é definida por $A - B = \{x | x \in A$ e $x \notin B\}$. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $A - (B - C) = (A - B) - C$.

19. Prove que se um quadrado perfeito é par então sua raiz quadrada é par e que se um quadrado perfeito é ímpar então sua raiz quadrada é ímpar.

20. Prove o teorema de Cantor: se A é um conjunto e $P(A)$ é o conjunto das partes de A, não existe uma função $f : A \to P(A)$ que seja sobrejetiva.
Sugestão: Suponha que exista uma tal função f e considere $X = \{x \in A : x \notin f(x)\}$.