MAT3457 – ÁLGEBRA LINEAR I

1.ª lista de exercícios – 1.º semestre de 2025

1. Encontre a solução dos sistemas:

(i) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 13 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 22 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 = 2 \\ x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 \end{cases}$

2. Em cada um dos itens abaixo, encontre as condições precisas que as constantes b_i devem satisfazer para que o sistema seja compatível:

(i) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = b_4 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + b_1x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

3. Usando operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada de cada um dos sistemas lineares abaixo, determine os valores de a e b para os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução e tem infinitas soluções.

(i) $\begin{cases} x + y - az = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ x + (1-a)y - 2z = 2 - 2a \\ 2x + 3y - (2+a)z = 1 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x + y + az = a + b + 1 \\ 2x + 3y + az = 3a + 2b + 1 \\ x + y + 2az = 2b + 2 \end{cases}$

4. Em cada caso, encontre condições sobre os números a e b para que o sistema dado não tenha solução, tenha uma única solução, ou tenha infinitas soluções. Resolva o sistema quando ele for consistente.

(i) $\begin{cases} ax + y = -1 \\ 2x + y = b \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ bx + 2y = 5 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 7y + 6z = -1 \\ 2x + 4y + (a^2+1)z = b - 1 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$

5. Determine os valores de a e b que tornam o sistema

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

compatível e determinado. Em seguida, resolva o sistema.

6. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + w = 0 \\ \alpha x + 2y + z + 2w = \beta \\ x - 2y - z = \gamma \end{cases},$$

com incógnitas x, y, z, w. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.

(A) Se $\alpha \neq 1$, então o sistema possui uma única solução.

(B) Se $\alpha = 1$ e $\beta + \gamma = 0$, então o sistema possui infinitas soluções.
(C) Se $\alpha = 2$ e $\beta + \gamma = 1$, então o sistema possui infinitas soluções.
(D) Para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, o sistema possui infinitas soluções ou não possui solução.
(E) Se $\alpha = 3$ e $\gamma = 2$, então o sistema possui infinitas soluções.

7. Sejam $m, n, p \in \mathbb{R}$. O sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x + 2z = n \\ -2x + y - z = p \\ -x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

tem uma única solução se, e somente se, $2m - n + p$ é igual a
(A) $5/2$
(B) 5
(C) 6
(D) $3/2$
(E) 10

8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 = 2a \\ 3x_1 + 2x_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3. Assinale a alternativa que contém as condições exatas sobre a e b que tornam esse sistema impossível.
(A) $(a-2)(b+3) + 1 = 0$ e $a \neq 1$
(B) $(2-a)(3-b) - 3 = 0$ e $a \neq 4$
(C) $ab - 3a - 2b + 7 \neq 0$
(D) $(a-2)(b+3) \neq 0$ e $ab - 3a \neq 0$
(E) $a \neq 1$ e $b = 2a$

9. Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$. Considere o sistema linear não-homogêneo $AX = B$ e o sistema homogêneo associado $AX = 0$. Prove ou dê contra-exemplo.
(i) Se $AX = B$ tem infinitas soluções, então $AX = 0$ tem infinitas soluções.
(ii) Se $AX = 0$ tem infinitas soluções, então $AX = B$ tem infinitas soluções.
(iii) Se $AX = B$ não tem solução, então $AX = 0$ só tem a solução trivial.
(iv) Se $AX = 0$ só tem a solução trivial, então $AX = B$ tem solução única.

10. Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Considere a equação matricial $AX = B$, em que a incógnita X é uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$. Mostre que se essa equação possuir mais do que uma solução, então ela terá infinitas soluções.

11. Considere as seguintes afirmações:
I. Seja A uma matriz $n \times n$. Se, para quaisquer $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, o sistema linear

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

possuir uma única solução, então é possível obter a matriz identidade fazendo operações elementares de escalonamento sobre as linhas da matriz A.
II. Se P e Q são soluções de um sistema linear, então $P + Q$ necessariamente é solução desse sistema.
III. Se P e $2P$ são soluções de um sistema linear, então λP necessariamente é solução desse sistema, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Está correto o que se afirma em
(A) I e III, apenas.
(B) II e III, apenas.
(C) I, II e III.
(D) I e II, apenas.
(E) I, apenas.

12. Em cada um dos itens a seguir, encontre uma matriz X tal que

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

13. Encontre a matriz C que satisfaz

$$\left(\left(C\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{t}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(Aqui, A^{t} denota a transposta da matriz A.)

