TEOREMAS DO TIPO BANACH-STONE PARA ÁLGEBRAS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS EM ESPAÇOS DE DIMENSÃO INFINITA

Daniela Mariz Silva Vieira

Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui

Este trabalho recebeu apoio financeiro da FAPESP

Campinas, 12 de julho de 2004

dedicado à minha avó

Guiomar Matos da Silva

(em memória)

Agradecimentos

... ao meu orientador Jorge Mujica.

... à minha orientadora de mestrado Mary Lilian Lourenço.

... aos professores Mário Matos, Luiza Amália Moraes, Raymundo Alencar, Sueli Roversi, Ary Chiacchio e Geraldo Botelho.

... aos professores Domingo García, Manuel Maestre, Seán Dineen, Christopher Boyd, José Ansemil e Socorro Ponte.

... ao professor Marco Antonio Teixeira.

... ao funcionários da Secretaria de Pós Graduação, Tânia, Cidinha e Edinaldo.

... a Juan Francisco.

... aos meus amigos.

... e à minha família.

A autora agradece à FAPESP o apoio financeiro.

Ninguém sabe

mas você foi o escolhido.

O seu amor é único,

o seu amor é um homem sentado

pensando em seu cachorro morto.

O seu amor é a última orquídea do inverno

é pássaro pedindo água

pupila adormecida.

E você nem se importa

pelo fato de ser melhor .

O seu nariz é grego,

você é tão bonito e nem liga.

É verdade que você tem sofrido muito mas isso faz parte.

Quando você anda na rua as árvores florescem.

Você é meu amigo.

Você é

eu.

(Ninguém Sabe, Renata Pallottini)

Resumo

Neste trabalho são provados teoremas do tipo Banach-Stone para diversas álgebras topológicas de funções holomorfas em espaços de dimensão infinita. Mais especificamente, se E e F são espaços de Fréchet, onde um deles é separável e tem a propriedade da aproximação limitada e $U \subset E$, $V \subset F$ são domínios de holomorfia conexos, provamos que os domínios U e V são biholomorficamente equivalentes se e somente se as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$, τ_ω ou τ_δ. São apresentados dois exemplos: um onde o teorema falha se apenas um dos abertos é um domínio de holomorfia, e outro onde os resultados não são válidos se um dos espaços não é um espaço de Fréchet. Também são apresentados resultados similares para álgebras de funções holomorfas de tipo limitado. Com efeito, se E e F são espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson, e $U \subset E$, $V \subset F$ são abertos convexos e equilibrados, então existe um tipo especial de aplicação biholomorfa entre U e V se e somente se as álgebras de Fréchet $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas. Finalmente são demonstrados teoremas análogos para álgebras topológicas de germes holomorfos, a saber: se E e F são espaços de Banach do tipo Tsirelson-James, $K \subset E$ e $L \subset F$ são subconjuntos compactos convexos e equilibrados, então existe uma aplicação biholomorfa de uma vizinhança aberta de K sobre uma vizinhança aberta de L, que leva K em L, se e somente se as álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Abstract

We derive Banach-Stone theorems for several topological algebras of holomorphic functions on infinite dimensional spaces. To be more specific, if E and F are Fréchet spaces, one of them separable with the bounded approximation property and $U \subset E$, $V \subset F$ are connected domains of holomorphy, we prove that U and V are biholomorphically equivalent if and only if the algebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ and $(\mathcal{H}(V), \tau)$ are topologically isomorphic, for $\tau = \tau_0$, τ_ω or τ_δ. We present two examples: one in which the theorem fails if only one of the open subsets is a domain of holomorphy, and another one in which the results are not valid if one of the spaces is not a Fréchet space. We also present similar results for algebras of holomorphic functions of bounded type. In fact, if E and F are reflexive Banach spaces, one of them a Tsirelson-like space, and $U \subset E$, $V \subset F$ are absolutelly convex open subsets, then there exists a suitable biholomorphic mapping between U and V if and only if the Fréchet algebras $\mathcal{H}_b(U)$ and $\mathcal{H}_b(V)$ are topologically isomorphic. Finally we give analogous theorems for topological algebras of germs of holomorphic functions as follows: if E and F are Tsirelson-James-like spaces, $K \subset E$ and $L \subset F$ are absolutely convex compact subsets, then there exists a biholomorphic mapping from an open neighborhood of K onto an open neighborhood of L, which maps K onto L, if and only if the algebras $\mathcal{H}(K)$ and $\mathcal{H}(L)$ are topologically isomorphic.

Sumário

Introdução

Em 1932, S. Banach provou em [6] que dois espaços métricos compactos X e Y são homeomorfos se e somente se as álgebras de Banach $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$ são isometricamente isomorfas. M. H. Stone, em 1937, generalizou em [62] este resultado para espaços topológicos Hausdorff compactos arbitrários, resultado que ficou então conhecido como Teorema de Banach-Stone.

Neste trabalho apresentamos resultados similares para diversas álgebras topológicas de funções holomorfas. Mais especificamente, sejam E e F espaços localmente convexos; $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos. Consideremos $\mathcal{H}(U)$ a álgebra de todas as funções holomorfas $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, e da mesma forma $\mathcal{H}(V)$, e dotemos $\mathcal{H}(U)$ e $\mathcal{H}(V)$ de uma de suas topologias naturais $\tau = \tau_0, \tau_\omega, \tau_\delta$. Nesta tese provamos, sob certas condições em E, F, U e V, que os abertos U e V são biholomorficamente equivalentes (isto é, existe uma aplicação bijetiva e holomorfa entre U e V cuja inversa é holomorfa) se e somente se as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas.

A seguir explicamos com mais detalhe o que é apresentado em cada capítulo deste texto.

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados em espaços de Banach e espaços localmente convexos, polinômios, funções holomorfas e germes de funções holomorfas, que serão necessários para os resultados principais desta tese.

No Capítulo 2, Seção 2.2, provamos que se E e F são espaços de Fréchet, um deles com a propriedade da aproximação, e U e V são convexos e equilibrados, então U e V são biholomorficamente equivalentes se e somente se $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são álgebras topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$ ou τ_ω. Se E ou F é separável e tem a propriedade da aproximação, temos o mesmo resultado para a topologia τ_δ. Apresentamos nesta seção um exemplo onde o teorema principal falha, quando um dos espaços em questão não é um espaço de Fréchet.

Na Seção 2.3, apresentamos resultados similares para abertos polinomialmente convexos. Para $\tau = \tau_0$ e τ_ω o resultado é válido para abertos polinomialmente convexos em espaços de Fréchet, um deles com a propriedade da aproximação. Para a topologia τ_δ, um dos espaços E ou F precisa ser separável e ter a propriedade da aproximação limitada, e os abertos U e V têm que ser conexos e polinomialmente convexos.

Na Seção 2.4, apresentamos resultados similares para domínios de holomorfia. Mais especificamente, se E e F são espaços de Fréchet, um deles separável com a propriedade da aproximação limitada, e U e V são domínios de holomorfia conexos, então U e V são biholomorficamente equivalentes se e só se $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são álgebras topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ e τ_δ.

Nesta seção mostramos que a hipótese de ambos os abertos serem domínios de holomorfia não pode ser omitida. Mais especificamente demonstramos que em qualquer espaço de Banach é possível construir dois abertos U e V, sendo que um deles não é um domínio de holomorfia, tal que as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas para $\tau = \tau_0, \tau_\omega, \tau_\delta$, mas U e V não são biholomorficamente equivalentes.

O Capítulo 3 está dedicado ao estudo das álgebras de funções holomorfas de tipo limitado. Começamos apresentando na Seção 3.1 uma caracterização de quais aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ definem um operador de composição entre as álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$. Utilizando esse resultado obtemos um teorema do tipo Banach-Stone para tais álgebras. Mais especificamente, provamos que se E e F são espaços de Banach reflexivos, um deles um espaço de Tsirelson, e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ são subconjuntos abertos convexos e equilibrados, então existe um tipo especial de aplicação biholomorfa entre U e V se e somente se as álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas. Ainda nesta Seção apresentamos um interessante corolário de extensão, onde provamos sob as mesmas hipóteses, que um isomorfismo topológico entre $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ estende-se a um isomorfismo topológico entre

$(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$, para $\tau = \tau_0$, τ_ω ou τ_δ.

No último capítulo desta tese, Capítulo 4, apresentamos teoremas de Banach Stone para álgebras de germes holomorfos. Na Seção 4.1 provamos que se K e L são subconjuntos compactos, convexos e equilibrados em espaços de Tsirelson, então K e L são biholomorficamente equivalentes (ou seja, existe uma aplicação biholomorfa entre uma vizinhança de K e um vizinhança de L, que leva K em L) se e somente se $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são álgebras topologicamente isomorfas. Obtemos ainda nesta seção um resultado mais forte em dimensão finita, para subconjuntos compactos que são Oka-Weil compactos e conexos.

Na Seção 4.2, provamos um resultado similar quando $K \subset E$ e $L \subset F$ são subconjuntos compactos convexos e equilibrados em espaços de Tsirelson-James. As técnicas de demonstração nas duas seções são bastantes diferentes, uma vez que o espaço de Tsirelson é reflexivo, o que simplifica bastante as demonstrações. Terminamos o capítulo com algumas investigações acerca das relações entre a álgebra de germes de funções holomorfas em subconjuntos abertos de um espaço de Banach E que contém um compacto $K \subset E$; e a álgebra de germes de funções holomorfas em abertos de E'' que contém o mesmo compacto K.

Diversos do tipo Banach-Stone têm sido obtidos recentemente por vários autores. Encontramos teoremas do tipo Banach-Stone em [16] para diversas álgebras de funções holomorfas. Em [14] são apresentados teoremas do tipo Banach-Stone para espaços de polinômios homogêneos. Para álgebras de funções $\mathbb{R}$-diferenciáveis citamos [30, 31]. Com relação a álgebras de germes holomorfos, citamos o trabalho [56], feito somente para dimensão finita.

Versões preliminares dos resultados apresentados nesta tese podem ser encontrados em [29, 66, 67, 68, 69, 70].

Capítulo 1

Preliminares

A mente que se abre a uma nova idéia, jamais voltará ao seu tamanho original. (Albert Einstein)

1.1 Notação

Utilizamos a seguinte notação:

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	o corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	o corpo dos números complexos
E, F	espaços de Banach ou espaços localmente convexos Hausdorff sobre $\mathbb{C}$
E^n	o produto $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n-\text{vezes}}$
x^n	a n-upla $(\underbrace{x, \cdots, x}_{n-\text{vezes}})$
$cs(E)$	o conjunto das seminormas contínuas em E
$\mathcal{L}(E;F)$	o espaço das aplicações lineares e contínuas de E em F
E'	$\mathcal{L}(E;\mathbb{C})$
$J : E \longrightarrow E''$	a inclusão canônica de E em E''
$\mathcal{L}_f(E;F)$	o espaço de todos os elementos de $\mathcal{L}(E;F)$ que têm posto finito

$\mathcal{P}(^mE;F)$	o espaço de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de E em F
$\mathcal{P}_f(^mE;F)$	o espaço de todos os polinômios m-homogêneos de tipo finito contínuos de E em F
$\mathcal{P}(E;F)$	o espaço de todos os polinômios contínuos de E em F
$\mathcal{P}(^mE)$	$\mathcal{P}(^mE;\mathbb{C})$
$\mathcal{P}_f(^mE)$	$\mathcal{P}_f(^mE;\mathbb{C})$
$\mathcal{P}(E)$	$\mathcal{P}(E;\mathbb{C})$
$B_E(x,r)$	a bola aberta em E com centro em x e raio r
$\overline{B_E}(x,r)$	a bola fechada em E com centro em x e raio r
U	um subconjunto aberto não vazio de E
$d_U(x)$	a distância de $x \in U$ à fronteira de U
$d_U(A)$	a distância de $A \subseteq U$ à fronteira de U
$\mathcal{H}(U;F)$	o espaço das aplicações holomorfas de U em F
$\mathcal{H}(U)$	$\mathcal{H}(U;\mathbb{C})$
$\Re f$	a parte real de $f \in \mathcal{H}(U)$
$\Im f$	a parte imaginária de $f \in \mathcal{H}(U)$
$\mathcal{H}_b(U;F)$	o espaço das aplicações holomorfas de tipo limitado de U em F
$\mathcal{H}_b(U)$	$\mathcal{H}_b(U;\mathbb{C})$
$\mathcal{H}^\infty(U;F)$	o espaço das aplicações holomorfas de U em F que são limitadas em U
$\mathcal{H}^\infty(U)$	$\mathcal{H}^\infty(U;\mathbb{C})$
$\mathcal{H}_{wu}(U;F)$	o espaço das aplicações holomorfas de U em F que são w-uniformemente contínuas nos subconjuntos U-limitados
$\mathcal{H}_{wu}(U)$	$\mathcal{H}_{wu}(U;\mathbb{C})$
K	um subconjunto compacto de E
$\mathcal{H}(K;F)$	o espaço dos germes holomorfos em K com valores em F
$\mathcal{H}(K)$	$\mathcal{H}(K;\mathbb{C})$

$\mathcal{P}s(U)$	o espaço das funções plurisubharmônicas em U
$\mathcal{P}sc(U)$	o espaço das funções plurisubharmônicas e contínuas em U
$\mathcal{F}$	uma família de funções de U em $\mathbb{C}$
$\widehat{A}_{\mathcal{F}}$	o conjunto $\{x \in U \, : \, \lvert f(x)\rvert \leq \sup_A \lvert f\rvert, \text{ para toda } f \in \mathcal{F}\}$

1.2 Preliminares sobre espaços de Banach e espaços localmente convexos

Todos os espaços localmente convexos em questão são Hausdorff.

Seja E um espaço localmente convexo. Denotamos por w a topologia fraca em E, $\sigma(E, E')$. Por w^* entendemos a topologia fraca estrela em E', $\sigma(E', E)$. Seja F um espaço localmente convexo tal que (E, F) é um sistema dual. Então $\sigma(E, F)$ denota a topologia fraca em E com respeito à dualidade (E, F). A *topologia de Mackey* em E é a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos convexos, equilibrados e $\sigma(F, E)$-compactos de F. A topologia de Mackey em E será denotada por $\tau(E, F)$.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Mackey-Arens, [36], 3-§5, Teorema 1)**.** *Sejam (E, F) um sistema dual e τ uma topologia localmente convexa em E. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) $\sigma(E, F) \leq \tau \leq \tau(E, F)$.

(2) $(E, \tau)' = F$.

Dizemos que uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E; E)$ é *equicontínua* se para cada $\varepsilon > 0$, $a \in E$ e $p \in cs(E)$ existe uma vizinhança V de a em E tal que

$$p(T(x) - T(a)) \leq \varepsilon, \text{ para todos } x \in V,\, T \in \mathcal{F}.$$

Definições 1.2.2 ([25], Definição 2.7)**.** *Seja E um espaço localmente convexo.*

(1) Dizemos E tem a propriedade da aproximação *se para cada subconjunto compacto K de E, $p \in cs(E)$ e $\varepsilon > 0$, existe um operador de posto finito $T = T_{\varepsilon,K} \in \mathcal{L}(E;E)$ tal que*

$$p(T(x) - x) \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in K.$$

(2) Dizemos E tem a propriedade da aproximação limitada *se a família*

$$\{T_{\varepsilon,K} : \varepsilon > 0 \text{ e } K \text{ é um subconjunto compacto de } E\}$$

obtida no item (1) é um subconjunto equicontínuo de $\mathcal{L}_f(E;E)$.

Proposição 1.2.3. *Se E é um espaço localmente convexo com a propriedade da aproximação (limitada), entao todo subespaço complementado de E tem a propriedade da aproximação (limitada).*

Demonstração: Iremos demonstrar a proposição para a propriedade da aproximação, e observamos que para a propriedade da aproximação limitada os argumentos são similares.

Sejam N um subespaço complementado de E e $P : E \longrightarrow N$ uma projeção contínua tal que $P(x) = x$, para todo $x \in N$. Sejam $K \subset N$ um subconjunto compacto, $q \in cs(N)$ e $\varepsilon > 0$. É claro que $q \circ P$ é um elemento de $cs(E)$, e como E tem a propriedade da aproximação, existe um operador de posto finito $T : E \longrightarrow E$ tal que

$$(q \circ P)(T(x) - x) \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in K$$

Como T é de posto finito, temos que o operador $S = P \circ T|_N : N \longrightarrow N$ também é de posto finito. Logo para todo $x \in K$ segue que

$$q(S(x) - x) = q(P \circ T(x) - P(x)) = q(P(T(x) - x)) = q \circ P(T(x) - x) \leq \varepsilon,$$

e assim N tem a propriedade da aproximação. ∎

A seguinte definição será utilizada no Capítulo 2.

Definição 1.2.4 ([44], Definição 1.1). *Sejam E um espaço vetorial, $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços localmente convexos e $\pi_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha$ uma aplicação de E em E_α, para todo $\alpha \in A$. Chamamos de* topologia projetiva em E com relação à família de aplicações π_α *à topologia mais fraca em E que torna cada π_α contínua.*

As seguintes definições e resultados relativos a limites indutivos de espaços localmente convexos serão utilizadas no Capítulo 4.

Definição 1.2.5 ([44], Definição 1.3). *Sejam E um espaço vetorial, $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços localmente convexos e $i_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$ uma aplicação de E_α em E, para todo $\alpha \in A$. Chamamos de* topologia indutiva em E com relação à família de aplicações i_α *à topologia localmente convexa mais fina em E que torna cada i_α contínua.*

Definição 1.2.6 ([44], Definição 1.4). *Seja E um espaço vetorial que é a união de uma família de espaços localmente convexos $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ dirigida por inclusão. Suponha que cada inclusão $E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$ é contínua, para $\alpha \leq \beta$. Então E, munido da topologia indutiva com relação às inclusões $E_\alpha \hookrightarrow E$ é chamado de* limite indutivo dos subespaços E_α*, e escrevemos*

$$E = \underrightarrow{lim}_{\alpha \in A} E_\alpha.$$

Teorema 1.2.7 ([36], 2-§12, Proposição 1). *Sejam E um espaço vetorial e $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços localmente convexos tais que $E = \underrightarrow{lim}_{\alpha \in A} E_\alpha$. Seja F um espaço localmente convexo. Uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ é contínua se e somente se $T \circ i_\alpha : E_\alpha \longrightarrow F$ é contínua, para todo $\alpha \in A$.*

O próximo teorema é devido a A. Grothendieck ([32, Teorema A] ou [33, Teorema 1]).

Teorema 1.2.8 ([32], Teorema A ou [33], Teorema 1). *Seja F um espaço de Hausdorff localmente convexo que é a união de uma sequência crescente de espaços de Fréchet $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e suponha que cada inclusão $i_n : F_n \longrightarrow F$ é contínua. Seja $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua, onde E é* *um espaço de Fréchet E. Então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma aplicação linear contínua $T_n : E \longrightarrow F_n$ tal que $i_n \circ T_n = T$.*

A demonstração do próximo Lema foi extraída de um curso ministrado por J. Mujica na UNICAMP.

Lema 1.2.9. *Sejam E um espaço localmente convexo e U uma vizinhança aberta, convexa e equilibrada de E. Então*

(1) $\overline{U} = \{x \in E : \lambda x \in U$ para todo $0 \leq \lambda < 1\}$.

(2) $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$.

Demonstração:

(1) Denotemos $\widetilde{U} = \{x \in E : \lambda x \in U$ para todo $0 \leq \lambda < 1\}$. É claro que $\widetilde{U} \subseteq \overline{U}$. Se $x \notin \widetilde{U}$. então existe λ, $0 \leq \lambda < 1$ tal que $\lambda x \notin U$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(\lambda x) = 1$ e $|\varphi(y)| \leq 1$, para todo $y \in U$. Então $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} > 1$ e assim $x \notin \overline{U}$. Logo $\overline{U} \subseteq \widetilde{U}$ e (1) está provado.

(2) É claro que $U \subseteq \overset{\circ}{\overline{U}}$. Por outro lado, se $x \in \overset{\circ}{\overline{U}}$ então existe $\mu > 1$ tal que $\mu x \in \overset{\circ}{\overline{U}} \subseteq \overline{U}$. Por (1), temos que $x = \frac{1}{\mu}\mu x \in U$ e assim $\overset{\circ}{\overline{U}} \subseteq U$. ∎

O conjunto $\widetilde{U}$ é chamado de *fecho algébrico de U*. Esta terminologia foi primeiramente dada por A. Grothendieck em 1954, em [34].

Sejam E um espaço de Banach e $A \subseteq E$ um subconjunto. Denotamos por $\overset{\circ}{\overline{A}}{}^{*}$ o $\|.\|$-interior em E'' do fecho fraco-estrela de A, ou em outras palavras, $\overset{\circ}{\overline{A}}{}^{*} = \mathrm{int}_{\|.\|}\big(\overline{A}^{w^*}\big)$.

Lema 1.2.10. *Sejam E um espaço de Banach e $K \subseteq E$ um subconjunto compacto, convexo e equilibrado. Então $\overset{\circ}{\overline{K + B_E\big(0,r\big)}}{}^{*} = K + B_{E''}\big(0,r\big)$, para todo $r > 0$.*

Demonstração: Denotemos por $U_r = K + B_E\big(0,r\big)$. Por um lado, usando que K é compacto, e portanto w^*-compacto, e aplicando o Teorema de Goldstine, temos que

$$\overline{U_r}^{*} = \overline{K + B_E(0,r)}^{*} = \overline{K}^{*} + \overline{B_E(0,r)}^{*} = K + \overline{B_{E''}(0,r)}^{\|\cdot\|} = \overline{K + B_{E''}(0,r)}^{\|\cdot\|}.$$

Agora segue do Lema 1.2.9 que $\overline{\overset{\circ}{U_r}}^{*} = \overline{\overset{\circ}{K + B_{E''}(0,r)}}^{\|\cdot\|} = K + B_{E''}(0,r)$. ∎

1.3 Preliminares sobre polinômios

Sejam E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Um polinômio m-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é *de tipo finito* se existem $c_1, \cdots, c_n \in F$, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in E'$ tais que P pode ser escrito da forma:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x)^m, \text{ para todo } x \in E.$$

Denotamos por $\mathcal{P}_f(^mE;F)$ o espaço de todos os polinômio m-homogêneos de E em F que são de tipo finito. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{P}_f(^mE)$ ao invés de $\mathcal{P}_f(^mE;\mathbb{C})$.

