

MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I

1ª Lista de Exercícios - 2020

Claudia Cueva Candido e David Pires Dias

1. Considere o plano cartesiano, representação do \mathbb{R}^2 . Dê a equação da curva e esboce-a:
 - a) bissetriz dos quadrantes pares;
 - b) circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 1;
 - c) reta r paralela ao eixo $0y$ que contém o ponto $(2, 2)$;
 - d) reta s paralela ao eixo $0x$ que contém o ponto $(1, 3)$;
 - e) reta t simétrica à reta s em relação ao eixo $0x$;
 - f) elipse com semi-eixo menor em $0x$ e semi-eixo maior em $0y$ que passa pelos pontos $(0, 4)$, $(0, -4)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.
2. Esboce o subconjunto do \mathbb{R}^2 no plano cartesiano:
 - a) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$
 - b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$
 - c) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\}$
 - d) $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$
3. Esboce no plano cartesiano:
 - a) a semi-reta $y = x$ com $x \geq 0$
 - b) a semi-reta $y = x$ com $x \leq 0$
 - c) o semi-eixo positivo $0y$
 - d) a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$
 - e) a circunferência de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
 - f) a região R contida no semiplano $x \geq 0$ interior ao disco de centro $(0, 0)$ e raio 2 e exterior ao disco de centro $(1, 0)$ e raio 1.
 - g) a parte da coroa contida no 3º quadrante, entre os discos com centro na origem e raios 2 e 3.
4. Esboce no plano cartesiano os conjuntos cujas expressões em coordenadas polares são dadas abaixo:
 - a) $\theta = \frac{\pi}{6}$
 - b) $r = 1$
 - c) $r = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$
 - d) $r = \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$
 - e) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
 - f) $r = 2, \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$
 - g) $r = 1 + \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
 - h) $r = 1 - \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
5. Calcule a área da região :
 - a) limitada por um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$.

b) limitada pela lemniscata de equação $r^2 = 4 \cos 2\theta$.

c) interior à cardioide $r = 1 + \sin \theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

d) limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

6. Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

a) $\gamma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}$

b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t), t \in \mathbb{R}$

d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4 \sin t), t \in [-\pi, \pi]$

e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t), t \in [-2, 0]$

f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \geq 0$

g) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t), t \in \mathbb{R}$

i) $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t + 2), t \in \mathbb{R}$

j) $\gamma(t) = (2 + e^{-t}, 3 - e^t), t \geq 0$

7. Esboce C e encontre uma parametrização para C , nos casos:

a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, y \geq -x \text{ e } y \geq x\}$

b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x < 0 \text{ e } y > -10\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$

d) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), r) = d((x, y), P)\}$, sendo $P = (0, 3)$ e r , a reta $y = 4$.

e) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), P) + d((x, y), Q) = 10\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

f) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |d((x, y), P) - d((x, y), Q)| = 1, x > 0\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

8. Para cada curva (descrita por equações paramétricas) dos itens de (a) a (f), indique qual das figuras de I a VI representa a sua imagem. Justifique sua escolha.

a) $x = t^3 - 2t, y = t^2 - t$

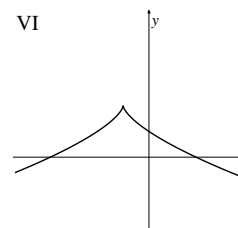
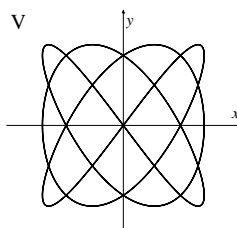
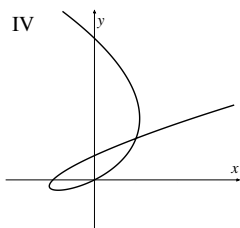
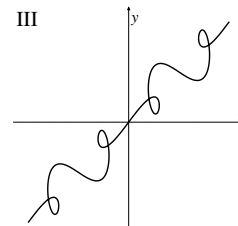
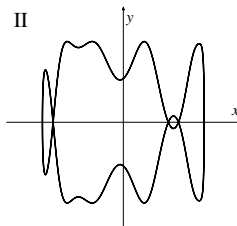
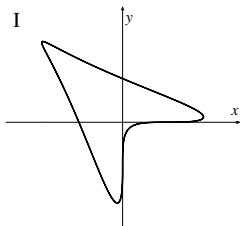
b) $x = t^3 - 1, y = 2 - t^2$

c) $x = \sin(3t), y = \sin(4t)$

d) $x = t + \sin(2t), y = t + \sin(3t)$

e) $x = \sin(t + \sin t), y = \cos(t + \cos t)$

f) $x = \cos t, y = \sin(t + \sin(5t))$



9. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t), t \in \mathbb{R}$, tem duas tangentes em $(0,0)$ e ache suas equações. Faça um esboço da curva.

10. Considere $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$.

a) Mostre que a função f não é derivável em $x = 0$.

b) Determine uma curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f .

c) Interprete geometricamente o fato de que f não é derivável em $x = 0$, mas a curva γ é derivável em t_0 , onde $\gamma(t_0) = (0, 0)$.