Sistemas autônomos e dinâmica populacional

Por: Fabrício Caluza Machado.

Esse texto contém um resumo de alguns modelos de dinâmica populacional e apresenta ideias geométricas para o estudo qualitativo de sistemas autônomos através do plano de fases.

1. Crescimento Logístico

Inicialmente, vejamos alguns modelos de dinâmica populacional com uma única variável dependente (população), as chamadas equações de crescimento logístico.

O modelo populacional mais simples supõe que o crescimento (ou declínio) de uma população é proporcional ao seu tamanho. A equação resultante

$$\frac{dy}{dt} = ry$$

Possui solução $y = y_0 e^{rt}$, com $y_0 = y(0)$. Comparando-se o gráfico de soluções de diversos problemas de valores iniciais (figura 1) observamos uma característica interessante de seu campo de direções: fixando algum valor de y, todas as funções possuem mesma inclinação! Isso é consequência da derivada de y depender apenas de y, mas não de t.

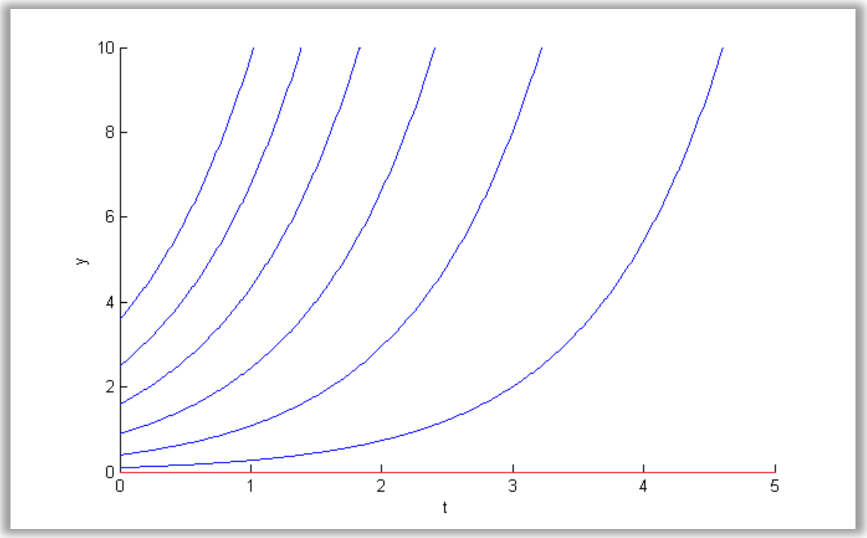

Figura 1: soluções de dy/dt = y

Ainda que esse primeiro modelo possa modelar populações por curtos períodos de tempo, vemos que as soluções exponenciais dessa equação preveem um crescimento indefinido das populações, o que não é realista. A chamada *equação logística* é uma equação do tipo $y' = f(y)$ que inclui um ponto crítico K, representando um nível de saturação do ambiente, a partir do qual a população deve decrescer:

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \qquad r > 0 \; e \; K > 0$$

Essa equação é separável e pode ser resolvida analiticamente. Mas mesmo sem resolvê-la, podemos obter informações sobre suas soluções analisando o sinal de $y' = f(y)$ (figura 2):