Proposição 1.3.1. *Seja E um espaço de Banach tal que $\mathcal{P}_f(^mE)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^mE)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então cada subespaço complementado de E tem a mesma propriedade.*

Demonstração: Sejam $m \in \mathbb{N}$, N um subespaço complementado de E e $T : E \longrightarrow N$ uma projeção contínua tal que $T(x) = x$, para todo $x \in N$. Seja $P \in \mathcal{P}(^mN)$. Então é claro que $P \circ T \in \mathcal{P}(^mE)$. Por hipótese, existe uma sequência de polinômios de tipo finito $P_j \in \mathcal{P}_f(^mE)$ que converge para $P \circ T$ uniformemente sobre os limitados de E, e em particular sobre todos os limitados de N. Como $P_j|_N \in \mathcal{P}_f(^mN)$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $T(N) = N$, temos que $P_j|_N \longrightarrow P$ uniformemente sobre os limitados de N. ∎

Em geral, E não é um subespaço complementado de E''. No entanto temos a seguinte Proposição.

Proposição 1.3.2. *Seja E um espaço de Banach tal que $\mathcal{P}_f(^mE'')$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^mE'')$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{P}_f(^mE)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^mE)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Fixemos $m \in \mathbb{N}$. Vamos provar inicialmente que se $Q \in \mathcal{P}_f(^mE'')$ então $Q \circ J \in \mathcal{P}_f(^mE)$, onde J denota a inclusão canônica $J : E \longrightarrow E''$. Para tal propósito, seja

$Q \in \mathcal{P}_f(^m E'')$. Então existem $x_1''', \cdots, x_n''' \in E'''$ tais que

$$Q(x'') = \sum_{j=1}^{n} x_j'''(x'')^m, \text{ para todo } x'' \in E''.$$

Por outro lado, temos que $x_j''' \circ J = J'(x_j''') \in E'$, para todo $j = 1, \cdots, n$, onde $J' : E''' \longrightarrow E'$ denota a transposta de J. Portanto

$$Q \circ J = \sum_{j=1}^{n} (J'(x_j'''))^m \in \mathcal{P}_f(^m E).$$

Consideremos agora $P \in \mathcal{P}(^n E)$ e $\overline{P} \in \mathcal{P}(^n E'')$ a extensão de Aron-Berner de P, ([3] ou ([25, Proposição 1.53]). Por hipótese existe uma sequência de polinômios de tipo finito $P_j \in \mathcal{P}_f(^m E'')$ que converge para $\overline{P}$ uniformemente sobre os limitados de E'', e em particular sobre todos os limitados de E. Isto implica que a sequência $(P_j \circ J)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(^m E)$ converge para $\overline{P} \circ J = P$ uniformente sobre os limitados de E, ou em outras palavras, $\mathcal{P}_f(^m E)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^m E)$. ∎

A recíproca da Proposição 1.3.2 não é verdade, pois $\mathcal{P}_f(^m c_0)$ é denso em norma em $\mathcal{P}(^m c_0)$ ([13, Observação 5.9.2 (b)]), mas ℓ_∞ não possui esta propriedade.

Proposição 1.3.3. *Sejam E, F e G espaços de Banach, $P \in \mathcal{P}(E; F)$, $Q \in \mathcal{P}(F; G)$. Então $Q \circ P \in \mathcal{P}(E; G)$.*

Demonstração: Temos que

$$P = P_1 + \cdots + P_k, \text{ onde } P_i \in \mathcal{P}(^{n_i} E; F), \text{ para } i = 1, \cdots, k,$$

e da mesma forma

$$Q = Q_1 + \cdots + Q_l, \text{ onde } Q_i \in \mathcal{P}(^{m_i} F; G), \text{ para } i = 1, \cdots, l.$$

Então $Q(P(x)) = Q_1(P(x)) + \cdots + Q_l(P(x))$, para todo $x \in E$. É suficiente mostrar que $Q_1 \circ P$ é um polinômio, e depois aplicar os mesmos argumentos para $Q_j \circ P$, para $j = 2, \cdots, l$. Vamos inicialmente supor que $k = 2$, ou seja, que P é uma soma de dois polinômios homogêneos. Sejam B a aplicação m_1-linear simétrica associada a Q_1, e A_i uma aplicação n_i-linear simétrica associada a

P_i, para $i = 1, 2$. Sem perda de generalidade vamos escrever m ao invés de m_1. Segue da Fórmula Binomial de Newton [48, Corolário 1.9] que para cada $x \in E$:

$$Q_1(P(x)) = Q_1(P_1(x) + P_2(x)) = B(P_1(x) + P_2(x))^m = \tag{1.1}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B(P_1(x)^{m-j} P_2(x)^j) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B(A_1(x^{n_1})^{m-j} A_2(x^{n_2})^j).$$

Basta provar que cada termo da soma acima é um polinômio homogêneo em x. Para tal, sejam $j \in \{0, \cdots, m\}$ fixado e $i = m - j$. Definamos $C_j : E^{in_1+jn_2} \longrightarrow G$ da seguinte maneira:

$$C(x_1^1, \cdots, x_{n_1}^1, x_1^2, \cdots, x_{n_1}^2, \cdots, x_1^i, \cdots, x_{n_1}^i, y_1^1, \cdots, y_{n_2}^1, y_1^2, \cdots, y_{n_2}^2, \cdots, y_1^j, \cdots, y_{n_2}^j) =$$

$$= B\big(A_1(x_1^1, \cdots, x_{n_1}^1), A_1(x_1^2, \cdots, x_{n_1}^2), \cdots, A_1(x_1^i, \cdots, x_{n_1}^i),$$

$$A_2(y_1^1, \cdots, y_{n_2}^1), A_2(y_1^2, \cdots, y_{n_2}^2), \cdots, A_2(y_1^j, \cdots, y_{n_2}^j)\big).$$

Então não é difícil ver que C_j é (in_1+jn_2)-linear, e que C_j aplicada à diagonal de $E^{in_1+jn_2}$ corresponde ao j-ésimo termo da soma (1.1).

Vamos supor agora que $P = P_1 + \cdots + P_k$. Segue da Fórmula de Leibniz [48, Teorema 1.8] que para cada $x \in E$:

$$Q_1(P(x)) = Q_1(P_1(x) + \cdots + P_k(x)) = B(P_1(x) + \cdots + P_k(x))^m = \sum \frac{m!}{\alpha!} B(P_1(x)^{\alpha_1} \cdots P_k(x)^{\alpha_k}),$$

onde a somatória é tomada sobre todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, tais que $\alpha_1 + \cdots \alpha_k = m$. Portanto, seguindo as mesmas idéias da primeira parte desta demonstração, mostramos que cada termo da somatória acima é um polinômio homogêneo, concluindo a demonstração. ∎

1.4 Preliminares sobre funções holomorfas

A seguir definimos aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos, e apresentamos algumas de suas principais propriedades.

Definição 1.4.1 ([8], Definição 18.1). *Sejam E e F espaços localmente convexos e U um subconjunto aberto de E. Uma aplicação $f : U \longrightarrow F$ é* holomorfa ou analítica em *U se para cada $a \in U$ existe uma sequência de polinômios $P^m f(a) \in \mathcal{P}(^m E; F)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, tal que para cada $q \in cs(F)$ existe uma vizinhança aberta V de a em U tal que*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} q(f(x) - \sum_{k=0}^{m} P^k f(a)(x-a)) = 0$$

uniformemente para $x \in V$.

Cada $P^m f(a) \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é chamado de *m-ésimo polinômio homogêneo de Taylor de f em a.* Denotamos por $\mathcal{H}(U; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas de U em F. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}(U)$ ao invés de $\mathcal{H}(U; \mathbb{C})$.

Sejam E, F espaços localmente convexos, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto. Dizemos que uma aplicação $f : U \longrightarrow F$ é *finitamente holomorfa em U* se para todo subespaço $M \subseteq E$ de dimensão finita tal que $U \cap M \neq \emptyset$ a aplicação $f|_{U \cap M} : U \cap M \longrightarrow F$ é holomorfa.

Com a seguinte caracterização fica fácil concluir que a composta de duas aplicações holomorfas é uma aplicação holomorfa.

Proposição 1.4.2 ([8], Proposição 32.1). *Sejam E, F espaços localmente convexos, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto e $f : U \longrightarrow F$ uma aplicação. Então f é holomorfa se e somente se f é contínua e finitamente holomorfa.*

O Lema seguinte segue diretamente da Regra da Cadeia [48, Teorema 13.6], quando E e F são espaços de Banach. Como precisamos deste lema para espaços localmente convexos, apresentamos sua demonstração em detalhes.

Lema 1.4.3. *Sejam E e F espaços localmente convexos Hausdorff, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos de E e F, respectivamente. Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $g \in \mathcal{H}(V, E)$ tais que $g(V) \subseteq U$ e $f \circ g : V \longrightarrow F$ é a inclusão. Então F é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de E. Se $f : U \longrightarrow V$ é bijetiva e $g = f^{-1}$, então E e F são topologicamente isomorfos.*

Demonstração: Sejam $g : V \longrightarrow U$ e $f : U \longrightarrow F$ tais que $f \circ g : V \longrightarrow F$ é a inclusão, ou seja, $f(g(w)) = w$, para todo $w \in V$. Consideremos $b \in V$, $a = g(b) \in U$. Então $f(a) = f(g(b)) = b$. Sejam $P^n = P^n f(a) \in \mathcal{P}(^nE; F)$ e $Q^m = Q^m g(b) \in \mathcal{P}(^mF; E)$ os polinômios da série de Taylor de g em b e de f em a, respectivamente, para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Observamos ainda que $P^0 = f(a)$, $Q^0 = g(b)$, $P^1 \in \mathcal{L}(E; F)$ e que $Q^1 \in \mathcal{L}(F; E)$. Vamos mostrar que $P^1 \circ Q^1 : F \longrightarrow F$ é o operador identidade, e assim concluir que F é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de E. Denotemos

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P^i(x-a) \text{ para todos } x \in E,\, n \in \mathbb{N} \text{ e}$$

$$g_m(y) = \sum_{j=0}^{m} Q^j(y-b), \text{ para todos } y \in F,\, m \in \mathbb{N}.$$

Seja $U_0 \subset E$ uma vizinhança do zero convexa e equilibrada tal que $a + U_0 \subseteq U$. Como $g(b) = a$ e g é contínua, existe $V_0 \subset F$ uma vizinhança do zero convexa e equilibrada tal que $b + V_0 \subseteq V$ e $g(b+t) \in a + \frac{1}{2}U_0$, para todo $t \in V_0$. Segue de [8, Proposição 27.2] que

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre os compactos de } a + U_0 \tag{1.2}$$

e que

$$g_m \longrightarrow g \text{ uniformemente sobre os compactos de } b + V_0. \tag{1.3}$$

Fixemos $t \in V_0$. Vamos mostrar que

$$f_n(g_n(b+\lambda t)) \longrightarrow f(g(b+\lambda t)) \text{ uniformente para } |\lambda| \leq 1.$$

É equivalente provar que para cada $\beta \in cs(F)$:

$$\lim_{n\to\infty} \beta(f_n(g_n(b+\lambda t)) - f(g(b+\lambda t))) = 0, \text{ para todo } |\lambda| \leq 1. \tag{1.4}$$

Para tal, fixemos $\beta \in cs(F)$ e $\varepsilon > 0$. Como $L = \{b + \lambda t \,:\, |\lambda| \leq 1\}$ é um subconjunto compacto de $b + V_0$, segue de (1.3) que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g_m(v) - g(v) \in \frac{1}{2}U_0, \text{ para todos } m \geq n_1 \text{ e } v \in L.$$

Pela construção de V_0, temos que $g(v) \in a + \frac{1}{2}U_0$, para todo $v \in L$. Assim, temos que:

$$g_m(v) \in a + U_0, \text{ para todos } m \geq n_1 \text{ e } v \in L.$$

Considere $K = \{g_m(v) : m \geq n_1, v \in L\} \cup g(L)$. Afirmamos que K é um subconjunto compacto de $a + U_0$. De fato, seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de K, isto é, $K = \{g_m(v) : m \geq n_1, v \in L\} \cup g(L) \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Em particular, temos que $g(L) \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Como $g(L)$ é compacto, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in A$ tais que $g(L) \subset \cup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$. Como $(g_m)_{m \geq n_1}$ converge para g uniformemente sobre L, temos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$, necessariamente maior que n_1, tal que

$$g_m(v) \in \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}, \text{ para todos } m \geq n_2,\ v \in L.$$

Por fim, é claro que os compactos $g_m(L)$, para $m = 1, \cdots, n_2$ estão contidos em um número finito de U_α's. Assim concluímos que K é um subconjunto compacto de $a + U_0$. Agora segue de (1.2) que existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(f_n(u) - f(u)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todos $n \geq n_3$, $u \in K$. Em particular,

$$\beta(f_n(g_m(v)) - f(g_m(v))) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todos } n \geq n_3,\ m \geq n_1,\ v \in L.$$

Como f é contínua e K é compacto, temos que $f|_K : K \longrightarrow F$ é uniformemente contínua. Mais ainda, como $(g_m)_{m \geq n_1}$ converge para g uniformemente sobre L, não é difícil ver que $f \circ g_m$ converge para $f \circ g$, uniformemente sobre L, uma vez que $K = \cup_{m \geq n_1} g_m(L) \cup g(L)$. Ou seja, existe $n_4 \in \mathbb{N}$, necessariamente maior que n_1, tal que

$$\beta(f(g_m(v) - f(g(v))) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todos } m \geq n_4,\ v \in L.$$

Sejam $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ e $n \geq n_0$. Então:

$$\beta(f_n(g_n(v)) - f(g(v))) \leq \beta(f_n(g_n(v)) - f(g_n(v))) + \beta(f(g_n(v)) - f(g(v))) \leq \varepsilon, \text{ uniformemente para } v \in L$$

provando (1.4).

Seja $y \in F$. Vamos calcular $f_n(g_n(y))$. Com efeito, temos que

$$f_n(g_n(y)) = \sum_{i=0}^{n} P^i(g_n(y) - a) = \sum_{i=0}^{n} P^i(g_n(y) - g(b)) = \sum_{i=0}^{n} P^i\Big(\sum_{j=0}^{n} Q^j(y-b) - Q^0\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P^i\Big(\sum_{j=1}^{n} Q^j(y-b)\Big) = P^0 + P^1\Big(\sum_{j=1}^{n} Q^j(y-b)\Big) + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} P^i\Big(\sum_{j=1}^{n} Q^j(y-b)\Big)}_{R_n(y-b)} =$$

$$= P^0+P^1\Big(Q^1(y-b)+\sum_{j=2}^{n} Q^j(y-b)\Big)+R_n(y) = P^0+P^1(Q^1(y-b))+\underbrace{P^1\Big(\sum_{j=2}^{n} Q^j(y-b)\Big) + R_n(y-b)}_{S_n(y-b)} =$$

$$= b + P^1(Q^1(y-b)) + S_n(y-b).$$

Ou seja, $f_n(g_n(y)) = b + P^1(Q^1(y-b)) + S_n(y-b)$, para todo $y \in F$, onde $S_n : F \longrightarrow F$ é uma soma finita de polinômios homogêneos de grau ≥ 2. Em particular, para $t \in V_0$ temos que

$$f_n(g_n(b+\lambda t)) = b + P^1(Q^1(\lambda t)) + S_n(\lambda t), \text{ para todo } |\lambda| \leq 1.$$

Ou seja, provamos em (1.4) que

$$\lim_{n\to\infty} \beta(b + P^1(Q^1(\lambda t)) + S_n(\lambda t) - f(g(b+\lambda t))) = \lim_{n\to\infty} \beta([P^1(Q^1(\lambda t)) - \lambda t] + S_n(\lambda t)) = 0,$$

uniformemente para $|\lambda| \leq 1$, para toda seminorma $\beta \in cs(F)$.

Em resumo, provamos que para cada $t \in V_0$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\lambda t) = \lambda(t - P^1(Q^1(t))), \text{ uniformente para } |\lambda| \leq 1.$$

Então $\{S_n(\lambda t) \,:\, n \in \mathbb{N}, |\lambda| \leq 1\} \cup \{\lambda(t - P^1(Q^1(t))) \,:\, |\lambda| \leq 1\}$ é um subconjunto compacto de F (basta aplicar os mesmos argumentos utilizados acima para mostrar que o conjunto K é compacto). Portanto para cada $\beta \in cs(F)$ fixada, existe $C_{t,\beta} = C_t > 0$ tal que

$$\beta(S_n(\lambda t)) \leq C_t, \text{ para todos } n \in \mathbb{N}, |\lambda| \leq 1.$$

Observe ainda que $\zeta \mapsto S_n(\zeta t)$ é uma aplicação holomorfa de uma variável, para $0 < |\zeta| \leq 1$, tal que seus dois primeiros polinômios de Taylor (os de grau zero e um) são nulos. Assim segue do Lema de Schwarz [48, Teorema 7.19] que

$$\beta(S_n(\zeta t)) \leq |\zeta|^2 C_t, \text{ para todo } |\zeta| \leq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\frac{S_n(\zeta t)}{\zeta} \longrightarrow \frac{\zeta t - P^1(Q^1(\zeta t))}{\zeta} = t - P^1(Q^1(t)), \text{ para todo } 0 < |\zeta| \leq 1,$$

segue que

$$\beta(t - P^1(Q^1(t))) = \lim_{n\to\infty} \beta\Big(\frac{S_n(\zeta t)}{\zeta}\Big) \leq |\zeta| C_t, \text{ para todo } 0 < |\zeta| \leq 1.$$

Portanto, fazendo $\zeta \longrightarrow 0$, teremos que $\beta(t - P^1(Q^1(t))) = 0$. Como β foi tomada de modo arbitrário em $cs(F)$, segue que $t - P^1(Q^1(t)) = 0$, para todo $t \in V_0$ e portanto $P^1(Q^1(t)) = t$ para todo $t \in F$, ou seja, $P^1 \circ Q^1 : F \longrightarrow F$ é o operador identidade.

Suponhamos agora que f é bijetiva e que $g = f^{-1}$. Então pelos mesmos argumentos provamos que $Q^1 \circ P^1 : E \longrightarrow E$ é o operador identidade e consequentemente E e F são topologicamente isomorfos. ∎

Para mais informações sobre funções holomorfas em espaços de Banach ou em espaços localmente convexos, citamos [8, 10, 25, 48].

Daqui em diante, iremos apenas considerar a álgebra $\mathcal{H}(U)$. Antes de definir algumas topologias naturais em $\mathcal{H}(U)$, precisamos das seguintes definições.

Uma álgebra A é uma *álgebra topológica* se é um espaço vetorial topológico tal que a multiplicação é separadamente contínua. Uma álgebra topológica é uma *álgebra localmente m-convexa* se a topologia de A é gerada por uma família de seminormas $(p_i)_{i\in\mathcal{I}}$ tal que

$$p_i(x \cdot y) = p_i(x) \cdot p_i(y) \text{ e } p_i(e) = 1,$$

para todos $x, y \in A$, $i \in \mathcal{I}$. Uma *álgebra de Fréchet* é uma álgebra localmente m-convexa completa e metrizável.

A seguir definimos algumas das topologias naturais de $\mathcal{H}(U)$.

Definições 1.4.4. *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um aberto.*

(1) Denotamos por τ_0 a topologia em $\mathcal{H}(U)$ da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos de U.

(2) Uma seminorma p em $\mathcal{H}(U)$ é portada *por um subconjunto compacto $K \subset U$ se para cada aberto V, com $K \subset V \subseteq U$, existe uma constante $C_V > 0$ tal que*

$$p(f) \leq C_V \|f\|_V, \text{para toda } f \in \mathcal{H}(U).$$

A topologia τ_ω em $\mathcal{H}(U)$ é definida pela família das seminormas que são portadas pelos subconjuntos compactos de U.

(3) Uma seminorma p em $\mathcal{H}(U)$ é τ_δ-contínua *se para cada cobertura aberta enumerável $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de U existe uma constante $C > 0$ e um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$p(f) \leq C\|f\|_{\cup_{n=1}^{n_0} U_n}, \text{para toda } f \in \mathcal{H}(U).$$

A topologia τ_δ em $\mathcal{H}(U)$ é definida pela família das seminormas que são τ_δ-contínuas.

A título de informação, na seguinte observação listamos as principais propriedades das três topologias definidas acima.

