MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 2 - 2020

Claudia Cueva Candido e David Pires Dias

1. Considere a curva C de equação polar $r = 2a \text{ sen } \theta,\ a > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi$.

   a) Prove que C é uma circunferência.

   b) Investigue o que ocorre para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

   c) Descreva a região R que contém o ponto de coordenadas cartesianas $x = 0$ e $y = 2a$ e é limitada pelas bissetrizes $y = x$ e $y = -x$.

   d) Faça um esboço de R e calcule sua área.

2. Faça um esboço do limaçon $r = 1 - \dfrac{1}{2} \cos \theta$ e calcule sua área.

3. **Comprimento de curva - $L(\gamma[a,b])$:** Considere a curva parametrizada $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, dada por $\gamma(t) = (x(t)\ ,\ y(t))$.

   Seja $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Podemos aproximar o comprimento do arco $\gamma([a,b])$ por $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ||\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)||$. O que você faria para concluir que $L(\gamma[a,b]) = \displaystyle\int_a^b ||\gamma'(t)||dt$? Use essa fórmula para calcular o comprimento das seguintes curvas:

   a) $\gamma(t) = (2t^2 - 1,\ 4t^2 + 3),\ t \in [-4, 4]$

   b) $\gamma(t) = (\cos t + t \text{ sen } t\ ,\ \text{sen } t - t \cos t),\ t \in [0\ ,\ \pi]$.

4. Considere as curvas parametrizadas α, β e γ dadas por $\alpha(t) = (t^3, t^3),\ \beta(t) = (t^2, t^2)$ e $\gamma(t) = (\text{sen } t, \text{sen } t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

   a) Esboce as imagens das curvas.

   b) Determine seus vetores tangentes e os valores de t em que eles são nulos.

   c) Descreva o sentido de percurso das curvas, conforme t varia em $\mathbb{R}$.

5. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t(t^2 - 3),\ 3(t^2 - 3))$.

   a) Estude o sinal das funções x e y para decidir a que quadrante pertence $\gamma(t)$, conforme t varia em $\mathbb{R}$.

   b) Determine o vetor tangente $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e estude o sinal das funções x' e y' para decidir qual a direção e sentido de γ', conforme t varia em $\mathbb{R}$.

   c) Observe que a curva γ tem auto-intersecção em $(0,0)$ e faça um esboço da $Im\,\gamma$ com os dados obtidos nos itens a) e b).

6. Descreva o domínio de f e esboce-o no plano cartesiano:

   a) $f(x,y) = \sqrt{x + y - 1}$ b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2 - 1}$ c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x + y}$

   d) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x - y + 1}}$ f) $f(x,y) = \ln(xy)$