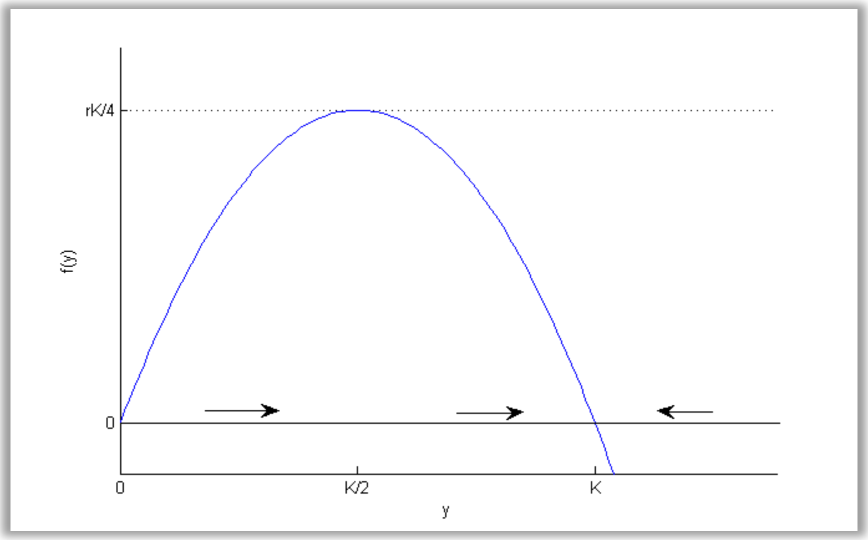

Figura 2: y' = f(y)

Para $y = 0$ ou $y = K$, $y' = 0$ e obtemos duas soluções estáveis da equação. Esses pontos também são chamados de *pontos críticos* do modelo, já que para $0 < y < K$, $y' > 0$ e a função cresce tendendo a K. Já para $y > K$, a função decresce. Observa-se que $y = 0$ é um ponto de equilíbrio instável, pois uma pequena variação desse valor fará a população se afastar do equilíbrio, tendendo a $y = K$, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

O valor r é chamado taxa de crescimento intrínseco, pois para y pequeno a equação tende à equação anterior (onde o ambiente não impunha limitações ao crescimento da população). A próxima figura mostra soluções de diversos problemas de valor inicial.

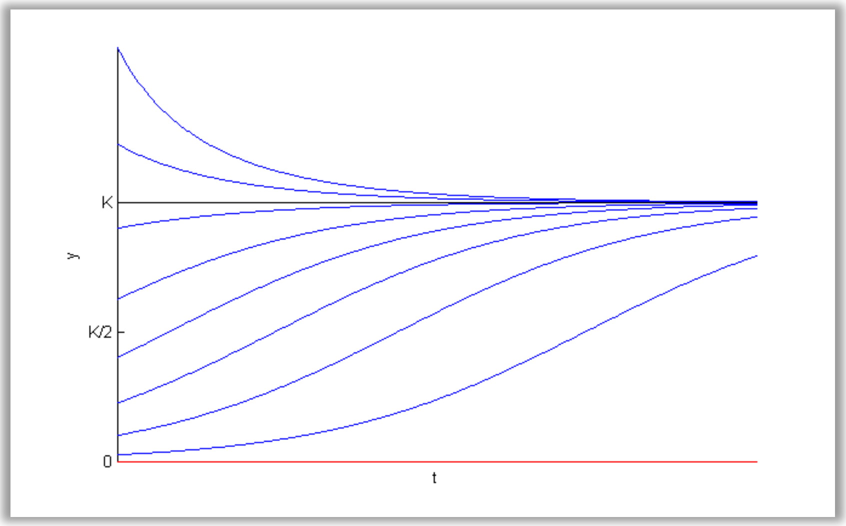

Figura 3: soluções de dy/dt = r.(1 - y/k).y

Podemos enriquecer o modelo adicionando um limiar T. A ideia é que populações muito pequenas não devem ser capazes de sobreviver sozinhas e se extinguem. Em outras palavras, é natural que o ponto $y = 0$ seja um ponto de equilíbrio estável:

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \qquad r > 0 \; e \; 0 < T < K$$