Observação 1.4.5. *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um aberto.*

(1) [8, Proposição 8.12] *Se E tem dimensão finita, então $\tau_0 = \tau_\omega = \tau_\delta$.*

(2) [8, Proposição 8.12] ou [25, Lema 3.17] *Se E tem dimensão infinita, então $\tau_0 \leq \tau_\omega \leq \tau_\delta$.*

(3) [25, Exemplo 1.24] *Se E é metrizável, então τ_δ é a topologia bornológica associada a τ_0 e τ_ω.*

Mais ainda, τ_0 é completa e localmente m-convexa. Se E é metrizável, então a topologia τ_ω também satisfaz tais propriedades. Porém não se sabe, por exemplo, se τ_δ é completa ou mesmo localmente m-convexa. Em alguns casos, é possível saber se τ_δ tem algumas destas propriedades, pois em certos espaços ela coincide com τ_0 ou com τ_ω. Por exemplo, se E é um espaço de Banach separável com a propriedade da aproximação limitada, e $U \subseteq E$ é um aberto equilibrado, então τ_ω e τ_δ coincidem em $\mathcal{H}(U)$ [50, Corolário 3.3]. Se E é um espaço de Fréchet separável, $F = (E', \tau_0)$ e U um subconjunto aberto de F, então $\tau_0 = \tau_\delta$ em $\mathcal{H}(U)$ [25, Exercício 3.110] . Por outro lado, se

$E = \ell^\infty$, então $\tau_\omega < \tau_\delta$ em $\mathcal{H}(E)$ [8, Exemplo 8.4] ou [25, Corolário 4.52], ou seja, τ_δ não coincide com τ_ω.

Para mais informações sobre as topologias definidas na Definição 1.4.4, citamos [7, 8, 25].

A seguir estudamos um outro espaço topológico de funções holomorfas. Daqui em diante, nos limitamos a espaços de Banach complexos.

Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto e $x \in U$. Definimos a *distância de x à fronteira de U* como sendo:

$$d_U(x) = \sup\{r > 0 \,:\, \overline{B}(x,r) \subseteq U\} = \inf_{y \in \partial U} \|x - y\|.$$

Se A é um subconjunto de U, então a *distância de A à fronteira de U* é definida por

$$d_U(A) = \inf_{x \in A} d_U(x).$$

Dizemos que $A \subseteq U$ é *U-limitado* se A é limitado e existe $\varepsilon > 0$ tal que $A + B(0, \varepsilon) \subseteq U$, ou seja, $d_U(A) > 0$. Denotamos por $\mathcal{H}_b(U; F)$ o espaço vetorial das funções holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são limitadas em cada subconjunto U-limitado. Seus elementos são chamados de *aplicações holomorfas de tipo limitado*. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}_b(U)$ ao invés de $\mathcal{H}_b(U; \mathbb{C})$.

O Teorema de Josefson-Nissenzweig (veja [39] e [52]), garante que cada espaço de Banach E de dimensão infinita admite uma sequência de funcionais lineares $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ tal que $\|\varphi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$, para todo $x \in E$. Este teorema permite provar que em qualquer espaço de Banach dimensão infinita $\mathcal{H}_b(E; F) \neq \mathcal{H}(E; F)$.

Mais especificamente, [8, Proposição 11.3] ou [48, Proposição 7.15] mostram que a função

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi(x))^m$$

é uma função inteira cujo raio de limitação é 1, ou seja, f não é limitada em $B(0, r)$, onde $r > 1$, e assim não é uma função inteira de tipo limitado. Em resumo, $\mathcal{H}_b(E; F) \neq \mathcal{H}(E; F)$ se e somente se E tem dimensão finita e $F \neq \{0\}$ [8, Proposição 11.3]. Em [8, Proposição 11.4] é provado o mesmo resultado para abertos, a saber, se U é um aberto de um espaço de Banach E, então $\mathcal{H}_b(U;F) \neq \mathcal{H}(U;F)$ se e somente se a dimensão E é finita e $F \neq \{0\}$.

Temos que $\mathcal{H}_b(U;F)$ é um espaço de Fréchet para a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos U_n. De fato, os seguintes conjuntos abertos

$$U_n = \{x \in U \ : \ \|x\| < n \text{ e } d_U(x) > 2^{-n}\}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

formam uma sequência de subconjuntos U-limitados, tais que cada subconjunto U-limitado está contido em algum U_n. Se $F = \mathbb{C}$, temos que $\mathcal{H}_b(U)$ é uma álgebra de Fréchet. Observamos que em dimensão finita, $\mathcal{H}_b(U;F) = (\mathcal{H}(U;F), \tau_0) = (\mathcal{H}(U;F), \tau_\omega) = (\mathcal{H}(U;F), \tau_\delta)$.

Dizemos que um subconjunto $A \subseteq E$ de um espaço de Banach é *circular* se $e^{i\theta}A \subseteq A$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. É claro que todo conjunto equilibrado é circular.

A seguinte proposição apresenta algumas propriedades que os subconjuntos U_n herdam de U e que serão utilizadas no Capítulo 3.

Proposição 1.4.6. *Sejam E um espaço de Banach e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto.*

(1) Se U é convexo então U_n é convexo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Se U é circular, então U_n é circular, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Se U é absolutamente convexo, então U_n é absolutamente convexo, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in U_n$.

Demonstração:

(1) Sejam $x, y \in U_n$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ tais que $\alpha + \beta = 1$. Então é claro que $\|\alpha x + \beta y\| < n$. Para mostrar que $d_U(\alpha x + \beta y) > 2^{-n}$, é suficiente mostrar que se $B(x,r) \subseteq U$ e $B(y,r) \subseteq U$ então $B(\alpha x + \beta y, r) \subseteq U$. Mas isto é verdade, uma vez que $B(\alpha x + \beta y, r) = \alpha B(x,r) + \beta B(y,r) \subseteq \alpha U + \beta U \subseteq U$, pois U é convexo. Logo temos que U_n é convexo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Seja $x \in e^{i\theta}U_n$, isto é, $x = e^{i\theta}y$, para algum $y \in U_n$. Então é claro que $\|x\| < n$. Para provar que $d_U(e^{i\theta}y) > 2^{-n}$, é basta mostrar que se $B(y,r) \subseteq U$ então $B(e^{i\theta}y, r) \subseteq U$. Assim sendo, se

$z \in B(e^{i\theta}y, r)$ então

$$r > \|z - e^{i\theta}y\| = \|e^{-i\theta}z - y\|.$$

Ou seja $e^{-\mathrm{i}\theta}z \in B(y,r) \subseteq U$, e como U é circular segue que $z \in U$, terminando a demonstração.

(3) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in U_n$. Por (1), temos que U_n é convexo. Para provar que U_n é equilibrado, sejam $x \in U_n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Escrevamos $\lambda = re^{i\theta}$, onde $r = |\lambda|$. Como $0 \in U_n$ e U_n é convexo, temos que $rx + (1-r)0 = rx \in U_n$. Por (2) temos que U_n é circular e assim

$$e^{i\theta}rx = \lambda x \in U_n$$

e portanto U_n é equilibrado. ∎

Dizemos que uma sequência crescente $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos de U é uma *cobertura regular de U* se

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \text{ e } d_{U_{n+1}}(U_n) > 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Os seguintes resultados serão utilizados no Capítulo 3.

Lema 1.4.7. *Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto e A um subconjunto de U tal que $\overline{A} \subseteq U$. Então $d_U(\overline{A}) = d_U(A)$.*

Demonstração: Como $A \subseteq \overline{A}$, segue que $d_U(A) \geq d_U(\overline{A})$. Para provar a outra desigualdade, seja $x \in \overline{A}$. Então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A tal que $x_n \longrightarrow x$. Como d_U é uma função contínua [48, Exercício 7.D], temos que $d_U(x_n) \longrightarrow d_U(x)$. Como $d_U(A) = \inf_{x\in A} d_U(x)$, temos que $d_U(x_n) \geq d_U(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente $d_U(x) \geq d_U(A)$. Como x foi tomado de modo arbitrário em $\overline{A}$, segue que

$$d_U(\overline{A}) = \inf_{x\in\overline{A}} d_U(x) \geq d_U(A),$$

provando assim a desigualdade restante. ∎

Denotamos por $\mathbb{C}\oplus E'$ o espaço vetorial de todas as formas contínuas afins em E, isto é, $f \in \mathbb{C}\oplus E'$ se existem únicos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in E'$ tais que

$$f(x) = \lambda + \varphi(x), \text{ para todo } x \in E.$$

Se A é um subconjunto de E, então $\widehat{A}_{\mathbb{C}\oplus E'}$ denota o conjunto

$$\widehat{A}_{\mathbb{C}\oplus E'} = \{x \in E \,:\, |f(x)| \leq \sup_A |f|, \text{ para toda } f \in \mathbb{C} \oplus E'\}.$$

Proposição 1.4.8. *Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura regular de U tal que cada U_n é limitado. Então $d_U((\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'}) = d_U(U_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Como cada U_n é limitado, temos por [48, Teorema 1.11] que $(\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'} = \overline{co}(U_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $(\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'} \subseteq U$, para fazer sentido calcular $d_U((\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'})$. Seja $r > 0$ tal que $U_n + B(0,r) \subseteq U$. Então $(\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'} = \overline{co}(U_n) \subseteq co(U_n) + B(0,r) = co(U_n + B(0,r)) \subseteq U$, pois U é convexo.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Para mostrar que $d_U((\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'}) = d_U(U_n)$ vamos mostrar que $d_U(\overline{co}(U_n)) = d_U(U_n)$. Pelo Lema 1.4.7, basta provar que $d_U(co(U_n)) = d_U(U_n)$. Como $U_n \subseteq co(U_n)$, temos que $d_U(U_n) \geq d_U(co(U_n))$. Para provar a outra desigualdade, seja $x \in co(U_n)$. Então

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \text{ onde } x_i \in U_n, \alpha_i \in [0,1], \text{ com } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \; i = 1, \cdots k.$$

Sejam $r = d_U(U_n)$ e $0 < \varepsilon < r$. Então

$$B(x,\varepsilon) = B\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \varepsilon\Big) = \alpha_1 B(x_1,\varepsilon) + \cdots + \alpha_k B(x_k,\varepsilon) \subseteq U,$$

pois U é convexo. Ou seja, $B(x,\varepsilon) \subseteq U$, para todos $0 < \varepsilon < r$ e $x \in co(U_n)$. Portanto $d_U(co(U_n)) \geq r = d_U(U_n)$, provando a desigualdade restante. ∎

Outros espaços de aplicações holomorfas que serão utilizadas nesta tese são os seguintes.

$\mathcal{H}^\infty(U;F)$ é o espaço de Banach de todas as aplicações holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são limitadas em U. Quando $F = \mathbb{C}$, escreveremos $\mathcal{H}^\infty(U)$ ao invés de $\mathcal{H}^\infty(U;\mathbb{C})$.

$\mathcal{H}_{wu}(U;F)$ é o espaço de todas as aplicações holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são uniformemente fracamente contínuas nos subconjunto U-limitados. Quando $F = \mathbb{C}$, escreveremos $\mathcal{H}_{wu}(U)$ ao invés de $\mathcal{H}_{wu}(U;\mathbb{C})$.

1.5 Preliminares sobre germes de funções holomorfas

Sejam E e F espaços de Banach, e $K \subset E$ um subconjunto compacto. Consideremos o seguinte conjunto

$$h(K;F) = \cup\{\mathcal{H}(U;F) : U \supset K \text{ é aberto em } E\}.$$

Sejam $f_1,\ f_2 \in h(K;F)$ e $U_1,\ U_2$ subconjuntos abertos de E com $K \subset U_1$ e $K \subset U_2$, tais que $f_1 \in \mathcal{H}(U_1, F)$ e $f_2 \in \mathcal{H}(U_2, F)$. Dizemos que f_1 e f_2 são *equivalentes* (e denotamos $f_1 \sim f_2$) se existe um subconjunto aberto $W \subseteq E$ com $K \subset W \subseteq U_1 \cap U_2$ tal que $f_1 = f_2$ em W. Desta forma $\sim$ é uma relação de equivalência em $h(K;F)$ e denotamos $\mathcal{H}(K;F) = h(K;F)/\sim$. Os elementos de $\mathcal{H}(K;F)$ são chamados de *germes holomorfos em K com valores em F*. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}(K)$ ao invés de $\mathcal{H}(K;\mathbb{C})$.

Finalmente, munimos $\mathcal{H}(K;F)$ da topologia indutiva localmente convexa com relação às inclusões $i_U : (\mathcal{H}(U;F), \tau_\omega) \hookrightarrow \mathcal{H}(K;F)$, onde U varia entre os subconjuntos abertos de E tais que $K \subset U$, e denotamos

$$(\mathcal{H}(K;F), \tau_\omega) = \underrightarrow{lim}_{U \supseteq K}(\mathcal{H}(U;F), \tau_\omega).$$

A partir de agora nos restringimos ao estudo das propriedades da álgebra $\mathcal{H}(K)$. Foi provado em [44, Teorema 7.1] que $\mathcal{H}(K)$ é uma álgebra topológica localmente m-convexa.

Seja $U_n = K + B_E(0, \frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. É provado em [43, Lema 12.6] que

$$(\mathcal{H}(K), \tau_\omega) = \underrightarrow{lim}_{n \in \mathbb{N}}\mathcal{H}^\infty(U_n). \tag{1.5}$$

E como $\mathcal{H}^\infty(U_n) \hookrightarrow \mathcal{H}_b(U_n) \hookrightarrow (\mathcal{H}(K), \tau_\omega)$, segue que

$$(\mathcal{H}(K), \tau_\omega) = \underrightarrow{lim}_{n \in \mathbb{N}}\mathcal{H}_b(U_n). \tag{1.6}$$

Denotamos por i_n as inclusões canônicas $i_n : \mathcal{H}_b(U_n) \hookrightarrow \mathcal{H}(K)$ (ou $i_n : \mathcal{H}^\infty(U_n) \hookrightarrow \mathcal{H}(K)$), para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $[f]$ os elementos da álgebra $\mathcal{H}(K)$, isto é, a classe $[f] \in \mathcal{H}(K)$ se e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{H}_b(U_n)$ (ou $f \in \mathcal{H}^\infty(U_n)$); e usaremos arbitrariamente as caracterizações (1.5) ou (1.6), de acordo com a conveniência.

Indicamos [11, 25, 44] para mais informações sobre germes de funções holomorfas.

Sejam E um espaço de Banach, e K um subconjunto compacto de E. Então K também é um subconjunto compacto de E''. No que se segue, quando considerarmos K como um compacto de E, escrevemos K_E, e quando K for considerado como um subconjunto compacto de E'', escrevemos $K_{E''}$.

Podemos considerar germes de funções holomorfas em vizinhanças abertas de K em E ou em E''. Neste sentido, denotamos por $\mathcal{H}(K_E)$ a álgebra de germes de funções holomorfas em subconjuntos abertos de E que contém K; e de maneira análoga $\mathcal{H}(K_{E''})$ denota a álgebra de germes de funções holomorfas em abertos de E'' que contém K.

A seguinte caracterização de $\mathcal{H}(K_{E''})$, para K absolutamente convexo, será útil no Capítulo 4.

Lema 1.5.1. *Sejam E um espaço de Banach e $K \subset E$ um subconjunto compacto convexo e equilibrado. Então $\mathcal{H}(K_{E''}) = \underrightarrow{lim}_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^\infty\Big(\overset{\circ}{\overline{U_n}^{*}}\Big)$, onde $U_n = K + B_E\big(0, \frac{1}{n}\big)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Sabemos por (1.5) que $\mathcal{H}(K_{E''}) = \underrightarrow{lim}_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^\infty\Big(K + B_{E''}\Big(0, \frac{1}{n}\Big)\Big)$. Agora a conclusão segue imediatamente do Lema 1.2.10. ∎

Capítulo 2

Funções holomorfas em espaços localmente convexos

Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam ambas de refletir. (Henri Poincaré)

Sejam E e F espaços localmente convexos, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ conjuntos abertos. O objetivo principal deste capítulo é comparar as relações entre dois abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ e as relações entre as álgebras topológicas $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$, quando τ é τ_0, τ_ω ou τ_δ. Não é difícil ver que se U e V são biholomorficamente equivalentes, então as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas. É natural perguntar quando a recíproca é verdadeira, e esta pergunta é respondida de maneira afirmativa nas próximas seções. O fato de, sob tais hipóteses, os elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{H}(U))$ e $\mathcal{S}(\mathcal{H}(V))$ serem caracterizados como avaliações é essencial para a demonstração dos resultados.

2.1 Operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas

Consideremos E e F espaços localmente convexos, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos não vazios.

Seja $z \in U$. A aplicação $\delta_z : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\delta_z(f) = f(z)$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, é chamada de *avaliação*. É claro que δ_z é um homomorfismo complexo de $\mathcal{H}(U)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$ com $\varphi(V) \subseteq U$. A aplicação $C_\varphi : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(V)$ dada por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, é chamada de *operador de composição*. É claro que C_φ é um homomorfismo entre as álgebras $\mathcal{H}(U)$ e $\mathcal{H}(V)$.

O próximo lema, relativo a operadores de composição, será utilizado posteriormente neste capítulo.

Lema 2.1.1. *Sejam E, F e G espaços localmente convexos e $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ e $W \subseteq G$ subconjuntos abertos. Sejam $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$ com $\varphi(V) \subseteq U$ e $\psi \in \mathcal{H}(W, F)$ com $\psi(W) \subseteq V$. Então: $C_\psi \circ C_\varphi = C_{\varphi\circ\psi} : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(W)$.*

Demonstração: Basta observar que $C_\psi \circ C_\varphi(f) = C_\psi(f \circ \varphi) = f \circ \varphi \circ \psi = C_{\varphi\circ\psi}(f)$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. ∎

É claro que cada avaliação δ_z, $z \in U$, é um homomorfismo complexo contínuo segundo τ_0, τ_ω ou τ_δ. Com relação à continuidade dos operadores de composição, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.2. *Sejam E e F espaços localmente convexos e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos. Seja $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$ com $\varphi(V) \subseteq U$. Então $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau)$ é contínuo, para $\tau = \tau_0, \tau_\omega, \tau_\delta$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_0)$ é contínuo. Para tal, seja $q : \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma τ_0-contínua. Então existe um subconjunto compacto $L \subset V$ tal que

$$q(g) = \sup_{y \in L} |g(y)|, \text{ para toda } g \in \mathcal{H}(V).$$

Definamos $p : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $p(f) = q(f \circ \varphi) = q(C_\varphi(f))$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Como C_φ é um operador linear, temos que p é uma seminorma. Consideremos agora o compacto $K = \varphi(L)$. Então:

$$p(f) = q(f \circ \varphi) = \sup_{y \in L} |f(\varphi(y))| = \sup_{x \in \varphi(L)} |f(x)| = \sup_{x \in K} |f(x)|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(U),$$

o que mostra que p é τ_0-contínua e portanto $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_0)$ é contínuo.

Agora vamos verificar que $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\omega) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ é contínuo.

Seja $q : \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma em $\mathcal{H}(V)$ portada por um subconjunto compacto L de V. Consideremos a seguinte seminorma $p : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(f) = q(f \circ \varphi) = q(C_\varphi(f))$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Vamos mostrar que p é portada pelo compacto $\varphi(L) = K \subset U$. Para tal seja O um aberto de U tal que $K \subset O \subseteq U$. Então temos que $L \subset \varphi^{-1}(O) \subseteq V$, e $\varphi^{-1}(O)$ é aberto. Como q é portada por L, existe $C_O > 0$ tal que $q(g) \leq C_O \|g\|_{\varphi^{-1}(O)}$. Consequentemente $p(f) = q(f \circ \varphi) \leq C_O \|f \circ \varphi\|_{\varphi^{-1}(O)} \leq C_O \|f\|_O$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, o que mostra que p é portada por K. Portanto $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\omega) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ é contínuo.

Finalmente mostremos que $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ é contínuo. Para tal, tomemos $q : \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma τ_δ-contínua e definamos uma seminorma $p : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma: $p(f) = q(f \circ \varphi)$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Para mostrar que p é τ_δ-contínua, seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura aberta de U. Então

$$V \subseteq \varphi^{-1}(U) \subseteq \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\Big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{-1}(U_n),$$

ou seja, $(\varphi^{-1}(U_n))_{n \in \mathbb{N}} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de V. Portanto existem $C > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$q(g) \leq C \|g\|_{\cup_{n=1}^{n_0} V_n}, \text{ para toda } g \in \mathcal{H}(V).$$

Logo

$$p(f) = q(f \circ \varphi) \leq C \|f \circ \varphi\|_{\cup_{n=1}^{n_0} V_n} \leq C \|f\|_{\cup_{n=1}^{n_0} U_n},$$

para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, o que mostra que p é τ_δ-contínua, e assim $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ é contínuo.

$\blacksquare$

Observamos que a demonstração da Proposição 2.1.2 para τ_ω foi baseada na demonstração de [19, Proposição 2.2.1].

É extensa a bibliografia onde se trabalha com operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas. Existem caracterizações de quais homomorfismos são operadores de composição, condições em φ para que C_φ seja compacto ou w-compacto, bem como investigações sobre quando um operador de composição w-compacto é compacto. Podemos citar por exemplo [5, 27, 65].

No entanto, nesta tese utilizamos somente a continuidade dos operadores de composição, propriedade que já foi provada na Proposição 2.1.2, e que será provada também nos próximos capítulos, para as álgebras em questão.

2.2 Funções holomorfas em domínios absolutamente convexos

Nesta seção obtemos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas em domínios absolutamente convexos.

Sejam E e F espaços localmente convexos. Dizemos que dois subconjuntos abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ são *biholomorficamente equivalentes* se existe uma aplicação $\varphi : V \longrightarrow U$ que é *biholomorfa*, isto é, $\varphi : V \longrightarrow U$ é uma bijeção, e ambas φ e φ^{-1} são holomorfas.

A próxima proposição nos diz que se U e V são abertos biholomorficamente equivalentes em espaços arbitrários E e F, respectivamente, então E e F são topologicamente isomorfos.

Proposição 2.2.1. *Sejam E e F espaços localmente convexos quase completos. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) E e F são topologicamente isomorfos.

(2) E e F são biholomorficamente equivalentes.

(3) Existem abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ que são biholomorficamente equivalentes.

