MAC 210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Terceiro Exercício–Programa – Integração Numérica

1 Parte 1: Computando trabalho

O calculo do trabalho é importante em várias áreas da engenharia e da ciência. Se a força utilizada permanece constante durante todo o deslocamento, a fórmula do trabalho é dada por

$$\text{trabalho} = \text{força} \times \text{distância}. \tag{1}$$

Por exemplo, se uma força constante de $10N$ é usada para puxar um bloco por uma distância de $5m$ então o trabalho é dado por $50J$. Quando a força varia ao longo do percurso a fórmula do trabalho é dada por

$$\text{trabalho} = \int_{x_0}^{x_n} F(x)\, dx, \tag{2}$$

onde x_0 é a posição inicial, x_n é a posição final e $F(x)$ é uma força que varia como uma função da posição x. Se $F(x)$ é fácil de integrar então a equação (2) pode ser calculada analiticamente. No entanto, em problemas reais, $F(x)$ pode ser difícil de integrar. De fato, ao analisar dados medidos, a força pode estar disponível somente na forma de tabela. Nesses casos, a integração numérica é a única opção viável para o cálculo do trabalho. Uma complexidade adicional é introduzida se o ângulo θ entre a força e a direção do movimento varia em função da posição. Nesse caso, a fórmula do trabalho é dada por

$$\text{trabalho} = \int_{x_0}^{x_n} F(x)\cos(\theta(x))\, dx. \tag{3}$$

O tarefa desta primeira parte do exercício-programa é aproximar o valor do trabalho com os dados apresentados na Tabela 1. Para isso, os passos seguir são: (i) interpolar a função $F(x)\cos(\theta(x))$ com os dados da tabela usando interpolação de **Lagrange** ou **Newton** e (ii) aproximar (3) por integração numérica utilizando (iia) a **regra do trapézio composto** e (iib) **regra de Simpson composto**.

x (em metros)	$F(x)$ (em N)	$\theta(x)$ (em radianos)	$F(x)\cos(\theta(x))$
0	0.0	0.50	0.0000
5	9.0	1.40	1.5297
10	13.0	0.75	9.5120
15	14.0	0.90	8.7025
20	10.5	1.30	2.8087
25	12.0	1.48	1.0881
30	5.0	1.50	0.3537

Tabela 1: Dados para força $F(x)$ e angulo $\theta(x)$ como uma função da posição x.

2 Parte 2: Integração por Monte Carlo

2.1 Integrais unidimensionais

Dada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere o problema de calcular

$$I = \int_0^1 g(x)dx. \tag{4}$$

A fim de calcular esta integral, observemos que, se U é uma variável aleatória distribuída uniformemente no intervalo $[0, 1]$, então sua função densidade de probabilidade f_U é dada por

$$f_U(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5}$$

Além disso, o valor esperado de U é dado por

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^1 f_U(x)dx = \int_0^1 dx. \tag{6}$$

Em particular, a variável aleatória $g(U)$ tem valor esperado dado por

$$\mathbb{E}(g(U)) = \int_0^1 g(x)f_U(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = I. \tag{7}$$

Portanto, se $U_1, \ldots, U_n$ são variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 1]$, então $g(U_1), \ldots, g(U_n)$ são variáveis aleatórias independentes com média I. Desta forma, pela Lei Forte dos Grandes Números (Lei Forte de Kolmogorov), temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g(U_i)}{n} \to \mathbb{E}\left[g(U)\right] = I \text{ quando } n \to \infty. \tag{8}$$

Conclusão: Podemos aproximar I a partir da geração de uma quantidade grande de números aleatórios $U_1, U_2, \ldots, U_n$ com distribuição uniforme em $[0, 1]$ e calcular a aproximação $\hat{I}_n$ como

$$\hat{I}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(U_i)}{n}. \tag{9}$$

Para o caso geral

$$I = \int_a^b g(x)dx \tag{10}$$

precisamos uma troca de variável para levar (10) ao caso (4).

2.2 Integrais multidimensionais

Dada $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, considere o problema de calcular

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, x_2, \ldots, x_d)dx_1dx_2 \ldots dx_d. \tag{11}$$

De forma análoga, temos que $I = \mathbb{E}\left[g(U_1, U_2, \ldots, U_d)\right]$, em que $U_1, \ldots, U_d$ são variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 1]$. Desta forma, para calcular uma

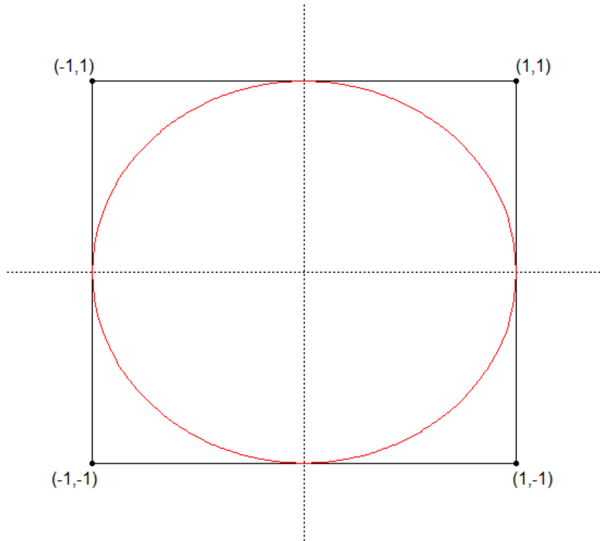

Figura 1: Circulo de raio unitário inscrito em um quadrado.

aproximação para I, basta considerar n conjuntos independentes de d variáveis aleatórias independentes e uniformente distribuídas em $[0, 1]$ dados por

$$(U_1^1, U_2^1, \ldots, U_d^1), (U_1^2, U_2^2, \ldots, U_d^2), \ldots, (U_1^n, U_2^n, \ldots, U_d^n)$$

e então calcular a estimativa $\hat{I}_n$ para I dada por

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(U_1^i, U_2^i, \ldots, U_d^i). \tag{12}$$

2.3 O que deve ser feito?

Implemente o método de integração por Monte Carlo para os casos unidimensional e multidimensional e utilize-o, variando n, para calcular as seguintes integrais:

1. $\int_0^1 \sin(x)dx$,
2. $\int_3^7 x^3 dx$,
3. $\int_0^\infty e^{-x} dx$,
4. Aproximar o valor de π. Considere a circunferência de raio unitário inscrita no quadrado de vértices $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$ como mostrado na Figura 1. Naturalmente, a área da circunferência restrita ao primeiro quadrante é igual a $\frac{1}{4}$ da área da circunferência original. Como a circunferência original tem raio unitário, sua área é igual a π, de onde concluímos que a área da circunferência contida no primeiro quadrante é igual a$\frac{\pi}{4}$.

   Desta forma, se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{13}$$

temos que

$$\pi = 4 \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)dxdy. \tag{14}$$

3 Relatório e entrega

Devem ser entregues implementações em C ou Fortran dos métodos de Monte Carlo unidimensional, Monte Carlo multidimensional, regra de Simpson composto e regra do trapézio composto.
Além disso, deve ser entregue um relatório incluindo:

- Decisões de projeto quanto à implementação dos métodos.
- Decisões teóricas dos problemas como, por exemplo, quais trocas de variáveis foram utilizadas.
- Resultados dos seus métodos e, se possível, comparações com resultados analíticos.
- Observações pertinentes para a avaliação.