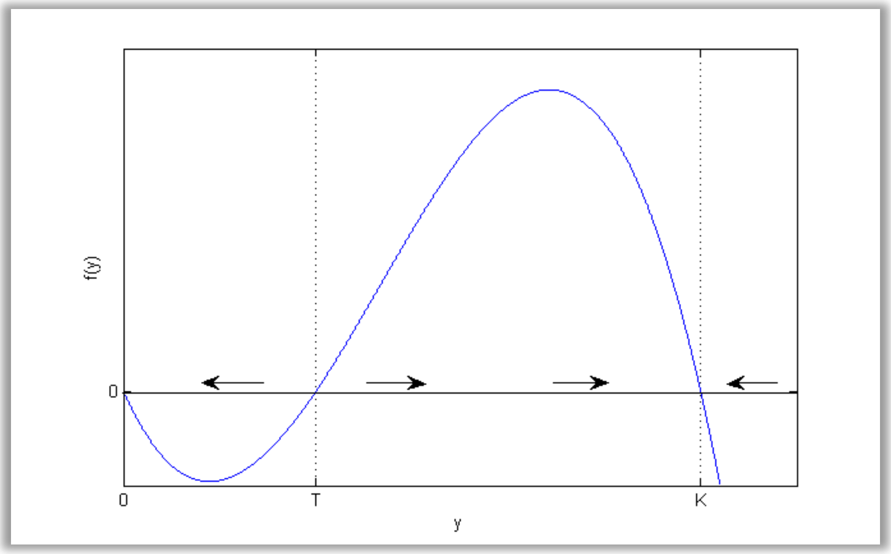

Figura 4: y'=f(y)

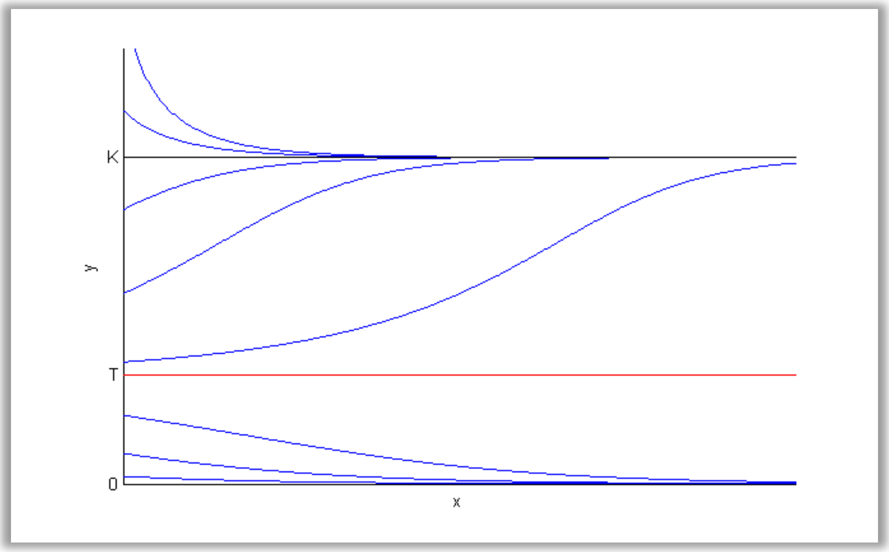

Figura 5: soluções de dy/dt = - r.(1 - y/T)(1 - y/K)

Observamos que $y = K$ continua sendo um ponto de equilíbrio estável e o limiar $y = T$ torna-se instável. T caracteriza a população mínima necessária para a sobrevivência.

2. Sistemas Autônomos

Na seção anterior, modelamos o crescimento de populações isoladas, limitadas apenas pelo próprio ambiente. Seria interessante tentar descrever a interação entre populações distintas, de forma que o crescimento de uma população dependa do tamanho de outra. Isso pode ser feito através de sistemas de equações diferenciais:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

Escrito dessa forma, temos a impressão de que estamos trabalhando com as mesmas equações que antes, mas note que agora estamos usando uma equação vetorial, em n dimensões. Dizemos que elas estão acopladas, no sentido de que uma coordenada pode influenciar no crescimento da outra.