Demonstração: As implicações (1) $\Rightarrow$ (2) e (2) $\Rightarrow$ (3) são imediatas. Para provar a implicação restante, basta aplicar o Lema 1.4.3. ∎

O seguinte teorema é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.2. *Sejam E e F espaços de Fréchet, um deles com a propriedade da aproximação, e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Consideremos as seguintes condições.*

(1) U e V são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

(4) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

Então as condições (1), (2) *e* (3) *são equivalentes e implicam* (4). *Se E ou F é separável e tem a propriedade da aproximação, então* (1) $-$ (4) *são equivalentes.*

Para provar este teorema, usaremos os seguintes resultados.

Teorema 2.2.3 (J. M. Isidro, [37]). *Sejam E um espaço localmente convexo quase-completo com a propriedade da aproximação e $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau)$ é identificado com U, onde $\tau = \tau_0, \tau_\omega$.*

Teorema 2.2.4 (J. Mujica, [46]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade da aproximação e $U \subset E$ um aberto convexo e equilibrado. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ é identificado com U.*

Demonstração do Teorema 2.2.2:

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\varphi : V \longrightarrow U$ uma aplicação biholomorfa. Consideremos o operador de composição $C_\varphi : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(V)$. Pelo Lema 2.1.1 temos que $C_\varphi \circ C_{\varphi^{-1}} = C_{\varphi^{-1} \circ \varphi} = C_{id} = Id$ e analogamente

$C_{\varphi^{-1}} \circ C_\varphi = Id$. Logo C_φ é uma bijeção e $(C_\varphi)^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$. Assim temos que C_φ é um isomorfismo algébrico.

Pela Proposição 2.1.2, todo operador de composição é contínuo segundo a topologia τ_0. Como a inversa de C_φ é $C_{\varphi^{-1}}$, que por sua vez é um operador de composição, segue que $C_{\varphi^{-1}}$ também é contínuo e portanto C_φ é um isomorfismo topológico entre $\mathcal{H}(U)$ e $\mathcal{H}(V)$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

(a) Suponhamos inicialmente que E e F ambos têm a propriedade da aproximação. Seja $T : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau_0)$ um isomorfismo topológico. Vamos construir uma aplicação biholomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$. Para tal seja $w \in V$. Então $\delta_w \circ T : (\mathcal{H}(U), \tau_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo de $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$. Pelo Teorema 2.2.3 , existe um único $z \in U$ tal que $\delta_w \circ T = \delta_z$. Definamos $\varphi : V \longrightarrow U$ por $\varphi(w) = z$. Vamos mostrar que φ é holomorfa. Com efeito,

$$(\delta_w \circ T)(f) = f(z) = f(\varphi(w)), \text{ para todo } w \in V, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(U),$$

ou seja, $T(f)(w) = f(\varphi(w))$, para todo $w \in V$ e para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Logo $T(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}(U)$.

Em particular, temos que $T(f) = f \circ \varphi \in \mathcal{H}(U)$, para todo $f \in E'$, ou seja, φ é w-holomorfa e consequentemente holomorfa, por [25, Proposição 3.21]. Portanto $T = C_\varphi$.

O mesmo argumento nos garante a existência de uma aplicação $\psi \in \mathcal{H}(U; F)$ com $\psi(U) \subseteq V$, tal que $T^{-1} = C_\psi$. Assim $Id = C_\varphi \circ C_\psi = C_{\psi\circ\varphi}$, isto é, $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para todo $g \in \mathcal{H}(V)$ e em particular para todo $g \in F'$. Portanto, para cada $w \in V$ temos que $g(w) = g(\psi(\varphi(w))$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que $\psi \circ \varphi = id : V \longrightarrow V$; e pelos mesmos argumentos temos que $\varphi \circ \psi = id : U \longrightarrow U$. Portanto φ é bijetiva e $\varphi^{-1} = \psi \in \mathcal{H}(U; F)$, e assim φ é biholomorfa.

(b) Vamos agora supor que apenas E tem a propriedade da aproximação, e provar que F também tem. Seja $\varphi : V \longrightarrow U$ a aplicação holomorfa construída na parte (a). Note que para construir $\varphi : V \longrightarrow U$ utilizamos apenas a hipótese de que E (e não F) tem a propriedade da aproximação.

Para cada $z \in U$ temos que $\delta_z \circ T^{-1} : (\mathcal{H}(V), \tau_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo contínuo. Como $F' \subset \mathcal{H}(V)$, segue que $\delta_z \circ T^{-1}|_{F'} \in (F', \tau_0)' = F$, pelo Teorema 1.2.1 (Mackey-Arens).

Portanto existe um único $w \in F$ tal que $\delta_z \circ T^{-1}(g) = \delta_w(g)$, para todo funcional $g \in F'$. Definamos $\psi : U \longrightarrow F$ por $\psi(z) = w$, para todo $z \in U$. Desta forma temos que $T^{-1}(g)(z) = g(\psi(z))$, para todos $g \in F'$ e $z \in U$, isto é, $T^{-1}(g) = g \circ \psi$, para todo $g \in F'$. Em particular, segue que $g \circ \psi \in \mathcal{H}(V)$, para todo $g \in F'$, o que mostra que ψ é fracamente holomorfa e portanto holomorfa por [25, Proposição 3.21]. Aplicando T em ambos os lados da igualdade acima, temos que $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para todo $g \in F'$. Então para cada $w \in V$ fixado temos que $g(w) = g(\psi(\varphi(w)))$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach temos que $\psi(\varphi(w)) = w$, para todo $w \in V$, ou seja, $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow F$ é a inclusão. Aplicando o Lema 1.4.3, temos que F é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de E, e portanto F tem a propriedade da aproximação, pela Proposição 1.2.3. No que se segue basta aplicar a demonstração feita na parte (a).

(1) $\Rightarrow$ (3) Basta usar os mesmos raciocínios de (1) $\Rightarrow$ (2).

(3) $\Rightarrow$ (1) Pelo Teorema 2.2.3, temos que $\mathcal{S}(\mathcal{H}(U), \tau_0) = \mathcal{S}(\mathcal{H}(U), \tau_\omega) = U$. Em seguida basta usar os mesmos raciocínios de (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (4) Basta usar os mesmos raciocínios de (1) $\Rightarrow$ (2).

(4) $\Rightarrow$ (1) Se E e F são ambos separáveis, usamos o Teorema 2.2.4 e o mesmo raciocínio de (2) $\Rightarrow$ (1). Se apenas E é separável e tem a propriedade da aproximação, o argumento da demonstração de (2) $\Rightarrow$ (1), parte (b), garante que F também é separável e tem a propriedade da aproximação. ∎

Examinando a prova do Teorema 2.2.2 acima, podemos perceber que a equivalência de (1), (2) e (3) vale para uma classe maior de espaços localmente convexos quase-completos, os chamados espaços *holomorficamente Mackey*. Dizemos que um espaço localmente convexo E é *holomorficamente Mackey* se para cada subconjunto aberto U de E, tem-se que $\mathcal{H}(U; F) = \mathcal{H}(U, F_\sigma)$, onde $F_\sigma = (F, \sigma(F, F'))$, para todo espaço localmente convexo Hausdorff completo F, o que significa dizer que toda aplicação w-holomorfa em U é holomorfa. Assim temos o seguinte teorema, que melhora o Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.5. *Sejam E e F espaços holomorficamente Mackey quase-completos, um deles com a propriedade da aproximação e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Então as seguinte condições são equivalentes.*

(1) U e V são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

Todo espaço localmente convexo metrizável é holomorficamente Mackey [25, Exemplo 3.20(a)]. Em [22, Corolário 10] (e também em [25, Exemplo 3.20(a)]), S. Dineen mostra que todo espaço $\mathcal{DFM}$ é holomorficamente Mackey. Em [9], J. Barroso, M. Matos e L. Nachbin mostram que todo espaço $\mathcal{DFS}$ é holomorficamente Mackey. Para outros exemplos de espaços holomorficamente Mackey sugerimos [12, 24] e [55, Capítulo 12]. Se A é um conjunto não-enumerável, então $\mathbb{C}^{(A)}$ não é holomorficamente Mackey [25, Exercício 3.114].

Iremos apresentar um exemplo mostrando que a hipótese *holomorficamente Mackey* do Teorema 2.2.5 não pode ser omitida. Os espaços localmente convexos que serão apresentados neste exemplo foram estudados por B. Josefson em [38], e depois com mais detalhes por P. Noverraz em [53] e por S. Dineen em [23]. O exemplo que apresentaremos foi inspirado nestes três trabalhos, e foi uma sugestão de Seán Dineen, a quem também se deve a demonstração da Proposição 2.2.6.

Seja A um conjunto não enumerável, e consideremos $C_0(A)$ o conjunto de todas as funções $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto finito $A(\varepsilon) \subset A$ tal que

$$\sup_{\alpha \in A \setminus A(\varepsilon)} |f(\alpha)| \leq \varepsilon.$$

Os elementos de $C_0(A)$ serão denotados por $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, onde $x_\alpha = f(\alpha)$, para todo $\alpha \in A$. Seja $I = \{i : A_i \text{ é um subconjunto enumerável de } A\}$, isto é, $i \in I$ se e somente se $A_i \subset A$ é enumerável. Então não é difícil ver que

$$C_0(A) = \cup_{i \in I} C_0(A_i). \tag{2.1}$$

Temos que $C_0(A)$ é um espaço de Banach com a norma do supremo. Podemos identificar cada $C_0(A_i)$ com um subespaço fechado de $C_0(A)$, com a topologia induzida, da seguinte maneira: se $x \in C_0(A_i)$, identificamos x com $y = (y_\alpha) \in C_0(A)$ da seguinte forma: $y_\alpha = x_\alpha$ se $\alpha \in A_i$ e

$y_\alpha = 0$ se $\alpha \in A \setminus A_i$. Para cada $i \in I$, considere a projeção $u_i : C_0(A) \longrightarrow C_0(A_i)$ definida por $u_i((x_\alpha)) = (x_\alpha)_{\alpha \in A_i}$.

Consideremos em $C_0(A)$ a topologia projetiva (completa e localmente convexa) com relação às projeções u_i, para todo $i \in \mathcal{I}$. O espaço $C_0(A)$ munido desta topologia será denotado por $C_{0,p}(A)$. Por $C_0(A)$ entendemos $C_0(A)$ munido da norma. Observamos portanto que o operador identidade $Id : C_0(A) \longrightarrow C_{0,p}(A)$ sempre é contínuo, mas continuidade reversa não vale, uma vez que $C_0(A)$ é um espaço Banach mas $C_{0,p}(A)$ não é um espaço de Fréchet.

Em [38, §4, Proposição Principal], B. Josefson mostra que $\mathcal{H}(C_0(A)) = \mathcal{H}(C_{0,p}(A))$. Mais especificamente, P. Noverraz mostra em [53, Página 323], que dada uma função $f \in \mathcal{H}(C_0(A))$ existem um índice $i \in I$ e $\tilde{f} \in \mathcal{H}(C_0(A_i))$ tais que $f = \tilde{f} \circ u_i$, ou seja, uma função holomorfa em $C_0(A)$ depende apenas de um subconjunto enumerável de A. Este fato nos permite provar a seguinte proposição.

Proposição 2.2.6. *O espaço localmente convexo $C_{0,p}(A)$ não é holomorficamente Mackey.*

Demonstração: Seja $\varphi \in C_0(A)'$. Então $\varphi \in \mathcal{H}(C_0(A)) = \mathcal{H}(C_{0,p}(A))$, ou seja, $\varphi = \varphi \circ Id : C_{0,p}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa. Mas $Id : C_{0,p}(A) \longrightarrow C_0(A)$ não é holomorfa, pois não é contínua. Assim $C_{0,p}(A)$ não é um espaço holomorficamente Mackey. ∎

O espaço $C_{0,p}(A)$ satisfaz uma propriedade adicional, chamada de $(*)$ por P. Noverraz em [53, Página 324].

$$(*) \text{ para todo } J \subseteq \mathcal{I} \text{ enumerável, exite } i_o \in \mathcal{I} \text{ tal que } \cup_{j \in J} C_0(A_j) \subseteq C_0(A_{i_0}).$$

A seguir apresentaremos alguns lemas que serão úteis para a conclusão do exemplo.

Lema 2.2.7 ([53], Proposição 1)**.** *Os espaços $C_0(A)$ e $C_{0,p}(A)$ têm os mesmo subconjuntos compactos.*

Demonstração: É claro que todo compacto de $C_0(A)$ é um compacto de $C_{0,p}(A)$. Consideremos K um subconjunto compacto de $C_{0,p}(A)$. Então $u_i(K)$ é um subconjunto compacto de $C_0(A_i)$, para todo $i \in \mathcal{I}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em K. Por (2.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i_n \in \mathcal{I}$ tal que

$x_n \in C_0(A_{i_n})$. Pela propriedade $(*)$ existe $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $x_n \in C_0(A_{i_0})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como u_{i_0} é uma projeção, temos que $x_n = u_{i_0}(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto (x_n) está contida no compacto $u_{i_0}(K)$. Como $C_0(A_{i_0})$ é Banach, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge a um ponto $x \in C_0(A_{i_0})$, e portanto convergente em $C_0(A)$, concluindo a demonstração. ∎

Como $Id : C_0(A) \longrightarrow C_{0,p}(A)$ é linear e contínua, e portanto holomorfa, segue em particular que $Id : (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau)$ é contínua, para $\tau = \tau_0$, τ_ω e τ_δ. Para ver isso, basta aplicar a Proposição 2.1.2 para $E = U = C_{0,p}(A)$, $F = V = C_0(A)$ e $\varphi = Id : V \longrightarrow U$. Nos próximos três lemas provamos que de fato $Id : (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau)$ é um isomorfismo topológico.

Lema 2.2.8. *O operador $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_0)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Segue imediatamente do fato de $\mathcal{H}(C_0(A)) = \mathcal{H}(C_{0,p}(A))$ e do Lema 2.2.7. ∎

A fim de simplificar a notação, τ_0 denota a topologia τ_0 em $\mathcal{H}(C_0(A))$ e $\tau_{0,p}$ denota a topologia τ_0 em $\mathcal{H}(C_{0,p}(A))$. Tal notação será utilizada de maneira análoga para as topologias τ_ω e τ_δ.

Lema 2.2.9 ([53], Página 330)**.** *O operador $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\omega) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_\omega)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Para provar a continuidade não trivial, seja p uma seminorma $\tau_{\omega,p}$ contínua. Se p não é τ_ω-contínua, então para todo subconjunto compacto $K \subset C_0(A)$, existe um aberto $U \subsetneq C_0(A)$ com $K \subset U$, e uma sequência $(f_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ contida em $\mathcal{H}(C_0(A))$ tal que

$$p(f_{n,K}) \geq n\|f_{n,K}\|_U, \text{ para todo}\, n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $i_n \in \mathcal{I}$ e $\widetilde{f_{n,K}} \in \mathcal{H}(C_0(A_{i_n}))$ tais que $f_{n,K} = \widetilde{f_{n,K}} \circ u_{i_n}$. Pela condição $(*)$, seja $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_0(A_{i_n}) \subseteq C_0(A_{i_0})$, e desta forma $\widetilde{f_{n,K}} \in \mathcal{H}(C_0(A_{i_0})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $u_{i_n,i_0} : C_0(A_{i_0}) \longrightarrow C_0(A_{i_n})$ a projeção canônica, e denotemos $g_{n,K} = \widetilde{f_{n,K}} \circ u_{i_n,i_0}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim temos que $f_{n,K} = g_{n,K} \circ u_{i_0}$. Seja $U_K = u_{i_0}^{-1}\big(u_{i_0}(U)\big)$. Então U_K é aberto em $C_{0,p}(A)$.

De fato, como U é aberto em norma, então $u_{i_0}(U)$ é aberto em $C_0(A_{i_0})$ (topologia da norma induzida em $C_0(A_{i_0})$). Agora é claro que $u_{i_0}^{-1}(u_{i_0}(U))$ é aberto. Afirmamos que $\|f_{n,K}\|_{U_K} = \|f_{n,K}\|_U$. De fato, como $U \subset U_K$ segue que $\|f_{n,K}\|_U \leq \|f_{n,K}\|_{U_K}$. Seja agora $x \in U_K$. Então $u_{i_0}(x) \in u_{i_0}(U)$. Portanto $f_{n,K}(x) = g_{n_k} \circ u_{i_0}(x) = g_{n,K}(y)$, onde $y \in u_{i_0}(U)$ e assim

$$|f_{n,K}(x)| = |g_{n,K}(y)| \leq \|g_{n,K}\|_{u_{i_0}(U)} = \|g_{n,K} \circ u_{i_0}\|_U = \|f_{n,K}\|_U,$$

para todo $x \in U_K$. Ou seja $\|f_{n,K}\|_{U_K} \leq \|f_{n,K}\|_U$ e portanto a igualdade está demonstrada. Agora K é compacto em $C_{0,p}(A)$ pelo Lema 2.2.7 e $p(f_{n,K}) \geq n\|f_{n,K}\|_{U_K}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que p não é $\tau_{\omega,p}$ contínua, uma contradição. ∎

Em [53, Seção 3, Página 327], é provado que $\tau_{\delta,p}$ é a topologia bornológica associada a $\tau_{0,p}$ ou $\tau_{\omega,p}$. Com isso podemos provar o seguinte lema.

Lema 2.2.10. *O operador $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_\delta)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Para provar a continuidade não trivial, considere $B \subset (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta)$ um subconjunto limitado. Como $C_0(A)$ é Banach, temos pela Observação 1.4.5 que τ_δ é a topologia bornológica em $\mathcal{H}(C_0(A))$ associada a τ_0 e portanto B é τ_0-limitado. Pelo Lema 2.2.8, B é $\tau_{0,p}$-limitado. Como $\tau_{\delta,p}$ é a topologia bornológica associada a $\tau_{0,p}$, segue que B é $\tau_{\delta,p}$-limitado. Portanto a identidade $(\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_{\delta,p})$ leva limitados em limitados. Como $(\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta)$ é um espaço bornológico, segue que $Id : (\mathcal{H}(C_0(A)), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau_{\delta,p})$ é contínua. ∎

Agora estamos prontos para demonstrar o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.11. *As álgebras $(\mathcal{H}(C_0(A)), \tau)$ e $(\mathcal{H}(C_{0,p}(A)), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$, τ_ω e τ_δ, mas $C_0(A)$ e $C_{0,p}(A)$ não são biholomorficamente equivalentes.*

Demonstração: A primeira afirmação segue dos Lemas 2.2.8, 2.2.9 e 2.2.10. Se $C_0(A)$ e $C_{0,p}(A)$ são biholomorficamente equivalentes, então segue da Proposição 2.2.1 que eles são topologicamente isomorfos, o que não é verdade. ∎

Na sequência apresentaremos dois corolários que melhoram a Proposição 2.2.1 e o Teorema 2.2.2 para bolas abertas e abertos convexos, equilibrados e limitados em espaços de Banach.

Corolário 2.2.12. *Sejam E e F espaços de Banach, um deles com a propriedade da aproximação. Consideremos as seguintes condições:*

(1) E e F são isometricamente isomorfos.

(2) B_E e B_F são biholomorficamente equivalentes.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(B_E), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(B_F), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(4) As álgebras $(\mathcal{H}(B_E), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(B_F), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

(5) As álgebras $(\mathcal{H}(B_E), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(B_F), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

Então as condições (1), (2), (3) *e* (4) *são equivalentes e implicam* (5). *Se E ou F é separável e tem a propriedade da aproximação, então* $(1)-(5)$ *são equivalentes.*

A equivalência entre (1) e (2) do Corolário 2.2.12 deve-se a um teorema de W. Kaup e W. Upmeier que enunciamos abaixo. As outras conclusões seguem do Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.13 (W. Kaup, W. Upmeier, [40])**.** *Dois espaços de Banach E e F são isometricamente isomorfos se e somente se existe uma aplicação biholomorfa entre a bola unitária de E e a bola unitária de F.*

Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que dois abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ são *linearmente equivalentes* se existe um isomorfismo topológico $\varphi : E \longrightarrow F$ tal que $\varphi(U) = V$.

Vamos agora supor que U é um aberto convexo, equilibrado e limitado de um espaço de Banach E. Então o espaço

$$E_U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU,$$

munido do funcional de Minkowski de U, é um espaço de Banach topologicamente isomorfo a E. Como U é aberto, temos que U é a bola unitária de E_U e assim temos o seguinte corolário, que melhora o Teorema 2.2.2 para abertos convexos, equilibrados e limitados.

Corolário 2.2.14. *Sejam E e F espaços de Banach, um deles com a propriedade da aproximação e sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ abertos convexos, equilibrados e limitados. Consideremos as seguintes condições:*

(1) U e V são linearmente equivalentes.

(2) U e V são biholomorficamente equivalentes.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(4) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

(5) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

Então as condições (1), (2), (3) *e* (4) *são equivalentes e implicam* (5). *Se E ou F é separável e tem a aproximação, então* $(1) - (5)$ *são equivalentes.*

Demonstração: Temos que (2), (3), (4) e (5) são equivalentes pelo Teorema 2.2.2. Vamos mostrar que (1) e (2) são equivalentes. Se U e V são linearmente equivalentes, o isomorfismo topológico $\varphi : E \longrightarrow F$ tal que $\varphi(V) = U$ é a aplicação biholomorfa procurada.

Reciprocamente, temos pelo Teorema 2.2.13 que E_U e F_V são isometricamente isomorfos. Portanto, se $T : E_U \longrightarrow F_V$ é tal isometria, então $T(U) = V$, uma vez que T leva a bola unitária de E_U na bola unitária de F_V. Por fim, como E_U é topologicamente isomorfo a E e F_V é topologicamente isomorfo a F, segue que U e V são linearmente equivalentes. ∎

2.3 Funções holomorfas em domínios polinomialmente convexos

Nesta seção obtemos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas em domínios polinomialmente convexos.

