MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 3 - 2020

Claudia Cueva Candido e David Pires Dias

1. Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

   (a) $f(x, y) = x + 2y - 3, \quad k = -2;$ (b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}, \quad k = 5.$

   Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a) e (b) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e $(6, 0)$, respectivamente.

2. Esboce os gráficos de:

   (a) $f(x, y) = 1 - x - y$ (b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

   (d) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x, y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x, y) = y^2 + 1$

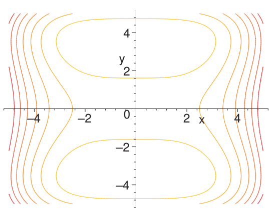
   (g) $f(x, y) = y^2 + x$ (h) $f(x, y) = xy$ (i) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

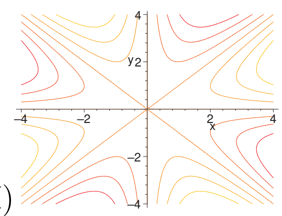
   (j) $f(x, y) = \dfrac{1}{4x^2 + 9y^2}$ (k) $f(x, y) = (x - y)^2$ (l) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$

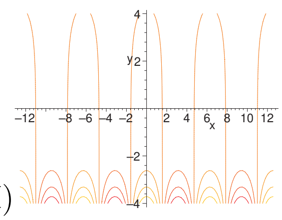
   (m) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x^2 + 2y^2)^2}$ (n) $f(x, y) = \ln(9x^2 + y^2)$ (o) $f(x, y) = 2 - \sqrt[4]{x^2 + 4y^2}$

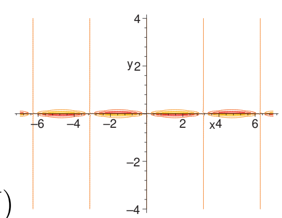
   (p) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ (q) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ (r) $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$

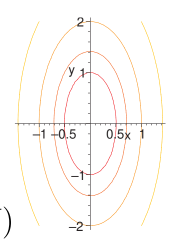
3. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.

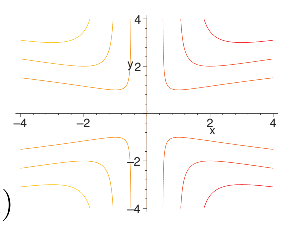

(I)

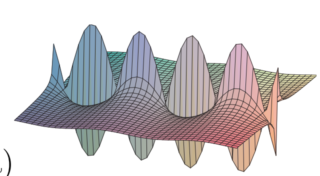

(II)

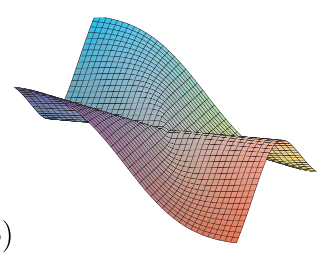

(III)

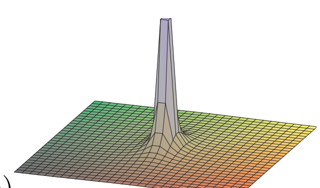

(IV)

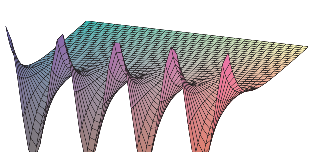

(V)

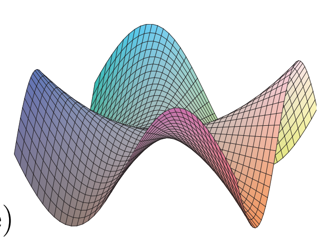

(VI)

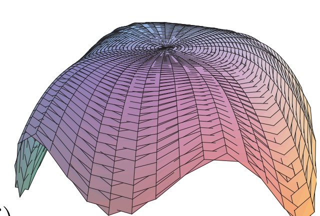

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

4. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

   (a)Desenhe a imagem de γ, indicando o sentido de percurso.

   (b) A imagem de γ está contida numa curva de nível da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

5. Seja $f(x, y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

   (a) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

   (b) Encontre uma curva derivável γ, definida num intervalo I, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

   (c) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1, 0)$.

6. Determine os pontos de continuidade de f

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \qquad\quad , & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

7. Seja $f(x, y) = \dfrac{3(x - 1)^2 + (y - 1)^2}{x^2 - y^2}$.

   (a) Num mesmo sistema de coordenadas, esboce as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.

   (b) Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y)$? **Justifique.**

8. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

9. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4 + x^2y + y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + y^4 + x^4}{x^3y - xy^3}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{y^4 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}$

   (m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4 + x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6 + y^8}$ (n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^3}$