Observe que uma solução desse sistema é uma função vetorial $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$. Essa função pode ser interpretada como a parametrização de uma curva no espaço das componentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de **x**. Esse é o chamado *plano de fase*. Obter informações sobre o comportamento geométrico das soluções no plano de fase pode ser tão importante quanto resolver as equações analiticamente. Essa abordagem é chamada de estudo qualitativo de equações diferenciais.

Para o estudo de dinâmica populacional, estamos interessados no caso em que a função **f** não depende de t:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Chamamos esse sistema de *autônomo*. Observe que as equações apresentadas na seção anterior são exemplos de equações autônomas unidimensionais. Esses sistemas ocorrem com frequência em aplicações. Fisicamente, um sistema autônomo é um cuja configuração, incluindo parâmetros físicos e forças ou efeitos externos, é independente do tempo. A resposta do sistema a condições iniciais dadas é independente, portanto, do instante em que as condições são impostas.

Nesse texto, veremos os planos de fases dos sistemas de equações com coeficientes constantes, um exemplo simples de sistema autônomo:

3. Sistemas com coeficientes constantes

São sistemas do tipo:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

Onde A é uma matriz com coeficientes constantes. Podemos obter soluções a partir dos autovetores e autovalores de A, na forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}.e^{rt}$. Observamos que, sendo o sistema linear, a solução geral pode ser escrita como combinação linear de soluções conhecidas. No resto do texto, vamos nos restringir ao caso bidimensional, e à matrizes com dois autovetores independentes. Assumiremos ainda A não singular, de modo que o sistema possui um único ponto crítico (ponto de equilíbrio) em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

A análise qualitativa das soluções depende dos autovalores da matriz:

3.1 Autovalores reais e distintos de mesmo sinal

A solução geral terá a forma:

$$\boldsymbol{x} = c_1.\boldsymbol{v}_1.\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\mathrm{t}} + \mathrm{c}_2.\mathbf{v}_2.\mathrm{e}^{\mathrm{r}_2\mathrm{t}}$$

Suponhamos $r_1 < r_2 < 0$. Vemos que $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$ quando $t \to \infty$. Se o ponto inicial, $\boldsymbol{x}(0)$, está sobre a reta que passa pela origem com direção $\boldsymbol{v}_1$, vemos que $c_2 = 0$ e a solução permanece nessa reta. Analogamente para $\boldsymbol{v}_2$. Caso a posição inicial seja algum ponto fora dessas duas retas, podemos reescrever a solução geral na forma $\boldsymbol{x} = e^{r_2 t}[c_1\boldsymbol{v}_1.e^{(r_1-r_2)t} + c_2\boldsymbol{v}_2]$, com $c_1, c_2 \neq 0$. Vemos que o termo $c_1\boldsymbol{v}_1.e^{(r_1-r_2)t}$ tende a 0 mais rapidamente que $c_2\boldsymbol{v}_2$, de modo que a solução se aproxima da origem tendendo à reta de direção $\boldsymbol{v}_2$.

A figura 6 mostra as trajetórias descritas pelas soluções o sistema $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ no plano de fases (em vermelho, as soluções pertencentes às direções dos autovetores) e a figura 7 mostra o gráfico de $x_1(t)$. (o gráfico de $x_2(t)$ é análogo).