Dizemos que um subconjunto aberto U de um espaço localmente convexo E é *polinomialmente convexo* se $\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)} \cap U$ é compacto para cada subconjunto compacto $K \subset U$. Aqui $\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)}$ denota o conjunto

$$\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)} = \Big\{x \in E \,:\, |P(x)| \leq \sup_K |P|, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}(E)\Big\}.$$

Seja $P \in \mathcal{P}(E)$. O aberto $U = \{x \in E \,:\, |P(x)| < 1\}$ é polinomialmente convexo, mas não é convexo em geral. Ou seja, a classe dos abertos polinomialmente convexos é estritamente maior que a dos absolutamente convexos.

O Teorema 2.2.2 pode ser estendido ao caso de domínios polinomialmente convexos da maneira seguinte.

Teorema 2.3.1. *Sejam E e F espaços de Fréchet, um deles com a propriedade da aproximação e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos polinomialmente convexos. Consideremos as seguintes condições.*

(1) U e V são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

(4) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

Então (1), (2) *e* (3) *são equivalentes e implicam* (4)*. Se E ou F é separável e tem a propriedade da aproximação limitada, e U e V são conexos, então* $(1)-(4)$ *são equivalentes.*

A demonstração do Teorema 2.3.1 é similar a do Teorema 2.2.2, mas em lugar dos Teoremas 2.2.3 e 2.2.4, utiliza os resultados seguintes.

Teorema 2.3.2 (J. Mujica, [45, 47]). *Sejam E um espaço localmente convexo quase-completo com a propriedade da aproximação e $U \subseteq E$ um aberto polinomialmente convexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau)$ é identificado com U, onde $\tau = \tau_0, \tau_\omega$.*

Teorema 2.3.3 (J. Mujica, [46]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade da aproximação limitada e $U \subseteq E$ um aberto conexo e polinomialmente convexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ é identificado com U.*

Os comentários após a demonstração do Teorema 2.2.2 mostram que no caso das topologias τ_0 e τ_ω, podemos obter um teorema mais geral.

Teorema 2.3.4. *Sejam E e F espaços holomorficamente Mackey quase-completos, um deles com a propriedade da aproximação e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ conjunto abertos polinomialmente convexos. Então as seguinte condições são equivalentes.*

(1) U e V são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

2.4 Funções holomorfas em domínios pseudoconvexos

Nesta seção obtemos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas em domínios pseudoconvexos.

Definição 2.4.1 ([10], Definição 14.1.1). *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto. Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ é* plurisubharmônica *se f é* *semi-contínua superiormente e:*

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+e^{i\theta}b)d\theta,$$

para todos $a \in U$ *e* $b \in E$ *tais que* $a+\overline{\Delta}b \subseteq U$, *onde* $\overline{\Delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Dizemos que um subconjunto aberto U de um espaço localmente convexo E é *pseudoconvexo* se $\widehat{K}_{\mathcal{P}s(U)}$ é relativamente compacto, para cada subconjunto compacto $K \subset U$ (veja caracterização em [10, 14.1.9]). Aqui, $\mathcal{P}s(U)$ denota a família de todas as funções plurisubharmonicas em U, e $\widehat{K}_{\mathcal{P}s(U)}$ denota o conjunto

$$\widehat{K}_{\mathcal{P}s(U)} = \Big\{x \in U : f(x) \leq \sup_K f, \text{ para todo } f \in \mathcal{P}s(U)\Big\}.$$

Seja $f \in \mathcal{P}s(E)$. O aberto $U = \{x \in E : f(x) < 0\}$ é pseudoconvexo, mas não é polinomialmente convexo em geral. Por exemplo, se $f \in \mathcal{H}(E)$, então $\Re(f)$ e $\Im(f)$ são ambas funções plurisubharmônicas.

O próximo resultado melhora o Teorema 2.3.1 para abertos pseudoconvexos.

Teorema 2.4.2. *Sejam E e F espaços de Fréchet, um deles separável com a propriedade da aproximação limitada e $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos conexos e pseudoconvexos. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) U e V são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

(3) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\omega)$ são topologicamente isomorfas.

(4) As álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_\delta)$ são topologicamente isomorfas.

A demonstração do Teorema 2.4.2 é similar a do Teorema 2.2.2, mas em lugar dos Teoremas 2.2.3 e 2.2.4, utiliza os resultados seguintes.

Teorema 2.4.3 (M. Schottenloher, [60]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade da aproximação limitada e $U \subseteq E$ um aberto conexo e pseudoconvexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau)$ é identificado com U, para $\tau = \tau_0$ e τ_ω.*

Teorema 2.4.4 (J. Mujica, [49]). *Sejam E um espaço de Fréchet separável com a propriedade da aproximação limitada e $U \subseteq E$ um aberto conexo e pseudoconvexo. Então o espectro de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ é identificado com U.*

A seguir definiremos uma outra classe de abertos em espaços localmente convexos.

Definição 2.4.5 ([10], Definição 14.1.6). *Sejam E um espaço localmente convexo e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto. Dizemos que U é um* domínio de holomorfia *se não existem subconjuntos abertos conexos V e W de E tais que:*

(1) $W \subseteq U \cap V$ e $V \nsubseteq U$.

(2) Para cada $f \in \mathcal{H}(U)$ existe $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ tal que $f = \tilde{f}$ em W.

Como se sabe, todo domínio de holomorfia é pseudoconvexo, mas em [59, Corolário 3.4], M. Schottenloher mostra que em um espaço de Fréchet separável com a propriedade da aproximação limitada, cada domínio pseudoconvexo é na verdade um domínio de holomorfia.

Para finalizar esta seção, mostramos que em qualquer espaço de Banach é possível construir um par de subconjuntos abertos H e D, onde um deles não é um domínio de holomorfia, que não são biholomorficamente equivalentes, mas as álgebras $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$, τ_ω, τ_δ.

Exemplo 2.4.6. *Seja E um espaço de Banach tal que $dim(E) \geq 2$, e escrevemos $E = \mathbb{C}^2 \oplus N$, onde N é um espaço de Banach. Sejam $D = \{z = (z_1, z_2, w) \in E : |z_1| < R_1, |z_2| < R_2 \,\mathrm{e}\, \|w\| < R\}$ e $H = \{z = (z_1, z_2, w) \in D : |z_1| > r_1 \,\mathrm{ou}\, |z_2| < r_2\}$, onde $0 < R \leq \infty$ e $0 < r_j < R_j \leq \infty$, para $j = 1, 2$. Então as álgebras $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$, τ_ω, τ_δ, mas H e D não são biholomorficamente equivalentes.*

Demonstração: Primeiro provemos que cada $f \in \mathcal{H}(H)$ admite uma única extensão $\tilde{f} \in \mathcal{H}(D)$. Para isso, sejam $\rho_1 > 0$ tal que $r_1 < \rho_1 < R_1$ e $D' = \{z = (z_1, z_2, w) \in D : |z_1| < \rho_1\}$. Observe que $D = H \cup D'$. Dada $f \in \mathcal{H}(H)$, definamos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, w)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1, \text{ para todo } z \in D'. \tag{2.2}$$

Como

$$(\zeta_1 - z_1)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} {z_1}^m {\zeta_1}^{-(m+1)},$$

segue que para z_2 e w fixos, g é uma função holomorfa de z_1, para todo $|z_1| < \rho_1$. Para z_1 e w fixos, a função $\frac{f(\zeta_1, z_2, w)}{\zeta_1 - z_1}$ é uma função diferenciável de z_2, e portanto g é uma função diferenciável de z_2 por [48, Proposição 13.14]. Pelo mesmo argumento temos que, para z_1 e z_2 fixos, g é diferenciável em w. Portanto g é separadamente holomorfa por [48, Teorema 14.7], e portanto holomorfa por [48, Teorema 36.8]. Pela Fórmula Integral de Cauchy para funções holomorfas de uma variável, temos que $g(z) = f(z)$ para todo $z = (z_1, z_2, w)$ tal que $|z_1| < \rho_1$ e $|z_2| < r_2$, e portanto para todo $z \in D' \cap H$, pois $D' \cap H$ é conexo. Assim a função $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f} = f$ em H e $\tilde{f} = g$ em D' é a extensão procurada. Portanto H não pode ser um domínio de holomorfia.

Definamos $T : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathcal{H}(D)$ por $T(f) = \tilde{f}$, para toda $f \in \mathcal{H}(H)$. Então T é um isomorfismo entre álgebras, uma vez que $\tilde{f}$ é única. É fácil ver que $T^{-1} : \mathcal{H}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(H)$ é o operador restrição. Vamos mostrar que as álgebras $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$ e τ_ω. Temos que $D \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}(H), \tau_0)$. De fato, para $z \in D$ definimos

$$h_z : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ por } h_z(f) = \tilde{f}(z), \text{ para todo } f \in \mathcal{H}(H).$$

Se $z \in H$, é claro que h_z é τ_0-contínua. Se $z \in D'$, então $h_z(f) = g(z)$, onde g está definida em (2.2). Temos que existe $C > 0$ tal que

$$|g(z)| \leq C \sup_{|\zeta_1|=\rho_1} |f(\zeta_1, z_2, w)| = C \sup_{z \in K} |f(z)|, \text{ para todo } f \in \mathcal{H}(H),$$

onde $K = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = \rho_1\} \times \{z_2\} \times \{w\}$. Assim h_z é τ_0-contínua e portanto

$$D \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}(H), \tau_0) = \mathcal{S}(\mathcal{H}(H), \tau_\omega) = \Sigma.$$

Consideremos a aplicação $G : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma)$ dada por $G(f) = \hat{f}$, onde $\hat{f}(h) = h(f)$, para todo $h \in \Sigma$. Temos que G é contínua para τ_0 por [2, Seção 4, Teorema 1] e para τ_ω por [42, Teorema 1]. Como $H \subset D \subset \Sigma$, segue que as seguintes aplicaçãos são contínuas

$$(\mathcal{H}(\Sigma), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(D), \tau) \xrightarrow{T^{-1}} (\mathcal{H}(H), \tau) \xrightarrow{G} (\mathcal{H}(\Sigma), \tau), \text{ para } \tau = \tau_0,\ \tau_\omega.$$

E consequentemente temos que $(\mathcal{H}(H), \tau)$ e $(\mathcal{H}(D), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0,\ \tau_\omega$. Resta provar que $T : (\mathcal{H}(H), \tau_\delta) \longrightarrow (\mathcal{H}(D), \tau_\delta)$ é um isomorfismo topológico, mas isto é feito em [58, Teorema 5.3]. (Veja também em [18, 35, 57]).

Vamos agora supor que existe uma aplicação biholomorfa $\varphi : H \longrightarrow D$. Por [57, Teorema 1.8] ou [35, Teorema 2.15], temos que φ admite uma extensão biholomorfa $\overline{\varphi} : \varepsilon(H) \longrightarrow \varepsilon(D)$, onde $\varepsilon(H)$ denota o envelope de holomorfia de H (e o mesmo para $\varepsilon(D)$), tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon(H) & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \varepsilon(D) = D \\ {\scriptstyle\varepsilon}\Big\uparrow & & \Big\uparrow \\ H & \xrightarrow{\varphi} & D \end{array}$$

Como φ e $\overline{\varphi}$ são bijeções, segue que ε é uma bijeção e assim H é um domínio de holomorfia, por [48, Exercício 56.B], o que é uma contradição. ∎

Quando $E = \mathbb{C}^2$, o par (H, D) é chamado *figura de Hartogs* em $\mathbb{C}^2$. O exemplo apresentado acima foi inspirado em [48, Exemplo 10.2].

Definição 2.4.7 ([2], Seção 4)**.** *Seja (U, V) um par de subconjunto abertos em um espaço de Banach tal que $U \subseteq V$. Se toda função holomorfa $f \in \mathcal{H}(U)$ pode ser estendida a uma única função holomorfa $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$, dizemos que (U, V) é um* par de extensão*. Se o isomorfismo algébrico $f \in \mathcal{H}(U) \mapsto \tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ é um isomorfismo topológico para a topologia compacto-aberta, dizemos que (U, V) é um* par de extensão normal.

Neste sentido, o par (H, D) construído no Exemplo 2.4.6 é um par de extensão normal.

Terminamos esta seção com um teorema do tipo Banach-Stone para polinômios em espaços de Banach.

Teorema 2.4.8. *Sejam E e F espaços de Banach, um deles com a propriedade da aproximação. Então são equivalentes.*

(1) Existe um polinômio bijetivo $Q \in \mathcal{P}(F;E)$ tal que $Q^{-1} \in (E;F)$.

(2) As álgebras $(\mathcal{P}(E), \tau_0)$ e $(\mathcal{P}(F), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas.

Para demonstrar este teorema, utilizaremos o seguinte resultado.

Teorema 2.4.9 (J. M. Isidro, [37])**.** *Seja E um espaço localmente convexo quase-completo com a propriedade da aproximação. Então o espectro de $(\mathcal{P}(E), \tau_0)$ é identificado com E.*

Demonstração do Teorema 2.4.8

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $Q \in \mathcal{P}(F;E)$ um polinômio bijetivo tal que $Q^{-1} \in \mathcal{P}(E;F)$. Vamos definir $T : (\mathcal{P}(E), \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{P}(F), \tau_0)$ da seguinte maneira:

$$T(P) = P \circ Q, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}(E).$$

O operador T está bem definido pela Proposição 1.3.3. Para as conclusões restantes basta seguir as mesmas idéias da demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 2.2.2

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $T : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$ um isomorfismo topológico. Usando o Teorema 2.4.9 e seguindo as mesmas idéias da demonstração de (2) $\Rightarrow$ (1) do Teorema 2.2.2, conseguimos uma aplicação holomorfa $Q : F \longrightarrow E$ tal que $T(P) = P \circ Q$, para todo $P \in \mathcal{P}(E)$. Em particular, temos que $f \circ Q \in \mathcal{P}(F)$, para todo funcional linear $f \in E'$. Agora segue de [48, Teorema 3.11] que Q de fato é um polinômio. Aplicando o mesmo raciocínio para T^{-1}, obtemos um polinômio $R : E \longrightarrow F$ tal que $R = Q^{-1}$. ∎

Capítulo 3

Funções holomorfas de tipo limitado em espaços de Banach

Não importa o quanto devagar você caminhe. O importante é não parar. (Confúcio)

No Capítulo 2, provamos que dois abertos convexos e equilibrados U e V em espaços de Fréchet com a propriedade da aproximação são biholomorficamente equivalentes se e somente se as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau_0)$ são topologicamente isomorfas. É natural perguntar se existe um resultado similar para as álgebras de Fréchet $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ de funções holomorfas de tipo limitado. Esta pergunta é respondida de maneira afirmativa neste capítulo, para abertos convexos e equilibrados em espaços de Banach do tipo Tsirelson. Mais ainda, é respondida para certas álgebras de funções holomorfas que são generalizações de $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$.

3.1 Operadores de composição entre álgebras de funções holomorfas de tipo limitado

Sejam E um espaço de Banach complexo e U um subconjunto aberto de E. Lembramos que uma sequência crescente $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos de U é uma *cobertura regular de* U se

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \text{ e } d_{U_{n+1}}(U_n) > 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sejam F um espaço de Banach, e $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura regular de U. Denotamos por $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são limitadas em cada U_n, para $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ é um espaço de Fréchet para a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos U_n. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ ao invés de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{C})$. Neste caso temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ é uma álgebra de Fréchet.

É claro que cada aplicação holomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$ define um operador de composição entre as álgebras $\mathcal{H}(U)$ e $\mathcal{H}(V)$. Mas esse resultado não vale no caso das álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$. Na próxima proposição caracterizamos as aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ que definem um operador de composição entre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$. Lembramos que se $A \subseteq U$, então $\widehat{A}_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$ é o conjunto:

$$\widehat{A}_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})} = \{x \in U \,:\, |f(x)| \leq \sup_A |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\}.$$

Proposição 3.1.1. *Sejam E, F espaços de Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos, $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V, respectivamente. Considere $\varphi \in \mathcal{H}(V; E)$. Então o operador $C_\varphi : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ definido por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, está bem definido e é um homomorfismo contínuo se e somente se para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$.*

Demonstração: Vamos inicialmente supor que C_φ está bem definido e é um homomorfismo contínuo. Seja $k \in \mathbb{N}$. Como C_φ por hipótese é contínuo, temos que existem $C > 0$ e $n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{V_k} |C_\varphi(f)| \leq C \sup_{U_{n_k}} |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}).$$

Através de um argumento clássico, substituímos f por f^n, tomamos raízes n-ésimas e fazemos $n \to \infty$, para obter

$$\sup_{V_k} |C_\varphi(f)| \le \sup_{U_{n_k}} |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}).$$

Seja agora $y \in V_k$. Então $|f(\varphi(y))| = |C_\varphi(f)(y)| \le \sup_{U_{n_k}} |f|$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, ou seja, $\varphi(y) \in (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$. Como y é um elemento arbitrário de V_k, segue que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$.

Reciprocamente, vamos supor que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$ e provar que C_φ está bem definido e é um homomorfismo contínuo entre álgebras. Para mostrar que C_φ está bem definido, é preciso garantir que $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, ou seja, precisamos provar que $f \circ \varphi$ é limitada em cada V_k. Para tal seja $k \in \mathbb{N}$. Por hipótese temos que existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$. Ou seja, se $y \in V_k$ e então $\varphi(y) \in (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$. Logo

$$|f(\varphi(y))| \le \sup_{U_{n_k}} |f| < \infty, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}). \tag{3.1}$$

Como y é um elemento arbritrário de V_k, segue que $f \circ \varphi$ é limitada em V_k, para todos $k \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, provando assim que $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Por fim, segue de (3.1) que C_φ é um homomorfismo contínuo entre as álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, terminando a demonstração. ∎

A proposição acima motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.2. *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos e $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V, respectivamente.*

(1) Denotamos por $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$ o conjunto das aplicações $\varphi \in \mathcal{H}(V;E)$ tais que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})}$.

(2) Seja $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$. Então o operador $C_\varphi : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ definido por $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, é chamado de operador de composição.

O próximo lema, relativo a operadores de composição, será utilizado posteriormente neste texto. Sua demonstração é análoga à do Lema 2.1.1, e por isso será omitida.

Lema 3.1.3. *Sejam E, F e G espaços de Banach e $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ e $W \subseteq G$ subconjuntos abertos. Sejam $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{W} = (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coberturas regulares de U, V e W, respectivamente. Sejam $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$ e $\psi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W};\mathcal{V})$. Então $C_\psi \circ C_\varphi = C_{\varphi\circ\psi} : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{W})$.*

3.2 Funções holomorfas de tipo limitado em domínios absolutamente convexos

Nesta seção apresentamos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas de tipo limitado em domínios absolutamente convexos.

Em [64], B. Tsirelson constrói um espaço de Banach reflexivo X, com uma base de Schauder incondicional, que não contém nenhum subespaço isomorfo a c_0 ou a qualquer l_p. R. Alencar, R. Aron e S. Dineen provam em [1] que $\mathcal{P}_f({}^mX)$ é denso em norma em $\mathcal{P}({}^mX)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Inspirados por este resultado, dizemos que um espaço de Banach E é *do tipo Tsirelson* se E é reflexivo e $\mathcal{P}_f({}^mE)$ é denso em norma em $\mathcal{P}({}^mE)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

A fim de demonstrar o resultado principal desta seção, vamos provar um resultado intermediário, que é o próximo teorema.

Teorema 3.2.1. *Sejam E um espaço de Banach do tipo Tsirelson, e F um espaço de Banach. Sejam $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado e $V \subseteq F$ um subconjunto aberto. Sejam $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V respectivamente, onde cada U_n é limitado e circular. Então para cada homomorfismo contínuo $T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ existe uma única aplicação $\varphi : U \longrightarrow V$ tal que $T(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. A aplicação φ pertence a $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$.*

Para provar este teorema, usamos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.2 (J. Mujica, [51])**.** *Sejam E um espaço de Banach do tipo Tsirelson, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e equilibrado e $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura regular de U onde cada U_n é limitado e circular. Então o espectro de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ é identificado com U.*

Demonstração do Teorema 3.2.1: Seja $T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ um homomorfismo contínuo. Vamos construir uma aplicação holomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$. Para tal seja $w \in V$. Então $\delta_w \circ T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo contínuo. Pelo Teorema 3.2.2, existe um único $z \in U$ tal que $\delta_w \circ T = \delta_z$. Definamos $\varphi : V \longrightarrow U$ por $\varphi(w) = z$. Temos que

$$(\delta_w \circ T)(f) = f(z) = f(\varphi(w)), \text{ para todos } w \in V,\ f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}),$$

ou seja, $T(f)(w) = f(\varphi(w))$ para todos $w \in V$ e $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Logo $T(f) = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$.

Em particular, temos que $T(f) = f \circ \varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, para toda $f \in E'$, ou seja, φ é w-holomorfa e consequentemente holomorfa, por [48, Teorema 8.12.b]. Para provar a unicidade de φ, vamos supor que existe uma aplicação holomorfa $\psi : V \longrightarrow U$ tal que $T(f) = f \circ \psi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Portanto $f \circ \psi = f \circ \varphi$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Em particular, temos que $f(\psi(w)) = f(\varphi(w))$, para todos $f \in E'$ e $w \in V$. Segue do teorema de Hahn-Banach que $\psi(w) = \varphi(w)$, para todo $w \in V$, ou seja, $\psi = \varphi$ e portanto φ é única.

Resta mostrar que $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$. Mas isto é imediato, pois, uma vez que $T = C_\varphi$ é um homomorfismo contínuo, segue da Proposição 3.1.1 que $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$. ∎

Agora estamos prontos para demonstrar o seguinte resultado, que é o principal teorema desta seção.

Teorema 3.2.3. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados, $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V respectivamente, tais que cada U_n e V_n são limitados e circulares. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) Existe uma aplicação bijetiva $\varphi : V \longrightarrow U$ tal que $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$ e $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};\mathcal{V})$.

