

MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I

Lista 5 - 2020

Claudia Cueva Candido e David Pires Dias

1. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R}^2 e seja $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva de nível de f . Sabendo que $f(-1, -4) = 2$ determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$, na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$.
2. Encontre os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ no disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. Determine o retângulo de perímetro máximo, com lados paralelos aos eixos coordenados, que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 2y^2 = 4$.
4. Determine valor mínimo e valor máximo de f com as restrições dadas:
 - a) $f(x, y) = xy$, $9x^2 + y^2 = 4$
 - b) $f(x, y, z) = x + 2y$, $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$
 - c) $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + 3z^2 = 6$
5. Determine as dimensões da caixa sem tampa de maior volume que pode ser construída com 54cm^2 de papelão.
6. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a$, $a \neq 0$, e que seja paralelo ao plano $x + y + z = 100$.
7. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ tangenciam-se no ponto $(1, 1, 2)$.
8. Mostre que todos os planos tangentes ao cone $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ passam pela origem.
9. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.
 - a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
 - b) $f(x, y) = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
 - c) $f(x, y) = x^2y^2$
 - d) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$, $x > 0$
 - e) $f(x, y) = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
 - f) $f(x, y) = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$
 - g) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$
 - h) $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

10. Determine o maior produto de três números cuja soma é 100. Exiba tais números.
11. Dentre os pontos do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ qual está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?
12. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função f em torno do ponto dado:
 a) $f(x, y) = e^{x+5y}$, $P = (0, 0)$ b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$
13. Parametrize a curva C obtida como intersecção das superfícies de equação:
 a) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - z = 1$ b) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z > 0$
 c) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ d) $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$
14. Verifique que a função $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
15. Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , deriváveis até 2^a ordem.
 a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
 b) Mostre que $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$
16. Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que f é de classe \mathcal{C}^1 em \mathbb{R}^2 .