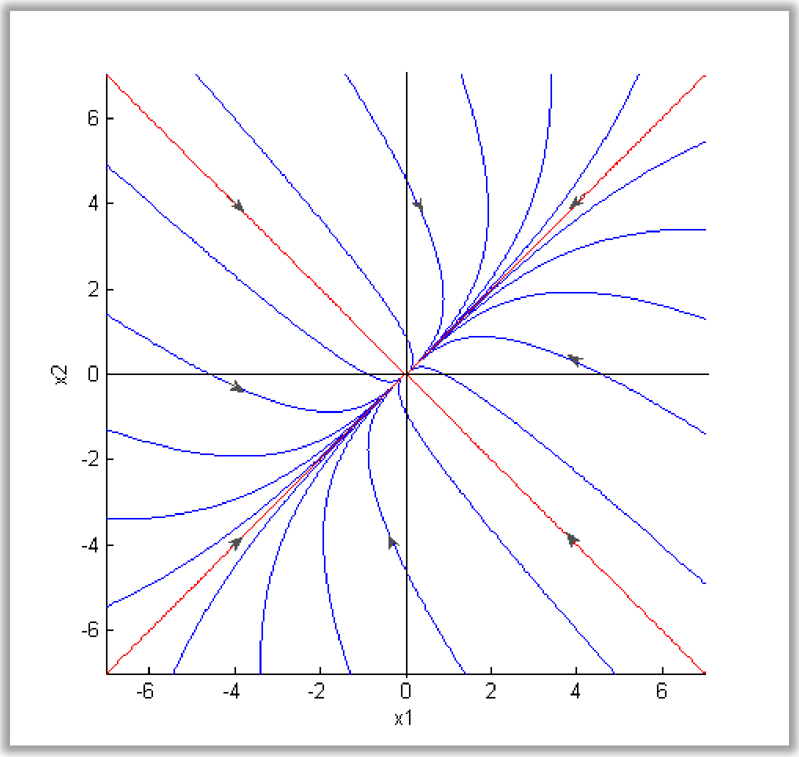

Figura 6: Trajetórias do sistema no espaço de fases

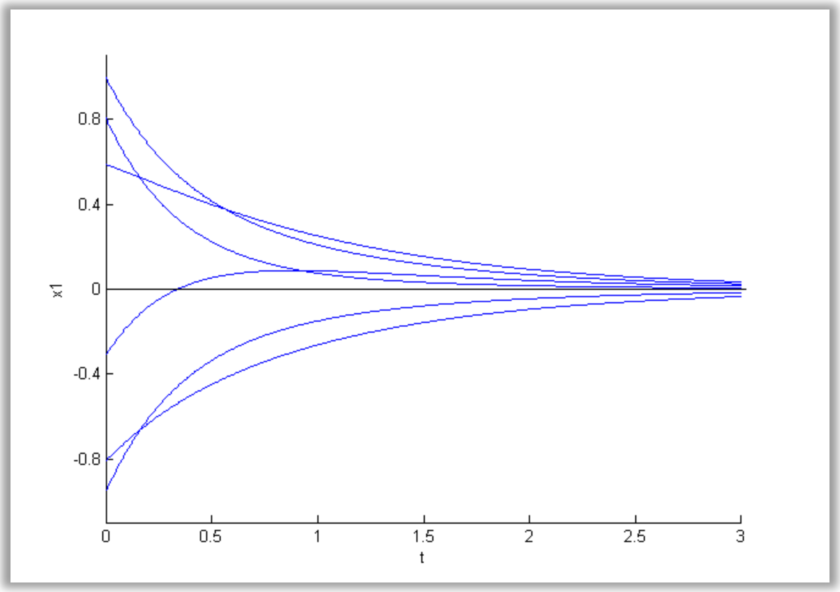

Figura 7: Gráfico de x1 x t para diversas soluções do sistema

O ponto crítico $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é um ponto de equilíbrio *assintoticamente estável*, também chamado de *nó atrator*. Caso $0 < r_2 < r_1$, a interpretação das trajetórias é igual, exceto que o sentido será de afastamento da origem. A origem é então um ponto de *equilíbrio instável.*

Caso os autovalores sejam iguais, a discussão é análoga, exceto a afirmação de que a solução se aproxima da origem tendendo à reta de direção $\boldsymbol{v}_2$, pois agora a solução pode ser escrita na forma $\boldsymbol{x} = e^{rt}[c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2]$ e todas as trajetórias serão retas (afinal, como estamos supondo $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ independentes, todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ são autovetores!).