(2) As álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Como $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$, segue da Proposição 3.1.1 que o operador $C_\varphi : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ está bem definido, e é um homomorfismo contínuo, e analogamente para $C_{\varphi^{-1}}$. Pelo Lema 3.1.3 temos que $C_\varphi \circ C_{\varphi^{-1}} = C_{\varphi^{-1}\circ\varphi} = C_{id} = Id$ e analogamente $C_{\varphi^{-1}} \circ C_\varphi = Id$. Logo C_φ é uma bijeção e $(C_\varphi)^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$. Assim as álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas.

(2) $\Rightarrow$ (1)

(a) Vamos supor inicialmente que E e F são do tipo Tsirelson. Seja $T : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ um isomorfismo topológico. Pelo Teorema 3.2.1, existem $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};\mathcal{U})$ com $\varphi(V) \subseteq U$ e $\psi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};\mathcal{V})$ com $\psi(U) \subseteq V$, tais que $T(f) = f \circ \varphi$ e $T^{-1}(g) = g \circ \psi$, para todas $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$.

Vamos mostrar que φ é invertível e que $\varphi^{-1} = \psi$. Com efeito, temos que $Id = T \circ T^{-1}$, ou seja, $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para cada $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$. Portanto, para cada $w \in V$ temos que $g(w) = g(\psi(\varphi(w))$, para todo funcional $g \in F'$. Por Hahn-Banach, temos que $w = \psi(\varphi(w))$, para todo $w \in V$. Analogamente mostramos que $z = \varphi(\psi(z))$, para todo $z \in U$, o que mostra que φ é invertível e que $\varphi^{-1} = \psi$.

(b) Vamos supor agora que somente E é do tipo Tsirelson, e provar que F também é. Seja $\varphi : V \longrightarrow U$ a aplicação holomorfa obtida no Teorema 3.2.1. Para cada $z \in U$ temos que $\delta_z \circ T^{-1} : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo contínuo, e portanto existem $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|\delta_z \circ T^{-1}(g)| \leq C\|g\|_{V_n},$$

para toda $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Como V_n é limitado e $F' \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$, segue que $\delta_z \circ T^{-1}|_{F'}$ é um elemento de $F'' = F$. Portanto existe um único $b \in F$ tal que $\delta_z \circ T^{-1}|_{F'} = \delta_b$.

Definamos $\psi : U \longrightarrow F$ por $\psi(z) = b$, para todo $z \in U$ e assim temos que $T^{-1}(g)(z) = g(b) = g(\psi(z))$, para todos $g \in F'$ e $z \in U$. Em particular segue que $T^{-1}(g) = g \circ \psi \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, para todo $g \in F'$, o que mostra que ψ é fracamente holomorfa e portanto holomorfa por [48, Teorema 8.12.b]. Aplicando T em ambos os lados da última igualdade, temos que $g = g \circ \psi \circ \varphi$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach segue que $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow V$ é a aplicação identidade. Aplicando o Lema 1.4.3, temos que F é topologicamente isomorfo a um subspaço complementado de E, e assim segue da Proposição 1.3.1 que F é do tipo Tsirelson. Para concluir a demonstração, basta aplicar a parte (a). ∎

Como consequência do Teorema 3.2.3, temos o seguinte resultado de extensão.

Corolário 3.2.4. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados, $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coberturas regulares de U e V respectivamente, tais que cada U_n e V_n são limitados e circulares. Se as álgebras $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas então as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$, τ_ω e τ_δ.*

Demonstração: Se $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V})$ são topologicamente isomorfas, então pelo Teorema 3.2.3 existe uma aplicação biholomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$. Consideremos o operador de composição $C_\varphi : (\mathcal{H}(U), \tau) \longrightarrow (\mathcal{H}(V), \tau)$. Então C_φ é um isomorfismo topológico para τ_0, τ_ω e τ_δ, pela Proposição 2.1.2. ∎

Consideremos agora os seguintes subconjuntos abertos de U.

$$U_n = \{x \in U \ : \ \|x\| < n \text{ e } d_U(x) > 2^{-n}\}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A família $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma sequência de subconjuntos abertos limitados que cobre U e $d_{U_{n+1}}(U_n) > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que, neste caso, o espaço $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ é na verdade $\mathcal{H}_b(U; F)$, o espaço das aplicações holomorfas de tipo limitado de U em F, para qualquer espaço de Banach F. Seja $V \subseteq F$ um subconjunto aberto, e $\mathcal{V} = (V_n)$ definido de maneira similar à feita acima. Então o conjunto $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ será denotado por $\mathcal{H}_b(V; U)$.

É natural perguntar se o conjunto

$$\mathcal{H}_b(V; U) = \{\varphi \in \mathcal{H}(V; F) \ : \ \varphi(V) \subseteq U \text{ e para cada } k \in \mathbb{N} \text{ existe } n_k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}_b(U)}\}$$

coincide com o conjunto de todas as aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ que levam subconjuntos V-limitados em subconjuntos U-limitados. É claro que se φ é tal aplicação, então $\varphi \in \mathcal{H}_b(V; U)$.

Reciprocamente, podemos responder a esta pergunta de maneira afirmativa quando o aberto U pertence à seguinte classe de subconjuntos abertos de E.

Sejam E um espaço de Banach, U um subconjunto aberto de E e A um subconjunto U-limitado. Consideremos o seguinte conjunto

$$\widehat{A}_{\mathcal{H}_b(U)} = \{x \in U \, : \, |f(x)| \leq \sup_A |f|, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}_b(U)\}.$$

Dizemos que U é $\mathcal{H}_b(U)$-*convexo* se $\widehat{A}_{\mathcal{H}_b(U)}$ é um subconjunto U-limitado, para todo A subconjunto U-limitado.

Por exemplo, todo aberto convexo é $\mathcal{H}_b(U)$-convexo. De fato, como $\mathbb{C} \oplus E' \subseteq \mathcal{H}_b(U)$, então $(\widehat{U_n})_{\mathcal{H}_b(U)} \subseteq (\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora segue da Proposição 1.4.8 que $(\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'}$ é limitado e que $d_U((\widehat{U_n})_{\mathbb{C}\oplus E'}) = d_U(U_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(\widehat{U_n})_{\mathcal{H}_b(U)}$ é U-limitado, para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto U é $\mathcal{H}_b(U)$-convexo.

Na próxima proposição respondemos à pergunta feita acima, para abertos $\mathcal{H}_b(U)$-convexos.

Proposição 3.2.5. *Sejam E, F espaços de Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos, onde U é $\mathcal{H}_b(U)$-convexo. Então o espaço $\mathcal{H}_b(V;U)$ coincide com o espaço das aplicações holomorfas $\varphi : V \longrightarrow U$ que levam subconjuntos V-limitados em subconjuntos U-limitados.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathcal{H}_b(V;U)$ e B um subconjunto V-limitado. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \subseteq V_k$. Por hipótese existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(V_k) \subseteq (\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}_b(U)}$. Agora $(\widehat{U_{n_k}})_{\mathcal{H}_b(U)}$ é um subconjunto U-limitado, pois U é $\mathcal{H}_b(U)$-convexo. ∎

Se U é convexo e equilibrado então segue da Proposição 1.4.6 que a sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.3, e assim temos os seguintes corolários.

Corolário 3.2.6. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) Existe uma aplicação bijetiva $\varphi : V \longrightarrow U$ tal que $\varphi \in \mathcal{H}_b(V;U)$ e $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}_b(U;V)$.

(2) As álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas.

Corolário 3.2.7. *Sejam E e F espaços de Banach reflexivos, um deles do tipo Tsirelson. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Se as álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas então as álgebras $(\mathcal{H}(U), \tau)$ e $(\mathcal{H}(V), \tau)$ são topologicamente isomorfas, para $\tau = \tau_0$, τ_ω e τ_δ.*

O Corolário 3.2.6 foi obtido de maneira independente em [16], como consequência do seguinte teorema.

Teorema 3.2.8 (D. Carando, D. García, M. Maestre, [16])**.** *Sejam E e F espaços de Banach, e suponha que $\mathcal{P}_f({}^m E'')$ é denso em norma em $\mathcal{P}({}^m E'')$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sejam $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ subconjuntos abertos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

1. *As álgebras $\mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{H}_b(V)$ são topologicamente isomorfas.*
2. *Existe uma aplicação bijetiva $\varphi : \overset{\circ}{\overline{V}^*} \longrightarrow \overset{\circ}{\overline{U}^*}$ tal que $\varphi \in \mathcal{H}_b\big(\overset{\circ}{\overline{V}^*}; \overset{\circ}{\overline{U}^*}\big)$ e $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}_b\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}; \overset{\circ}{\overline{V}^*}\big)$.*

Se os espaços de Banach E e F não são reflexivos, vemos pelo Teorema acima que não se pode obter um teorema do tipo Banach-Stone tal como está enunciado no Corolário 3.2.6, em outras palavras, a aplicação biholomorfa no caso não reflexivo se dá entre dois subconjuntos abertos dos respectivos biduais E'' e F'', e não de E e F.

No próximo exemplo mostramos que em qualquer espaço de dimensão finita é possível construir um par de abertos H e D onde um deles não é um domínio de holomorfia e o Corolário 3.2.6 falha. Mais especificamente, demonstramos que as álgebras $\mathcal{H}_b(H)$ e $\mathcal{H}_b(D)$ são topologicamente isomorfas mas H e D não são biholomorficamente equivalentes. Apesar de ser um caso particular do Exemplo 2.4.6, vamos apresentar a demonstração, pois neste caso ela é um pouco diferente, porém bem mais simples.

Exemplo 3.2.9. *Sejam $D = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < R_j, \text{ para } j = 1, \cdots, n\}$, onde $n \geq 2$ e $0 < R_j \leq \infty$, para todo $j = 1, \cdots, n$; e $H = \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in D, : |z_1| > r_1 \text{ ou } |z_2| < r_2\}$, onde*

$0 < r_j < R_j \leq \infty$, *para* $j = 1, 2$. *Então as álgebras* $\mathcal{H}_b(H)$ *e* $\mathcal{H}_b(D)$ *são topologicamente isomorfas mas* H *e* D *não são biholomorficamente equivalentes.*

Demonstração: Vamos provar que cada $f \in \mathcal{H}(H)$ admite uma única extensão $\tilde{f} \in \mathcal{H}(D)$. Para tal, sejam $\rho_1 > 0$ tal que $r_1 < \rho_1 < R_1$ e $D' = \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in D : |z_1| < \rho_1\}$. Observe que $D = H \cup D'$. Dada $f \in \mathcal{H}(H)$, definamos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| = \rho_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1, \text{ para toda } z \in D'.$$

Pelos mesmos argumentos de [48, Exemplo 10.2] ou do Exemplo 2.4.6, temos g é separadamente holomorfa e como g é claramente localmente limitada, segue de [48, Lemas 8.8 e 8.9] que g é holomorfa, ou seja $g \in \mathcal{H}(D')$. Pela Fórmula Integral de Cauchy para funções holomorfas de uma variável, temos que $g(z) = f(z)$ para todo $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ tal que $|z_1| < \rho_1$ e $|z_2| < r_2$, e portanto para todo $z \in D' \cap H$, pois $D' \cap H$ é conexo. Assim a função $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f} = f$ em H e $\tilde{f} = g$ em D' é a extensão procurada. A unicidade da extensão é clara. Portanto H não pode ser um domínio de holomorfia.

Agora definamos $T : \mathcal{H}(H) \longrightarrow \mathcal{H}(D)$ por $T(f) = \tilde{f}$, para todo $f \in \mathcal{H}(H)$. É claro que T é um isomorfismo entre álgebras e $T^{-1} : \mathcal{H}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(H)$ é o operador restrição. Como $T^{-1} : \mathcal{H}_b(D) \longrightarrow \mathcal{H}_b(H)$ é contínuo e $\mathcal{H}_b(H)$ e $\mathcal{H}_b(D)$ são álgebras de Fréchet, segue do Teorema da Aplicação Aberta que T é um isomorfismo topológico.

Para mostrar que H e D não são biholomorficamente equivalentes, basta seguir os mesmos argumentos do Exemplo 2.4.6. ∎

O Exemplo 3.2.9 nos leva a crer que os Teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de funções holomorfas de tipo limitado também não podem ir além de domínios de holomorfia.

Capítulo 4

Germes de funções holomorfas em espaços de Banach

Primeiro, faça o necessário; depois faça o possível, e de repente você vai perceber que pode fazer o impossível. (São Francisco de Assis)

Uma outra álgebra que merece destaque é a álgebra de germes holomorfos em um compacto de um espaço de Banach. Neste capítulo apresentamos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de germes holomorfos em subconjuntos compactos absolutamente convexos em espaços do tipo Tsirelson e do tipo Tsirelson-James. Ainda que existam estudos acerca do espectro de álgebras de germes holomorfos, vemos nesta seção que a técnica para estabelecer teoremas do tipo Banach-Stone para tais álgebras difere da que tem sido utilizada nos capítulos anteriores.

4.1 Germes de funções holomorfas em espaços do tipo Tsirelson

Nesta seção apresentamos teoremas do tipo Banach-Stone para álgebras de germes de funções holomorfas em subconjuntos compactos absolutamente convexos.

Sejam E e F espaços de Banach, $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos compactos. Dizemos que K_E e L_E são *biholomorficamente equivalentes* se existem subconjuntos abertos $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ com $K \subset U$ e $L \subset V$ e uma aplicação biholomorfa $\varphi : V \longrightarrow U$ tal que $\varphi(L) = K$.

A seguir temos o principal teorema desta seção.

Teorema 4.1.1. *Sejam E e F espaços do tipo Tsirelson, $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos compactos convexos equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sejam $V \supset L$, $U \supset K$ subconjuntos abertos, e $\varphi : V \longrightarrow U$ uma aplicação biholomorfa tal que $\varphi(L) = K$. Definamos $T : \mathcal{H}(K) \longrightarrow \mathcal{H}(L)$ da seguinte forma. Dada $[f] \in \mathcal{H}(K)$, escolhamos um representante $f \in \mathcal{H}(U_0)$, onde U_0 é um aberto de E contendo K, e seja $V_0 = \varphi^{-1}(U \cap U_0)$. Então definimos $T([f]) = [f \circ (\varphi|_{V_0})] \in \mathcal{H}(L)$, pois $L \subset V_0$.

Sejam $[f_1], [f_2] \in \mathcal{H}(K)$ tais que $[f_1] = [f_2]$. Consideremos U_1 e U_2 subconjuntos abertos de E contendo K tais que $f_1 \in \mathcal{H}(U_1)$ e $f_2 \in \mathcal{H}(U_2)$, e $O \subseteq U_1 \cap U_2$ tal que $f_1 = f_2$ em O. Sejam $V_1 = \varphi^{-1}(U \cap U_1)$, $V_2 = \varphi^{-1}(U \cap U_2)$ e $W = \varphi^{-1}(U \cap O)$. Então W é um subconjunto aberto de $V \cap V_1 \cap V_2$ contendo L. Seja $w \in W$. Então

$$f_1 \circ (\varphi|_{V_1})(w) = f_1 \circ \varphi(w) = f_1|_{U \cap O}(\varphi(w)) = f_2|_{U \cap O}(\varphi(w)) = f_2 \circ \varphi(w) = f_2 \circ (\varphi|_{V_2})(w).$$

Logo $[f_1 \circ (\varphi|_{V_1})] = [f_2 \circ (\varphi|_{V_2})]$, ou seja, $T([f_1]) = T([f_2])$. Assim T está bem definida.

Para mostrar que T é linear, considere $[f_1], [f_2] \in \mathcal{H}(K)$ e os abertos construídos acima. Não é difícil ver que

$$[f_1 \circ (\varphi|_{V_1}) + f_2 \circ (\varphi|_{V_2})] = [(f_1 + f_2) \circ (\varphi|_W)],$$

uma vez que $W \subseteq V \cap V_1 \cap V_2$. Com isso concluímos que

$$T([f_1] + [f_2]) = T([f_1 + f_2]) = [(f_1 + f_2) \circ (\varphi|_W)] =$$

$$= [f_1 \circ (\varphi|_{V_1}) + f_2 \circ (\varphi|_{V_2})] = [f_1 \circ (\varphi|_{V_1})] + [f_2 \circ (\varphi|_{V_2})] = T([f_1]) + T([f_2]).$$

De maneira análoga mostramos que $T(\lambda[f]) = \lambda T([f])$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $[f] \in \mathcal{H}(K)$, e também que T é multiplicativa. Portanto T é um homomorfismo entre álgebras.

Para mostrar que T é contínuo, sejam $U_\alpha \supset K$ um subconjunto aberto e $V_\alpha = \varphi^{-1}(U \cap U_\alpha) \subseteq V$. Denotemos $\varphi_\alpha = \varphi_{|V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow E$, com $\varphi_\alpha(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$. Considere $i_{U_\alpha} : \mathcal{H}(U_\alpha) \hookrightarrow (\mathcal{H}(K), \tau_\omega)$ a inclusão canônica, e da mesma forma $i_{V_\alpha} : \mathcal{H}(V_\alpha) \hookrightarrow (\mathcal{H}(L), \tau_\omega)$. Então o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}(K), \tau_\omega) & \xrightarrow{T} & (\mathcal{H}(L), \tau_\omega) \\ {\scriptstyle i_{U_\alpha}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle i_{V_\alpha}} \\ (\mathcal{H}(U_\alpha), \tau_\omega) & \xrightarrow{C_{\varphi_\alpha}} & (\mathcal{H}(V_\alpha), \tau_\omega) \end{array}$$

Com efeito, seja $f \in \mathcal{H}(U_\alpha)$. Então $T \circ i_{U_\alpha}(f) = T([f]) = [f \circ (\varphi|_{V_\alpha})] = [f \circ \varphi_\alpha] = i_{V_\alpha}(f \circ \varphi_\alpha) = i_{V_\alpha} \circ C_{\varphi_\alpha}(f)$.

Como pela Proposição 2.1.2 C_{φ_α} é contínuo, concluímos que T também é contínuo pelo Teorema 1.2.7. Seja $\psi = \varphi^{-1}$, e definamos $S : \mathcal{H}(K) \longrightarrow \mathcal{H}(L)$ da mesma maneira que definimos T, usando neste caso ψ ao invés de φ, e vamos mostrar que as álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Dada $[f] \in \mathcal{H}(K)$, sejam U_0 um aberto de E contendo K tal que $f \in \mathcal{H}(U_0)$; e $V_0 = \varphi^{-1}(U \cap U_0)$. Então por definição $T([f]) = [f \circ \left(\varphi|_{V_0}\right)] = [g]$, onde $g = f \circ \left(\varphi|_{V_0}\right) \in \mathcal{H}(V_0)$. Agora pela definição de S segue que

$$S(T([f])) = S([g]) = [g \circ \left(\psi|_{U \cap U_0}\right)] = [f \circ (\varphi|_{V_0}) \circ (\psi|_{U \cap U_0})] = [f],$$

pois $(\varphi|_{V_0}) \circ (\psi|_{U\cap U_0})$ é a identidade em $U \cap U_0$. De maneira análoga provamos que $T(S([g])) = [g]$, para todo $[g] \in \mathcal{H}(L)$, ou seja $S = T^{-1}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $T : \mathcal{H}(K) \longrightarrow \mathcal{H}(L)$ um isomorfismo topológico, e denotemos $S = T^{-1}$. Recordemos que $U_n = K + B_E(0, \frac{1}{n})$ e $V_n = L + B_F(0, \frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(\mathcal{H}(K), \tau_\omega) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_b(U_k)$, e cada $\mathcal{H}_b(U_k)$ é um espaço de Fréchet, segue do Teorema 1.2.8 que para cada inteiro $k \in \mathbb{N}$ fixado, existe $m_k \in \mathbb{N}$ e um operador linear contínuo $T_k : \mathcal{H}_b(U_k) \longrightarrow \mathcal{H}_b(V_{m_k})$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(K) & \xrightarrow{T} & \mathcal{H}(L) \\ {\scriptstyle i_k}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_{m_k}} \\ \mathcal{H}_b(U_k) & \xrightarrow{T_k} & \mathcal{H}_b(V_{m_k}) \end{array}$$

Ou em outras palavras $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$. Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{H}_b(U_k)$. Então $[T_k(f_1 \cdot f_2)] = i_{m_k} \circ T_k(f_1 \cdot f_2) = T \circ i_k(f_1 \cdot f_2) = T([f_1 \cdot f_2]) = T([f_1]) \cdot T([f_2]) = (T \circ i_k(f_1)) \cdot (T \circ i_k(f_2)) = (i_{m_k} \circ T_k(f_1)) \cdot (i_{m_k} \circ T_k(f_2)) = [T_k(f_1) \cdot T_k(f_2)]$. Portanto existe um subconjunto aberto $W \subseteq V_{m_k}$ tal que $T_k(f_1 \cdot f_2) = T_k(f_1) \cdot T_k(f_2)$ em W. Como V_{m_k} é convexo, segue do Princípio da Identidade [48, Proposição 5.7] que $T_k(f_1 \cdot f_2) = T_k(f_1) \cdot T_k(f_2)$ em V_{m_k}, e assim T_k é multiplicativo.