3.2 Autovalores reais com sinais diferentes

A solução continua com a forma:

$$\boldsymbol{x} = c_1.\boldsymbol{v}_1.\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\mathrm{t}} + \mathrm{c}_2.\mathbf{v}_2.\mathrm{e}^{\mathrm{r}_2\mathrm{t}}$$

Mas agora iremos supor $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$. Soluções com ponto inicial sobre a reta de direção $\boldsymbol{v}_1$ (com $c_2 = 0$) irão se afastar da origem à medida que t crescer e soluções com ponto inicial sobre a reta de direção $\boldsymbol{v}_2$ (com $c_1 = 0$) irão se aproximar da origem. Para outras soluções, observamos que o termo $\mathrm{c}_2.\mathbf{v}_2.\mathrm{e}^{\mathrm{r}_2\mathrm{t}}$ torna-se desprezível quando $t \to \infty$ e $\boldsymbol{x}$ então, deve tender à reta de direção $\boldsymbol{v}_1$.

A figura 8 mostra as trajetórias descritas pelas soluções do sistema $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ no plano de fases. O gráfico de $x_1(t)$ possui o mesmo comportamento qualitativo do caso anterior.

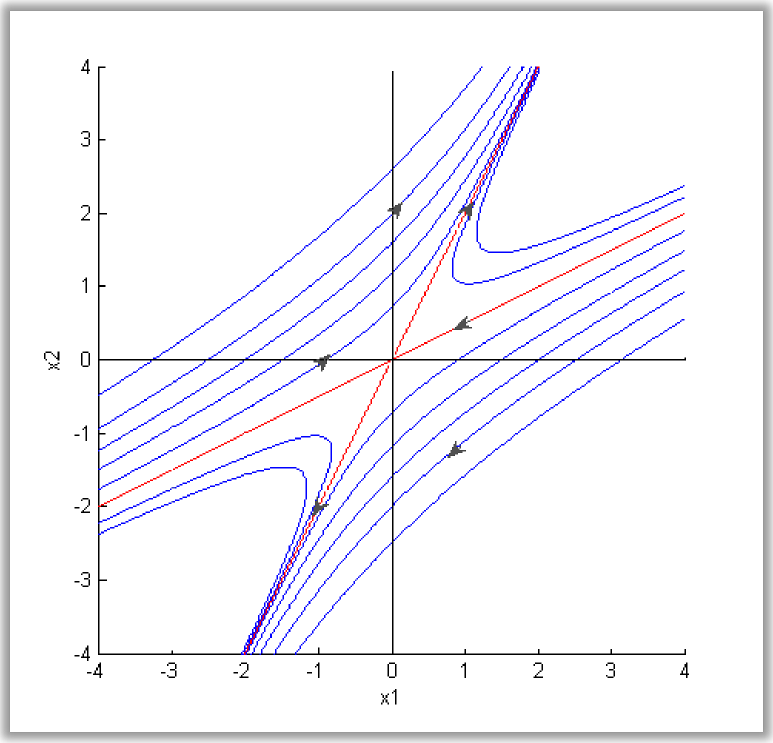

Figura 8: Trajetórias do sistema no espaço de fases

O ponto crítico $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é chamado de ponto de sela, visto que todas as soluções se afastam da origem, exceto aquelas localizadas exatamente sobre a reta de direção $\boldsymbol{v}_2$.

3.3 Autovalores complexos

Nesse caso, podemos escrever os autovalores como $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$. A solução geral (real) terá a forma:

$$\boldsymbol{x} = e^{at}[*]$$

Sendo que em [*] há uma combinação linear de duas soluções envolvendo $\cos(bt)$ e $sen(bt)$. Caso $a = 0$ (autovalores imaginários puros), as soluções serão periódicas, assim como sua trajetória no plano de fases. Pode-se mostrar que essas trajetórias serão elipses. Veja as figuras 9 e 10 com exemplos de soluções do sistema $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$. Nesse caso, a origem é classificada como ponto de equilíbrio estável, mas não assintoticamente estável, no sentido que as soluções não tendem à origem, à medida que t cresce.

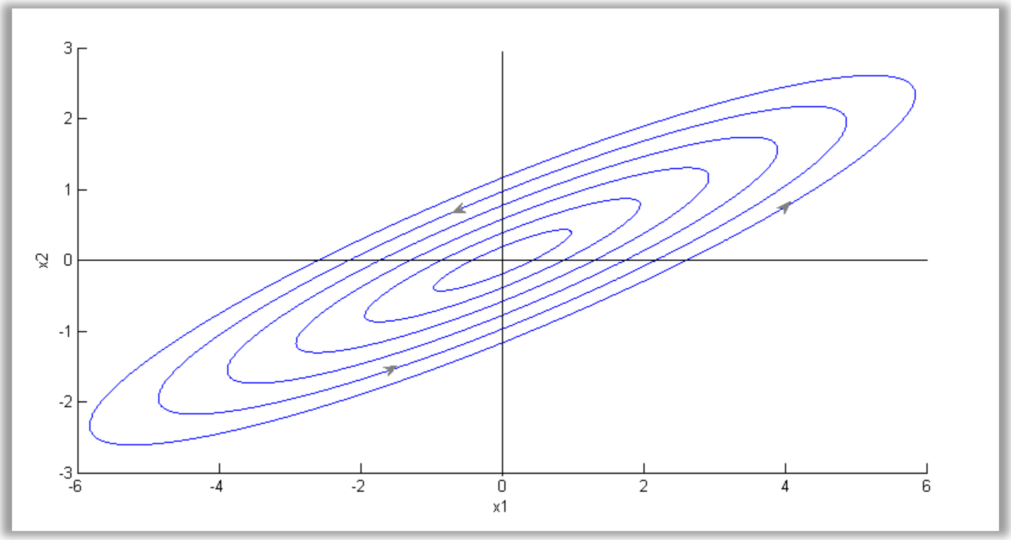

Figura 9: Trajetórias do sistema no espaço de fases

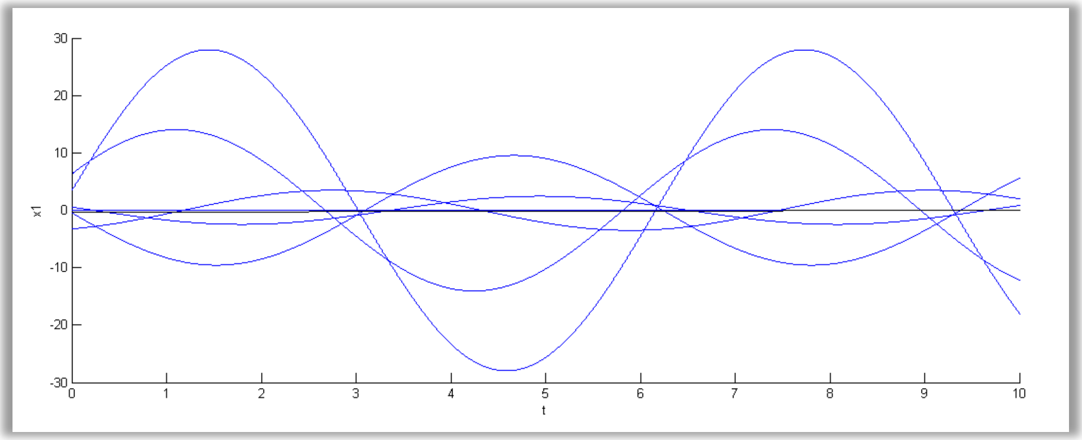

Figura 10: Gráfico de x1 x t para diversas soluções do sistema

Caso $a \neq 0$, o fator e^{at} irá alterar a amplitude da oscilação, de forma que as elipses se transformação em espirais. O sinal de a irá determinar o sentido do movimento e a estabilidade (ou instabilidade) da origem. Veja as figuras 11 e 12 que ilustram soluções do sistema $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ com $a < 0$.