Como E é do tipo Tsirelson e U_k é convexo e equilibrado, segue do Teorema 3.2.1 que existe uma aplicação holomorfa $\varphi_k : V_{m_k} \longrightarrow E$ com $\varphi_k(V_{m_k}) \subseteq U_k$, tal que $T_k = C_{\varphi_k}$. Aplicando este mesmo argumento ao isomorfismo topológico $S : \mathcal{H}(L) \longrightarrow \mathcal{H}(K)$ e ao inteiro m_k, podemos encontrar um inteiro n_k, estritamente maior que k, e uma aplicação holomorfa $\psi_k : U_{n_k} \longrightarrow F$ com $\psi_k(U_{n_k}) \subseteq V_{m_k}$, tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(L) & \xrightarrow{S} & \mathcal{H}(K) \\ {\scriptstyle i_{m_k}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_{n_k}} \\ \mathcal{H}_b(V_{m_k}) & \xrightarrow{C_{\psi_k}} & \mathcal{H}_b(U_{n_k}) \end{array}$$

Ou seja, $S \circ i_{m_k} = i_{n_k} \circ C_{\psi_k}$. Como $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$, aplicando S nesta igualdade, obtemos $S \circ T \circ i_k = S \circ i_{m_k} \circ T_k$, e assim

$$i_k = i_{n_k} \circ C_{\psi_k} \circ C_{\varphi_k}.$$

Em particular temos que $i_k(f) = i_{n_k} \circ C_{\psi_k} \circ C_{\varphi_k}(f)$, para todo funcional linear $f \in E'$, ou seja $[f] = [f \circ \varphi_k \circ \psi_k]$, para todo $f \in E'$. Portanto existe um aberto $O \subseteq U_{n_k}$ tal que $f = f \circ \varphi_k \circ \psi_k$ em O. Como U_{n_k} é convexo, segue novamente do Princípio de Identidade [48, Proposição 5.7] que $f = f \circ \varphi_k \circ \psi_k$ em U_{n_k}, para todo $f \in E'$, e assim concluímos através do Teorema de Hahn-Banach que $\varphi_k \circ \psi_k : U_{n_k} \longrightarrow U_k$ é a aplicação inclusão.

Assim, temos sequências crescentes $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$; e aplicações holomorfas

$$\varphi_k : V_{m_k} \longrightarrow U_k \text{ e } \psi_k : U_{n_k} \longrightarrow V_{m_k},$$

tais que $\varphi_k \circ \psi_k : U_{n_k} \longrightarrow U_k$ é a aplicação inclusão, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Afirmação 1: $\varphi_1 = \varphi_k$ sobre cada V_{m_k}. De fato, como $E' \subseteq \mathcal{H}_b(U_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $T([f]) = [f \circ \varphi_1] = [f \circ \varphi_k]$, para cada $f \in E'$ e cada $k \in \mathbb{N}$. Através de um raciocínio já utilizado nesta demonstração, concluímos que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_k$ em V_{m_k}, para todo $f \in E'$ e pelo Teorema de Hahn-Banach que $\varphi_1 = \varphi_k$ em V_{m_k}. Pelos mesmos argumentos mostramos que $\psi_1 = \psi_k$ sobre cada U_{n_k}.

Afirmação 2: T depende apenas de φ_1. Com efeito, sejam $[f] \in \mathcal{H}(K)$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$. Segue da Afirmação 1 que $T([f]) = [f \circ \varphi_k] = [f \circ (\varphi_1|_{V_{m_k}})]$; e de maneira análoga, para cada $g \in \mathcal{H}_b(V_{m_k})$ temos que $S([g]) = [g \circ \psi_k] = [g \circ (\psi_1|_{U_{n_k}})]$.

Afirmação 3: $\varphi_1(L) \subseteq K$. De fato, como $L \subset V_{m_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da Afirmação 1 que $\varphi_1(L) = \varphi_k(L) \subseteq U_k = K + B(0, \frac{1}{k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como K é fechado, segue que $\varphi_1(L) \subseteq K$. Pelos mesmos argumentos temos que $\psi_1(K) \subseteq L$.

Como vemos através das Afirmações 1, 2 e 3, φ_1 parece ser a principal candidata para a aplicação biholomorfa que leva L em K. Neste sentido, iremos nos restringir daqui em diante aos abertos U_{n_1}, V_{m_1} e $V_{m_{n_1}}$.

Para cada $g \in F' \subseteq \mathcal{H}_b(V_{m_1})$ temos que $S([g]) = [g \circ \psi_1]$. Como $g \circ \psi_1 \in \mathcal{H}_b(U_{n_1})$ segue da Afirmação 2 que $T \circ S([g]) = [(g \circ \psi_1) \circ \varphi_{n_1}] = [g \circ \psi_1 \circ (\varphi_1|_{V_{m_{n_1}}})]$. Por outro lado, $T \circ S([g]) = [g]$, e como $V_{m_{n_1}}$ é convexo, segue do Princípio de Identidade [48, Proposição 5.7] que $g = g \circ \psi_1 \circ \varphi_1$ em $V_{m_{n_1}}$, para todo $g \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach temos que $\psi_1 \circ \varphi_1 : V \longrightarrow V$ é a aplicação identidade, onde $V = V_{m_{n_1}}$. Se denotarmos $U = \psi_1^{-1}(V)$, temos que $U \subseteq U_{n_1}$ e assim $\varphi_1 \circ \psi_1 : U \longrightarrow U$ é a aplicação identidade.

Como $\psi_1(\varphi_1(V)) = V$, temos que $\varphi_1(V) \subseteq \psi_1^{-1}(V) = U$. Finalmente, definimos $\varphi = \varphi_1|_V : V \longrightarrow U$ e $\psi = \psi_1|_U : U \longrightarrow V$. Assim temos que $\varphi^{-1} = \psi$ e pela Afirmação 3 segue que $\varphi(L) = K$. Com isso concluímos que K e L são biholomorficamente equivalentes. ∎

A demonstração do Teorema 4.1.1 foi inspirada em idéias de [19, 20].

Não sabemos se o Teorema 4.1.1 continua válido se apenas um dos espaços de Banach E ou F é do tipo Tsirelson.

É claro que todo espaço de dimensão finita é do tipo Tsirelson, mas neste caso o Teorema 4.1.1 é válido para uma classe maior de subconjuntos compactos, a saber os conjuntos *Oka-Weil compactos*. Dizemos que um subconjunto compacto K de um espaço de Banach é *Oka-Weil compacto* se existe um conjunto aberto pseudoconvexo U contendo K tal que $K = \widehat{K}_{\mathcal{P}s(U)}$.

Um subconjunto compacto K de um espaço de Banach E é *polinomialmente convexo* se $\widehat{K}_{\mathcal{P}(E)} = K$. Se K é formado de dois elementos, então K é polinomialmente convexo. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergindo a um ponto $x \in E$. Então $K = \{x_n\ : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é polinomialmente convexo.

Exemplos 4.1.2. *A seguir apresentamos alguns exemplos de conjuntos Oka-Weil compactos.*

(1) Todo compacto polinomialmente convexo é Oka-Weil compacto.

(2) Sejam U um aberto pseudoconvexo, L um subconjunto compacto de U e $K = \widehat{L}_{\mathcal{P}_{sc}(U)}$. Então K é Oka-Weil compacto.

O próximo teorema melhora o Teorema 4.1.1 para espaços de dimensão finita.

Teorema 4.1.3. *Sejam E e F espaços de dimensão finita, $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos Oka-Weil compactos e conexos. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $\mathcal{H}(K)$ e $\mathcal{H}(L)$ são topologicamente isomorfas.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) É idêntica à demonstração do Teorema 4.1.1.

(2) $\Rightarrow$ (1) Afirmamos que $\mathcal{H}(K)$ é o limite indutivo de uma sequência de espaços $(\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega)$, onde cada W_n é conexo e pseudoconvexo (e o mesmo para $\mathcal{H}(L)$). Com efeito, seja $U_n = K + B(0; \frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja U um aberto pseudoconvexo tal que $K = \widehat{K}_{\mathcal{P}_s(U)}$. Então por [48, Teorema 46.2], para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto aberto pseudoconvexo V_n tal que $K \subset V_n \subseteq U \cap U_n$. Seja W_n a componente conexa de V_n que contém K. Por [48, Exercício 37.A], temos que $W_n \subseteq U_n$ é pseudoconvexo. Como $\mathcal{H}(K) = \underrightarrow{lim}_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{H}(U_n), \tau_\omega)$ e a inclusão $(\mathcal{H}(U_n), \tau_\omega) \hookrightarrow (\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega)$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\mathcal{H}(K) = \underrightarrow{lim}_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega).$$

Agora basta aplicar os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 4.1.1. O Teorema 1.2.8 pode ser aplicado neste caso uma vez que em dimensão finita $(\mathcal{H}(W_n), \tau_\omega)$ é uma álgebra de Fréchet, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que para abertos conexos e pseudoconvexos utilizamos o Teorema 2.4.2 ao invés do Teorema 3.2.1 para obter as sequências de aplicações holomorfas $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ∎

4.2 Germes de funções holomorfas em espaços do tipo Tsirelson-James

Neste seção mostramos que é possível generalizar o Teorema 4.1.1 para espaços de Banach do tipo Tsirelson-James.

Em [17], P. G. Casazza et al constróem um espaço de Banach não reflexivo X que não contém nenhum subespaço isomorfo a c_0 ou a algum l_p, (veja também [25, Exemplo 2.43]). Em [13, Observação 5.9.2(b)], G. Botelho mostra que $\mathcal{P}_f(^m X)$ é denso em $\mathcal{P}(^m X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Mais propriedades de X são estudadas em [21]. O espaço X é conhecido como espaço de Tsirelson-James.

Neste sentido, vamos dizer que um espaço de Banach E é *do tipo Tsirelson-James* se $\mathcal{P}_f(^m E)$ é denso em $\mathcal{P}(^m E)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Exemplos 4.2.1. *A seguir apresentamos alguns exemplos de espaços do tipo Tsirelson-James.*

(1) O espaço de sequências c_0 é do tipo Tsirelson-James. Veja por exemplo em [13, Observação 5.9.2 (b)]. Este fato é conhecido como Teorema de Littlewood-Bogdanowicz-Pelczynski, veja em [13, Observação 5.9.2 (c)].

(2) O predual do espaço de Stegall [61] é um espaço do tipo Tsirelson-James. Isto está demonstrado, por exemplo, em [63, Proposição 2.2 (3)].

(3) Seja w uma sequência descrescente de números positivos em $c_0 \setminus \ell_p$, para $p > 1$. Considere o predual do espaço das sequências de Lorentz $d(w, 1)$ [41, Definição 4.e.1]. Então tal espaço é do tipo Tsirelson-James. Isto está demonstrado, por exemplo, em [54, Exemplos 2.4 (b)].

(4) Seja X um espaço topológico Hausdorff compacto e disperso (isto é, todo subconjunto fechado de X contém um ponto isolado). Então $\mathcal{C}(X)$ é do tipo Tsirelson-James, veja por exemplo em [28, Exemplo 2.1].

Os próximos teoremas de extensão são usados na demostração do resultado principal desta seção. São resultados relativos à extensão de Aron-Berner, [3], de funções holomorfas de tipo limitado em abertos convexos e equilibrados.

Teorema 4.2.2 (P. Galindo, D. García, M. Maestre, [26])**.** *Seja U um subconjunto aberto absolutamente convexo de um espaço de Banach E. Então existe uma extensão linear, multiplicativa e isométrica $AB : \mathcal{H}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{\overline{U}^*})$.*

Teorema 4.2.3 (P. Galindo, D. García, M. Maestre, [26])**.** *Seja U um subconjunto aberto absolutamente convexo de um espaço de Banach E. Então para cada $f \in \mathcal{H}_b(U)$ existe $\bar{f} \in \mathcal{H}_b\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big)$ tal que $\bar{f}|_U = f$.*

Para definição de espaço localmente convexo distinguido, veja [36, 3-§16, Definição 1].

Sejam E um espaço de Banach, $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado e $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$ ou $f \in \mathcal{H}_b(U)$. Durante toda esta seção, $\bar{f}$ denotará a extensão de f obtida nos Teoremas 4.2.2 ou 4.2.3.

A próxima proposição mostra que em espaços do tipo Tsirelson-James, extensões como as dos Teoremas 4.2.2 e 4.2.3 são únicas.

Proposição 4.2.4. *Sejam E um espaço do tipo Tsirelson-James, e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto convexo e equilibrado. Sejam $f \in \mathcal{H}_b(U)$ e $g \in \mathcal{H}_b(\overset{\circ}{\overline{U}^*})$ tais que $g|_U = f$. Então $g = \bar{f}$.*

Demonstração: Como U é equilibrado e $\mathcal{P}_f(^mE)$ é denso em $\mathcal{P}(^mE)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, segue de [4, Lema 6.2] ou de [15, Proposição 1.1], que $f \in \mathcal{H}_{wu}(U)$. Agora por [16, Observação 1.13] temos que f admite única extensão uniformemente w^*-contínua $\hat{f} : \overset{\circ}{\overline{U}^*} \longrightarrow \mathbb{C}$. Logo $g = \bar{f} = \hat{f}$. ∎

É claro que a proposição acima também vale para $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$ e sua extensão dada pelo Teorema 4.2.2.

A seguir apresentamos o resultado anunciado no início desta seção.

Teorema 4.2.5. *Sejam E e F espaços de Banach tais que E'' e F'' são do tipo Tsirelson-James. Sejam $K \subset E$ e $L \subset F$ subconjuntos compactos convexos e equilibrados. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(1) $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes.

(2) As álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(L_F)$ são topologicamente isomorfas.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sejam $B \supset L$ e $A \supset K$ subconjuntos abertos de E'' e F'' respectivamente, e $\varphi : B \longrightarrow A$ uma aplicação biholomorfa tal que $\varphi(L) = K$. Definamos $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(L_F)$ da seguinte forma.

Dada $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$, seja $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$. Pelo Lema 1.2.10, $\overset{\circ}{\overline{U}}{}^*$ é um subconjunto aberto de E'' que contém K, e portanto $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{\overline{U}}{}^* \cap A)$ é um aberto de F'' que contém L. Finalmente $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{\overline{U}}{}^* \cap A) \cap F$ é um subconjunto aberto de F que contém L. Portanto existe um aberto convexo e equilibrado $V \subseteq F$ tal que

$$L \subset V \subseteq \varphi^{-1}(\overset{\circ}{\overline{U}}{}^* \cap A) \cap F.$$

Desta forma definimos $T([f]) = [\bar{f} \circ (\varphi|_V)]$. Procedemos de maneira similar à feita na demonstração do Teorema 4.1.1 para mostrar que T está bem definida e é um homomorfismo.

Para mostrar que T é contínua, vamos mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ e um homomorfismo contínuo $T_k : \mathcal{H}^\infty(U_k) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(V_{m_k})$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(K_E) \arrow[r, "T"] & \mathcal{H}(L_F) \\
\mathcal{H}^\infty(U_k) \arrow[u, "i_k"] \arrow[r, "T_k"] & \mathcal{H}^\infty(V_{m_k}) \arrow[u, "i_{m_k}"']
\end{tikzcd}$$

Sejam $k \in \mathbb{N}$ fixado e $f \in \mathcal{H}^\infty(U_k)$. Pelo mesmo raciocínio feito no início desta demonstração, temos que $\varphi^{-1}(\overset{\circ}{\overline{U_k}}{}^* \cap A) \cap F$ é um subconjunto aberto de F que contém L, e portanto existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset V_{m_k} \subseteq \varphi^{-1}(\overset{\circ}{\overline{U_k}}{}^* \cap A) \cap F$. Consideremos $\varphi_k = \varphi|_{V_{m_k}} : V_{m_k} \longrightarrow \overset{\circ}{\overline{U_k}}{}^*$, e definamos $T_k : \mathcal{H}^\infty(U_k) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(V_{m_k})$ por $T_k(f) = \bar{f} \circ \varphi_k$, para toda $f \in \mathcal{H}^\infty(U_k)$. É claro que T_k é linear e multiplicativa, uma vez que T_k é a composta do operador de composição C_{φ_k} com o homomorfismo AB do Teorema 4.2.2.

Para cada $w \in V_{m_k}$ temos que $\varphi_k(w) \in \overset{\circ}{\overline{U_k}}{}^*$. Então

$$|T_k(f)(w)| = |\bar{f}(\varphi_k(w))| \leq \|\bar{f}\|_{\overset{\circ}{\overline{U_k}}{}^*} = \|AB(f)\| = \|f\| = \|f\|_{U_k},$$

e portanto T_k é contínua. Vamos agora mostrar que o diagrama comuta, isto é, que $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$. Se $f \in \mathcal{H}^\infty(U_k)$, então $i_{m_k}(T_k(f)) = [\bar{f} \circ \varphi_k] = [\bar{f} \circ (\varphi|_{V_{m_k}})] = T([f]) = T \circ i_k(f)$.

Se definimos $S : \mathcal{H}(L_F) \longrightarrow \mathcal{H}(K_E)$ da mesma forma, usando neste caso φ^{-1} ao invés de φ, temos que $S = T^{-1}$. Com efeito, sejam $[g] \in \mathcal{H}(L_F)$, $V_k \subseteq F$ convexo e equilibrado tal que $g \in \mathcal{H}^\infty(V_k)$, e

$U_{n_k} \subseteq E$ tal que $S([g]) = [\bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}})]$, onde $\psi = \varphi^{-1}$. Seja $f = \bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}}) \in \mathcal{H}^\infty(U_{n_k})$. Por um lado temos que $\bar{g} \circ (\psi|_{\overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}^*}}) \in \mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}^*})$. Como $\bar{f}|_{U_{n_k}} = f = \bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}})$, segue da Proposição 4.2.4 que $\bar{f} = \bar{g} \circ (\psi|_{\overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}^*}})$.

Agora seja $V_{m_k} \subseteq F$ tal que $T([f]) = [\bar{f} \circ (\varphi|_{V_{m_k}})]$. Então

$$T(S([g])) = T([\bar{g} \circ (\psi|_{U_{n_k}})]) = [\bar{g} \circ (\psi|_{\overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}^*}}) \circ (\varphi|_{V_{m_k}})] = [\bar{g}|_{V_{m_k}}] = [g].$$

Através dos mesmos argumentos mostramos que $S \circ T([f]) = [f]$, para toda $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$; e portanto T é um isomorfismo topológico entre $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(L_F)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(L_F)$ um isomorfismo topológico. Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração de (2) $\Rightarrow$ (1) do Teorema 4.1.1, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado existem $m_k \in \mathbb{N}$ e um homomorfismo contínuo T_k tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(K_E) \arrow[r, "T"] & \mathcal{H}(L_F) \\
\mathcal{H}_b(U_k) \arrow[u, "i_k"] \arrow[r, "T_k"] & \mathcal{H}_b(V_{m_k}) \arrow[u, "i_{m_k}"']
\end{tikzcd}$$

Como E'' é do tipo Tsirelson-James, segue que E é do tipo Tsirelson-James, pela Proposição 1.3.2, e sendo U_k convexo e equilibrado, temos pelo Teorema 3.2.8 que existe um aplicação holomorfa $\varphi_k : \overset{\circ}{\overline{V_{m_k}}^*} \longrightarrow \overset{\circ}{\overline{U_k}^*}$ tal que $\overline{T_k(f)} = \bar{f} \circ \varphi_k$, para toda $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$. Assim $T_k(f) = \overline{T_k(f)}|_{V_{m_k}} = \bar{f} \circ (\varphi|_{V_{m_k}})$, para toda $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$.

Aplicando o mesmo argumento para $S = T^{-1}$, encontramos um inteiro $n_k \geq k$ e uma aplicação holomorfa $\psi_k : \overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}^*} \longrightarrow \overset{\circ}{\overline{V_{m_k}}^*}$, tal que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(L_F) \arrow[r, "S"] & \mathcal{H}(K_E) \\
\mathcal{H}_b(V_{m_k}) \arrow[u, "i_{m_k}"] \arrow[r, "S_k"] & \mathcal{H}_b(U_{n_k}) \arrow[u, "i_{n_k}"']
\end{tikzcd}$$

onde $S_k : \mathcal{H}_b(V_{m_k}) \longrightarrow \mathcal{H}_b(U_{n_k})$ é tal que $\overline{S_k(g)} = \bar{g} \circ \psi_k$, para toda $g \in \mathcal{H}_b(V_{m_k})$.

Como $T \circ i_k = i_{m_k} \circ T_k$, aplicamos S nesta igualdade obtemos que $i_k = S \circ i_{m_k} \circ T_k$. Usando que $S \circ i_{m_k} = i_{n_k} \circ S_k$ temos que $i_k = i_{n_k} \circ S_k \circ T_k$. Em particular, para cada $f \in E' \subseteq \mathcal{H}_b(U_k)$

segue que $[f] = [S_k(T_k(f))]$, e portanto pelo Princípio da Identidade [48, Proposição 5.7] temos que $f = S_k(T_k(f))$ sobre U_{n_k}. Assim $\bar{f} = \overline{S_k(T_k(f))}$ sobre $\overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}}^{*}$. Ou seja, $\bar{f} = \overline{T_k(f)} \circ \psi_k$, e assim $\bar{f} = \bar{f} \circ \varphi_k \circ \psi_k$ sobre $\overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}}^{*}$, para todo $f \in E'$. Desta forma, para cada $z \in \overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}}^{*} \subset E''$, temos que $z(f) = (\varphi_k \circ \psi_k)(z)(f)$, para todo $f \in E'$, isto é, $\varphi_k \circ \psi_k : \overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}}^{*} \longrightarrow \overset{\circ}{\overline{U_k}}^{*}$ é a aplicação inclusão.

Afirmação 1: $\varphi_1 = \varphi_k$ sobre cada $\overset{\circ}{\overline{V_{m_k}}}^{*}$. De fato, como $E' \subseteq \mathcal{H}_b(U_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que $i_1(f) = i_k(f)$. Então $T(i_1(f)) = T(i_k(f))$ e portanto $i_{m_1} \circ T_1(f) = i_{m_k} \circ T_k(f)$, isto é, $[T_1(f)] = [T_k(f)]$, o que mostra que $T_1(f) = T_k(f)$ sobre V_{m_k}. Portanto $\overline{T_1(f)} = \overline{T_k(f)}$ em $\overset{\circ}{\overline{V_{m_k}}}^{*}$, para todo funcional linear $f \in E'$. Ou seja $\bar{f} \circ \psi_1 = \bar{f} \circ \psi_k$, para todo $f \in E'$. Portanto, para cada $w \in \overset{\circ}{\overline{V_{m_k}}}^{*} \subseteq F''$, temos que $\psi_1(w)(f) = \psi_k(w)(f)$, para todo $f \in E'$. Isto implica que $\varphi_1 = \varphi_k$ em cada $\overset{\circ}{\overline{V_{m_k}}}^{*}$. Pelos mesmo argumentos provamos que $\psi_1 = \psi_k$ em cada $\overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}}^{*}$.

Afirmação 2: T depende apenas de φ_1. Seja $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$. Então $f \in \mathcal{H}_b(U_k)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Pela Afirmação 1 temos que $T([f]) = [\bar{f} \circ \varphi_k|_{V_{m_k}}] = [\bar{f} \circ \varphi_1|_{V_{m_k}}]$. Pelos mesmos argumentos temos que S depende somente de ψ_1.

Afirmação 3: $\varphi_1(L) \subseteq K$. Como efeito, como $L \subset V_{m_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da Afirmação 1 que $\varphi_1(L) = \varphi_k(L) \subseteq \overset{\circ}{\overline{U_{n_k}}}^{*} = K + B_{E''}(0, \frac{1}{n_k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$, onde a última igualdade segue do Lema 1.2.10. Como K é fechado, segue que $\varphi_1(L) \subseteq K$. Pelos mesmos argumentos temos que $\psi_1(K) \subseteq L$.

Para cada $g \in F' \subset \mathcal{H}_b(V_{m_1})$, temos pela Afirmação 2 que $S([g]) = [\bar{g} \circ (\psi_1|_{U_{n_1}})]$. Como $f = \bar{g} \circ (\psi_1|_{U_{n_1}}) \in \mathcal{H}_b(U_{n_1})$, segue que $[g] = T \circ S([g]) = [\bar{f} \circ (\varphi_1|_{V_{m_{n_1}}})]$. Do Princípio da Identidade [48, Proposição 5.7] concluímos que

$$\bar{f} \circ (\varphi_1|_{V_{m_{n_1}}}) = g \text{ em } V_{m_{n_1}}.$$

Por outro lado, segue da Proposição 4.2.4 que $\bar{f} = \bar{g} \circ \psi_1 \in \mathcal{H}_b(\overset{\circ}{\overline{U_{n_1}}}^{*})$. Ou seja,

$$\bar{g} \circ \psi_1 \circ \varphi_1 = g \text{ em } V_{m_{n_1}}.$$

Portanto $\bar{g} \circ \psi_1 \circ \varphi_1 = \bar{g}$ em $\overset{\circ}{\overline{V_{m_{n_1}}}}^{*}$. Ou seja, para cada $w \in \overset{\circ}{\overline{V_{m_{n_1}}}}^{*}$ temos que

$$(\psi_1 \circ \varphi_1)(w)(g) = w(g), \text{ para todo } g \in F',$$

isto é, $\psi_1 \circ \varphi_1 : B \longrightarrow B$ é a aplicação identidade, onde $B = \overline{\overset{\circ}{V_{m_{n_1}}}}^{*}$. Se denotarmos $A = {\psi_1}^{-1}(B) \subseteq \overline{\overset{\circ}{U_{n_1}}}^{*}$, também vale que $\varphi_1 \circ \psi_1 : A \longrightarrow A$ é a aplicação identidade. Finalmente se definimos $\varphi = \varphi_1|_B : B \longrightarrow A$ e $\psi = \psi_1|_A : A \longrightarrow B$, temos que $\psi = \varphi^{-1}$ e pela Afirmação 3 que $\varphi(L) = K$, o que mostra que $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes. ∎

O Teorema 4.2.5 foi obtido durante uma visita ao Departamento de Análisis Matemático da Universidad de Valencia, e gostaríamos de agradecer a este Departamento sua amável hospitalidade.

O próximo teorema mostra que, sob certas hipóteses, as álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são topologicamente isomorfas, ou seja, do ponto de vista algébrico e topológico, $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são o mesmo conjunto.

Teorema 4.2.6. *Sejam E um espaço de Banach tal que E'' é do tipo Tsirelson-James e K um subconjunto compacto convexo e equilibrado de E. Então as álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são topologicamente isomorfas.*

Demonstração: Vamos construir um isomorfismo topológico $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(K_{E''})$. Para tal sejam $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{H}^\infty(U_n)$. Considere $\bar{f} \in \mathcal{H}^\infty\big(\overline{\overset{\circ}{U_n}}^{*}\big)$. Como pelo Lema 1.2.10 $\overline{\overset{\circ}{U_n}}^{*} = K + B_{E''}(0, \frac{1}{n})$, temos que $K \subset \overline{\overset{\circ}{U_n}}^{*}$ e assim $[\bar{f}] \in \mathcal{H}(K_{E''})$. Desta forma definimos $T([f]) = [\bar{f}]$, para cada $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$.

Se $[f_1], [f_2] \in \mathcal{H}(K_E)$ são tais que $[f_1] = [f_2]$, então existe um aberto convexo e equilibrado $U \subseteq E$ contendo K tal que $f_1 = f_2$ em U. Consequentemente $\overline{f_1} = \overline{f_2}$ em $\overline{\overset{\circ}{U}}^{*}$. Portanto $[\overline{f_1}] = [\overline{f_2}]$, ou seja $T([f_1]) = T([f_2])$, e assim T está bem definida.

T é linear e multiplicativa pois T é a composta do operador inclusão $f \in \mathcal{H}^\infty(U) \longmapsto [f] \in \mathcal{H}(K_E)$ com o isomomorfismo $AB : \mathcal{H}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty\big(\overline{\overset{\circ}{U}}^{*}\big)$ do Teorema 4.2.2.

Sejam $[f] \in \mathcal{H}(K_E)$ e $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$. Suponha que $T([f]) = [\bar{f}] = [0]$. Como $\overline{\overset{\circ}{U}}^{*}$ é convexo, segue do Princípio da Identidade [48, Proposição 5.7] que $\bar{f} = 0$ e portanto $f = \bar{f}|_U = 0$, e assim temos que T é injetora.

Para mostrar que T é sobrejetora, seja $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$. Pelo Lema 1.5.1, existe $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $g \in \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big)$. Seja $f = g|_U$ e considere $\bar{f} \in \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big)$. Como E'' é do tipo Tsirelson-James, segue da Proposição 1.3.2 que E é do tipo Tsirelson-James. Agora temos pela Proposição 4.2.4 que $\bar{f} = g$ e assim $T([f]) = [\bar{f}] = [g]$, provando que T é sobrejetora.

Assim temos definida a inversa de T. Com efeito, sejam $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$ e $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $g \in \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big)$. Então $T^{-1}([g]) = [g|_U]$.

Seja $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K. Então pela definição de T, temos que o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(K_E) \arrow[r, "T"] & \mathcal{H}(K_{E''}) \\
\mathcal{H}^\infty(U) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "AB"] & \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big) \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

onde i e j denotam as inclusões canônicas. Agora como AB é contínua, segue que T é contínua. De maneira análoga, se denotarmos por R o operador restrição de $\mathcal{H}^\infty(\overset{\circ}{\overline{U}^*})$ em $\mathcal{H}^\infty(U)$, então é claro que R é contínuo e que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(K_{E''}) \arrow[r, "T^{-1}"] & \mathcal{H}(K_E) \\
\mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "R"] & \mathcal{H}^\infty(U) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Portanto T^{-1} é contínua e assim as álgebras $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(K_{E''})$ são topologicamente isomorfas. ∎

Dos Teoremas 4.1.1 e 4.2.5 temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.7. *Sejam E e F espaços de Banach tais que E'' e F'' são do tipo Tsirelson-James, K e L subconjuntos compactos convexos e equilibrados de E e F, respectivamente. Se K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes então $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes.*

Demonstração: Se K_E e L_F são biholomorficamente equivalentes então sempre vale que $\mathcal{H}(K_E)$ e $\mathcal{H}(L_F)$ são topologicamente isomorfos (veja demonstração de (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 4.1.1). Aplicando o Teorema 4.2.5, temos que $K_{E''}$ e $L_{F''}$ são biholomorficamente equivalentes. ∎

Não sabemos que vale a recíproca do Corolário 4.2.7, ou caso contrário, se existe algum exemplo mostrando que tal recíproca é falsa.

Se E'' não é do tipo Tsirelson-James, então temos um resultado mais fraco com relação ao Teorema 4.2.6.

Teorema 4.2.8. *Sejam E um espaço de Banach e K um subconjunto compacto, convexo e equilibrado de E. Então $\mathcal{H}(K_E)$ é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{H}(K_{E''})$.*

Demonstração: Considere $T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(K_{E''})$ definida no Teorema 4.2.6, e observe que T é linear, injetora e contínua. Vamos construir $S : \mathcal{H}(K_{E''}) \longrightarrow \mathcal{H}(K_E)$ da seguinte forma. Dada $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$, seja $U \subseteq E$ um aberto convexo e equilibrado contendo K tal que $g \in \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big)$. Então definimos $S([g]) = [g|_U]$.

Sejam $[g_1], [g_2] \in \mathcal{H}(K_{E''})$ tais que $[g_1] = [g_2]$. Pelo Lema 1.5.1, existem U_1 e U_2 subconjuntos abertos convexos e equilibrados de E, contendo K, tais que $g_1 \in \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U_1}^*}\big)$ e $g_2 \in \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U_2}^*}\big)$. Consideremos $A \subset \overset{\circ}{\overline{U_1}^*} \cap \overset{\circ}{\overline{U_2}^*}$ um subconjunto aberto de E'' tal que $g_1 = g_2$ em A. Então $g_1 = g_2$ em $A \cap U_1 \cap U_2 \subseteq E$ e consequentemente pelo Princípio de Identidade [48, Proposição 5.7] temos que $g_1 = g_2$ em $U_1 \cap U_2$. Portanto

$$[g_1|_{U_1}] = [g_1|_{U_1 \cap U_2}] = [g_2|_{U_1 \cap U_2}] = [g_2|_{U_2}],$$

ou seja $S([g_1]) = S([g_2])$ e assim S está bem definida.

Para mostrar que S é linear, sejam $[g_1], [g_2] \in \mathcal{H}(K_{E''})$ e os abertos construídos acima. Então

$$S([g_1 + g_2]) = [(g_1 + g_2)|_{U_1 \cap U_2}] = [g_1|_{U_1 \cap U_2}] + [g_2|_{U_1 \cap U_2}] = [g_1|_{U_1}] + [g_2|_{U_2}] = S([g_1]) + S([g_2]).$$

De maneira análoga mostramos que $S(\lambda[g]) = \lambda S([g])$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $[g] \in \mathcal{H}(K_{E''})$, e também que S é multiplicativa. Por fim, é claro que S é contínua, uma vez que é a composta do operador inclusão $\mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big) \hookrightarrow \mathcal{H}(K_{E''})$ com o operador restrição $R : \mathcal{H}^\infty\big(\overset{\circ}{\overline{U}^*}\big) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(U)$ definido no Teorema anterior, para todo aberto U convexo e equilibrado que contém K. Agora

$$S \circ T([f]) = S([\bar{f}]) = [\bar{f}|_U] = [f].$$

Ou seja $S \circ T : \mathcal{H}(K_E) \longrightarrow \mathcal{H}(K_E)$ é a identidade e portanto segue o teorema. $\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] R. Alencar, R. Aron, S. Dineen, *A reflexive space of holomorphic functions in infinitely many variables*. Proc. Amer. Math. Soc. 90 (3) (1984), 407-411.

[2] H. Alexander, *Analytic functions on Banach spaces*, Ph. D. Thesis, University of California at Berkeley, 1968.

[3] R. Aron, P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France 106 (1) (1978), 3-24.

[4] R. Aron, B. Cole, T. W. Gamelin, *Weak-star continuous analytic functions*, Canad. J. Math. 47 (4) (1995), 673-683.

[5] R. Aron, P. Galindo, M. Lindström, *Compact homomorphisms between algebras of analytic functions*, Studia Math. 123 (3) (1997), 235-247.

[6] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Warsaw, 1932. Reprinted by Chelsea, New York, 1955.

[7] J. A. Barroso, *Topologias nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos*, An. Acad. Brasil. Ci. 43 (1971), 527-546.

[8] J. A. Barroso, *Introduction to Holomorphy*, North-Holland Math. Stud. 106. North Holland, Amsterdam, 1985.

[9] J. Barroso, M. Matos, L. Nachbin, *On holomorphy versus linearity in classifying locally convex spaces*, in: Infinite Dimensional Holomorphy and Applications, M. Matos (ed.), pp. 31-74, North-Holland Math. Stud. 12, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[10] J. F. Colombeau, *Differential Calculus and Holomorphy*, North-Holland Math. Stud. 64. North-Holland, Amsterdam, 1982.

[11] K. -D. Bierstedt, R. Meise, *Aspects of inductive limits in spaces of germs of holomorphic functions on locally convex spaces and applications to the study of* $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$, in: Advances in Holomorphy, J. A. Barroso (ed.), pp. 111-178, North-Holland Math. Stud. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[12] J. Bonet, P. Galindo, D. García, M. Maestre, *Locally bounded sets of holomorphic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (2) (1988), 609-620.

[13] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, to appear in Note Mat., 2004.

[14] C. Boyd, S. Lassalle, *Isometries between spaces of n-homogeneous polynomials*, preprint.

[15] P. Burlandy, L. A. Moraes, *The spectrum of an algebra of weakly continuous holomorphic mappings*, Indag. Math. (N.S.) 11 (4) (2000), 525-532.

[16] D. Carando, D. García, M. Maestre, *Homomorphisms and composition operators on algebras of analytic functions of bounded type*, preprint.

[17] P. G. Casazza, B. Lin, R. H. Lohman, *On nonreflexive Banach spaces which contains no* c_0 *or* l_p, Canad. J. Math. 32 (6) (1980), 1382-1389.

[18] G. Coeuré, *Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications a l'étude des fonctions analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20 (1) (1970), 361-432.

[19] L. O. Condori, *Homomorfismos contínuos entre álgebras de germes holomorfos*. Ph. D. Thesis, Universidade de São Paulo, 2001.

[20] L. O. Condori, M.L. Lourenço, *Continuous homomorphisms between topological algebras of holomorphic germs*, to appear in Rocky Mountain J. Math., 2004.

[21] V. Dimant, P. Galindo, M. Maestre and I. Zalduendo, *Integral holomorphic functions*, Studia Math. 160 (1) (2004), 83-99.

[22] S. Dineen, *Holomorphic functions on strong duals of Fréchet-Montel spaces*, in: Infinite Dimensional Holomorphy and Applications, M. Matos (ed.), pp. 147-166, North-Holland Math. Stud. 12, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[23] S. Dineen, *Growth properties of pseudo-convex domains and domains of holomorphy in locally convex topological vector spaces*, Math. Ann. 226 (1977), 229-236.

[24] S. Dineen, *Holomorphic functions on inductive limits of* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, Math. Proc. R. Ir. Acad. 86A (2) (1986), 143-146.

[25] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag London, 1999.

[26] P. Galindo, D. García, M. Maestre, *Entire functions of bounded type on Fréchet spaces*, Math. Nachr. 161 (1993), 185-198.

[27] P. Galindo, M. Lindström, *Gleason parts and weakly compact homomorphisms between uniform Banach algebras*, Monatsh. Math. 128 (2) (1999), 89-97.

[28] D. García, M. L. Lourenço, L. A. Moraes, O. W. Paques, *The spectra of some algebras of analytic mappings*, Indag. Math. (N.S.) 10 (3) (1999), 393-406.

[29] D. García, M. Maestre, D. M. Vieira, *Theorems of Banach-Stone type for algebras of germs of holomorphic functions on Banach spaces*, 59^o Seminário Brasileiro de Análise, Ribeirão Preto, SP, May 2004, pp. 236-243.

[30] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, *Variations on the Banach-Stone theorem*, preprint.

[31] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, A. Prieto, *Banach-Stone theorems for Banach manifolds*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) 94 (4) (2000), 525-528.

[32] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 1955 (16) (1955).

[33] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, 2nd. ed., Soc. Mat. São Paulo, São Paulo, 1958.

[34] A. Grothendieck, *Sur les espaces* (F) *et* (DF), Summa Brasil. Math. 3 (1954), 57-123.

[35] A. Hirschowitz, *Prolongement analytique en dimension infinie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (2) (1972), 255-292.

[36] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. I.* Addison-Wesley, Reading-Massachussets (1966).

[37] J. M. Isidro, *Characterization of the spectrum of some topological algebras of holomorphic functions*, in: Advances in Holomorphy, J. A. Barroso (ed.), pp. 407-416, North-Holland Math. Stud. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[38] B. Josefson, *A counterexample in the Levi problem*, Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, pp.168-177. Lecture Notes in Math. 364, Springer, Berlin, 1974.

[39] B. Josefson, *Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence*, Ark. Mat. 13 (1975), 79-89.

[40] W. Kaup, H. Upmeier, *Banach spaces with biholomorphically equivalent unit balls are isomorphic*. Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 129-133.

[41] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence spaces.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[42] M. Matos, *The envelope of holomorphy of Riemann domains over a countable product of complex planes*, Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972), 379-387.

[43] J. Mujica, *Gérmenes holomorfos y funciones holomorfas en espacios de Fréchet*, Publicaciones del departamento de Teoria de Funciones 1. Universidad Santiago de Compostela, 1978.

[44] J. Mujica, *Spaces of germs of holomorphic functions*, Studies in analysis, pp. 1-41, Adv. Math. Suppl. Stud., 4, Academic Press, New York, 1979.

[45] J. Mujica, *Ideals of holomorphic functions on Fréchet spaces*, in: Advances in Holomorphy, J. A. Barroso (ed.), pp. 563-576, North-Holland Math. Stud. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[46] J. Mujica, *Complex homomorphisms of the algebras of holomorphic functions on Fréchet spaces*, Math. Ann. 241 (1979), 73-82.

[47] J. Mujica, *The Oka-Weil theorem in locally convex spaces with the approximation property.* Seminaire Paul Krée, 4e année: 1977-1978. Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, Exp. 3, 7 pp., Paris, 1979.

[48] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Stud. 120. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[49] J. Mujica, *Spectra of algebras of holomorphic functions on infinite dimensional Riemann domains*, Math. Ann. 276 (1987), 317-322.

[50] J. Mujica, *Spaces of holomorphic mappings on Banach spaces with a Schauder basis*, Studia Math. 122 (2) (1997), 139-151.

[51] J. Mujica, *Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space*, Arch. Math. 76 (2001), 292-298.

[52] A. Nissenzweig, *w^*-sequential convergente*, Israel J. Math. 22 (3-4) (1975), 266-272.

[53] P. Noverraz, *On a particular case of surjective limit*, in: Infinite Dimensional Holomorphy and Applications, M. Matos (ed.), pp. 323-331, North-Holland Math. Stud. 12, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[54] L. Pellegrini, *Bases em espaços de polinômios homogênes*, 59^o Seminário Brasileiro de Análise, Ribeirão Preto, SP, May 2004, pp. 192-198.

[55] P. Pérez Carreras, J. Bonet, *Barrelled Locally Convex Spaces*, North-Holland Math. Studies 131. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[56] Y. I. Petunin, V. I. Savkin, *Convergence generated by analytic funcionals, and isomorphism of algebras of analytic functions*, Ukrainian Math. J. 40 (6) (1988), 676-679.

[57] M. Schottenloher, *Über analytische Fortsetzung in Banachräumen*, Math. Ann. 199 (1972), 313-336.

[58] M. Schottenloher, *Analytic continuation and regular classes in locally convex Hausdorff spaces*, Portugal. Math. 33 (1974), 219-250.

[59] M. Schottenloher, *The Levi problem for domains spread over locally convex spaces with a finite dimensional Schauder decomposition.*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26 (4) (1974), 207-237.

[60] M. Schottenloher, *Spectrum and envelope of holomorphy for infinite dimensional Riemann domains*, Math. Ann. 263 (1983), 213-219.

[61] C. Stegall, *Dual of certain spaces with the Dunford-Pettis property*, Notices Amer. Math. Soc. 19 (7) (1972), A799.

[62] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (3) (1937), 375-481.

[63] N. N. Tocha, *As propriedade (P) e (RP) no predual do espaço de Stegall*, 59º Seminário Brasileiro de Análise, Ribeirão Preto, SP, May 2004, pp. 170-176.

[64] B. Tsirelson, *Not every Banach space contains an imbedding of l_p or c_0*, Functional Anal. Appl. 8 (1974), 138-141.

[65] D. M. Vieira, *Operadores de composição entreas álgebras clássicas de funções analıticas*, Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2000.

[66] D. M. Vieira, *Álgebras topológicas de funções holomorfas em espaços de Banach*, 55º Seminário Brasileiro de Análise, Uberlândia, MG, May 2002, pp. 577-582.

[67] D. M. Vieira, *Álgebras topológicas de funções holomorfas no espaço de Tsirelson*, 56º Seminário Brasileiro de Análise, Niterói, RJ, November 2002, pp. 752-756.

[68] D. M. Vieira, *Álgebras de Fréchet de funções holomorfas no espaço de Tsirelson*, 57º Seminário Brasileiro de Análise, Viçosa, MG, May 2003, pp. 391-396.

[69] D. M. Vieira, *Theorems of Banach-Stone type for algebras of germs of holomorphic functions*, 58º Seminário Brasileiro de Análise, Campinas, SP, November 2003, pp. 505-510.

[70] D. M. Vieira, *Theorems of Banach-Stone type for algebras of holomorphic functions on infinite dimensional spaces*, preprint.