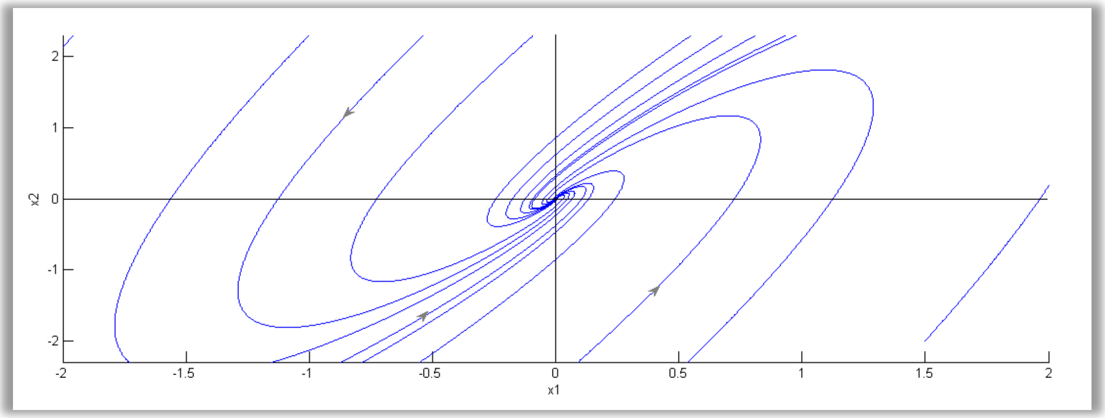

Figura 11: Trajetórias do sistema no espaço de fases

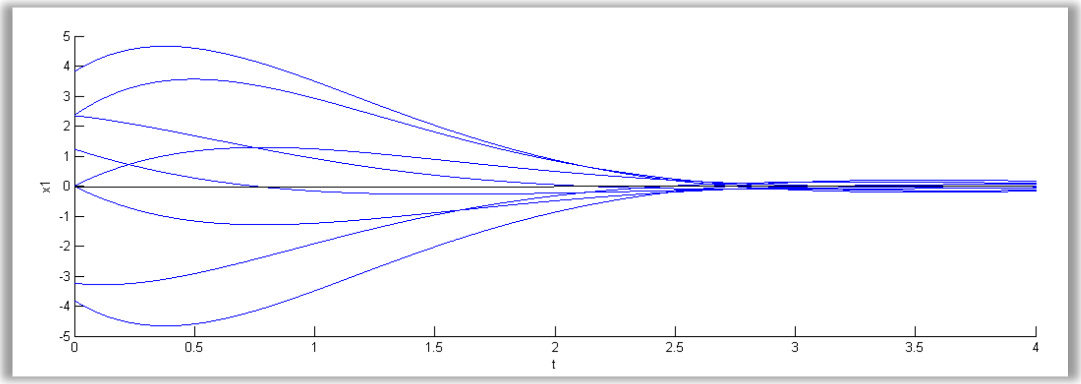

Figura 12: Gráfico de x1 x t para diversas soluções do sistema

Observa-se que em todos os planos de fases apresentados nessa seção, as trajetórias não se cruzam. Isso é uma característica dos sistemas autônomos: o plano de fases possui um campo de direções independente do tempo, logo existe apenas uma trajetória passando por cada ponto.

Referências:

[1] Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Boyce e Di Prima, Editora LTC, seções 2.5, 9.1 e 9.2

Próximo texto: **Sistemas Quase Lineares: Equações Predador – Presa**

Esse texto irá mostrar que os conceitos apresentados aqui aparecem em outras equações, em especial, nas equações de Volterra. Serão propostas, ainda, alterações nessas equações, como forma de introduzir novas características ao modelo e por fim, um exemplo de sistema não-autônomo (inclusão de sazonalidade na dinâmica populacional).