14. Em cada item, encontre a matriz A:

(i) $2A - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\left(3A^{\mathrm{t}} - 2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

15. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes dos seguintes tamanhos:

A	B	C	D	E
4×5	4×5	5×2	4×2	5×4

Determine quais das seguintes expressões matriciais estão definidas. Para as que estão, dê o tamanho da matriz resultante.

$$BA, \quad AC + D, \quad AE + B, \quad AB + B, \quad E(A + B), \quad E(AC), \quad E^{\mathrm{t}}A, \quad (A^{\mathrm{t}} + E)D.$$

16. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule os seguintes, quando possível:

$$D + E, \ 2B - C, \ 5A, \ -7C, \ -3(D + 2E), \ 2A^{\mathrm{t}} + C, \ D^{\mathrm{t}} - E^{\mathrm{t}}, \ (D - E)^{\mathrm{t}}, \ B^{\mathrm{t}} + 5C^{\mathrm{t}}, \ 2E^{\mathrm{t}} - 3D^{\mathrm{t}},$$
$$(2E^{\mathrm{t}} - 3D^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}, \ A(BC), \ BA, \ CC^{\mathrm{t}}, \ (DA)^{\mathrm{t}}, \ D^{\mathrm{t}}E^{\mathrm{t}} - (ED)^{\mathrm{t}}, \ 4(BC) + 2B, \ B^{\mathrm{t}}(CC^{\mathrm{t}} - A^{\mathrm{t}}A)$$

17. Calcule AB e BA, em que A e B são as seguintes matrizes:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. Dizemos que duas matrizes quadradas de mesmo tamanho A e B comutam se $AB = BA$. Encontre todas as matrizes de tamanho 2×2 que comutam com:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

19. Uma matriz quadrada A é chamada *simétrica* se $A^{\mathrm{t}} = A$ e *antissimétrica* se $A^{\mathrm{t}} = -A$.
   (i) Mostre que se B é uma matriz quadrada então:
   (a) BB^{t} e $B + B^{\mathrm{t}}$ são simétricas; (b) $B - B^{\mathrm{t}}$ é anti-simétrica.
   (ii) Mostre que toda matriz quadrada poder ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.

20. Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesmo tamanho. Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$, então $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

21. Se A e B são matrizes e AB é quadrada, explique por que BA também é quadrada.

22. Se $AC = CB$, explique por que A e B são ambas quadradas.

23. Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesmo tamanho. Se $AB = BA$, mostre que valem as seguintes igualdades:
$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB, \quad (A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB, \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$
Reciprocamente, mostre que se alguma das igualdades anteriores for válida, então $AB = BA$.

24. Em cada caso, demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo que mostre que ela é falsa. Sejam A e B matrizes.
   (i) Se AB está definida, então BA está definida.
   (ii) Se AB está definida e é uma matriz quadrada, então BA está definida.
   (iii) Se $AB = BA$, então A e B são ambas quadradas e de mesmo tamanho.
   (iv) Se A^2 pode ser calculada, então A deve ser quadrada.
   (v) Se A tem uma linha de zeros, então AB tem uma linha de zeros.
   (vi) Se A tem uma coluna de zeros, então AB tem uma coluna de zeros.
   (vii) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.
   (viii) A igualdade $(AB)^2 = A^2B^2$ vale sempre.
   (ix) Se $AJ = A$, então J é uma matriz identidade.
   (x) Se $A^2 = A$, então $A = 0$ ou $A = I$.

25. Determine a inversa de cada uma das matrizes seguintes:
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

26. Resolva os sistemas de equações lineares
$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix},$$
em que A são matrizes do exercício anterior.

27. Determine a única matriz X de tamanho 3×2 que satisfaz
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} X - 5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -7 \\ 14 & 0 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

28. Assuma que A é uma matriz invertível tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Encontre X e Y tais que
$$AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad YA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

29. Sejam A e B matrizes de tamanho $n \times n$ invertíveis. Determine todas as matrizes X de tamanho $n \times n$ que satisfazem $AB^{-1}AXA^{-1}B + 9AB = 0$.

30. Em cada um dos itens abaixo, encontre a matriz A.
   (i) $(3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$
   (ii) $(2A^{-1} - 3I)^{\mathrm{t}} = 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
   (iii) $\left(A^{\mathrm{t}} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (iv) $\left(2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 5A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(4A^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$

31. Para quais valores de t a matriz $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$ *não* tem inversa?

32. Se a primeira linha de uma matriz A consiste de zeros, mostre que A^{-1} não existe. Se a primeira coluna de uma matriz B consiste de zeros, mostre que que B^{-1} não existe.

33. Em cada caso, mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Assuma em todo o exercício que A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho.
   (i) Se $A \neq 0$, então A é invertível.
   (ii) Se A é invertível, então $A \neq 0$.
   (iii) Se $A^3 = I$, então A é invertível.
   (iv) Se $A^2 = A$ e $A \neq 0$, então A é invertível.
   (v) Se A e B são ambas invertíveis, então $A + B$ é invertível.
   (vi) Se $AB = 0$ e $A \neq 0$, então $B = 0$.
   (vii) Se A é invertível e $AC = I$, então $C = A^{-1}$.
   (viii) Se A^2 é invertível, então A é invertível.

34. Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ é sempre invertível e que a sua inversa é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{bmatrix}$.

35. (i) Sejam $A \in M_m(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com A invertível. Mostre que se $AB = AC$, então $B = C$.
   (ii) Existe alguma matriz invertível A tal que $A^2 = 0$?
   (iii) Dê um exemplo de uma matriz $A \in M_m(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = 0$.

36. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e calcule seu determinante. Em cada caso, procure adivinhar quanto será $\det(B)$, em que B é a matriz obtida a partir de A
   (i) permutando-se as linhas 2 e 3.
   (ii) multiplicando-se a linha 2 por $\frac{2}{3}$.
   (iii) multiplicando-se a linha 3 por 2.
   (iv) somando-se a linha 2 à linha 3.
   (v) somando-se $-\pi$ vezes a linha 1 à linha 2.
   (vi) transpondo-se A.

37. Calcule os determinantes das seguintes matrizes. Recomenda-se fazer operações elementares para reduzir as contas.

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

38. Encontre $\det(A)$ sabendo que A é uma matriz 3×3 e $\det(7A) = 6$. E se A for 4×4?

39. Suponha que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 8$. Encontre $\det \begin{bmatrix} e+h & 2h & 3b+e \\ f+i & 2i & 3c+f \\ d+g & 2g & 3a+d \end{bmatrix}$ e $\det \begin{bmatrix} d-g & 3g & 2a+d \\ f-i & 3i & 2c+f \\ e-h & 3h & 2b+e \end{bmatrix}$.

40. Suponha que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} = 1$. Calcule $\det \begin{bmatrix} b+q & (x-1)q & 5v+2b \\ c+r & (x-1)r & 5w+2c \\ a+p & (x-1)p & 5u+2a \end{bmatrix}$.

41. Calcule $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

42. Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $A^2 = -I$. Mostre que não existem matrizes de tamanho 3×3 tais que $A^2 = -I_3$. Mostre que não existem matrizes de tamanho $n \times n$, com n ímpar, tais que $A^2 = -I_n$.

43. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $\det A$ e verifique que A é invertível, quaisquer que sejam os valores de a, b e c.

44. Use operações elementares para mostrar que $\det \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 2a^2-a-1 & 2b^2-b-1 & 2c^2-c-1 \end{bmatrix} = 0$ e que $\det \begin{bmatrix} a+2 & b+2 & c+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{bmatrix} = 0$.

45. Em cada caso, demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todos os ítens, A, B e C são matrizes quadradas.
    (i) Se $A^2 = I$, então $\det(A) = 1$.
    (ii) Se $A^3 = I$, então $\det(A) = 1$.
    (iii) Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = AC$, então $B = C$.
    (iv) $\det(3A) = 3\det(A)$.
    (v) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}BA) = \det(B)$.
    (vi) $\det(AB) = \det(BA)$.
    (vii) Se $\det(A) = 0$, então A possui duas linhas idênticas.
    (viii) $\det(-A) = -\det(A)$.
    (ix) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
    (x) Se A é 2×2, $\det(7A) = 49\det(A)$.
    (xi) Se $\det(A) = \det(B)$, então $A = B$.
    (xii) Se a diagonal principal de A consiste de zeros, então $\det(A) = 0$.
    (xiii) Se $A^{\mathrm{t}} = -A$, então $\det(A) = -1$.

46. Sob quais condições vale $\det(-A) = \det(A)$? E $\det(-A) = -\det(A)$?

47. O que pode ser dito sobre o valor de $\det(A)$, sabendo-se que A é uma matriz $n \times n$ tal que (i) $A^2 = I$, (ii) $A^3 = I$, (iii) $A^2 = 5A$, (iv) $A = -A^{\mathrm{t}}$, (v) $A^2 + I = 0$, (vi) $A^3 = A$, (vii) $A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$?

48. Suponha que $\det(A) = -3$, $\det(B) = 5$ e $\det(C) = -1$, em que A, B e C são matrizes quadradas de mesmo tamanho. Calcule $\det(A^3B^{-2}C^{\mathrm{t}}B^3A^{-2})$ e $\det\big(B^{\mathrm{t}}A^{-1}B^{-1}CA^3(C^{-1})^{\mathrm{t}}\big)$.

49. Se A é 4×4 e $\det(3A^{-1}) = 5 = \det\big(A^2(B^{\mathrm{t}})^{-1}\big)$, encontre $\det(A)$ e $\det(B)$.

Respostas

1. (i) Incompatível; (ii) $(1, 3, 1)$; (iii) $(1 - r - s, 2 - r - 2s - t, r, 3 - 3s, s, t)$, $r, s, t \in \mathbb{R}$; (iv) $(2 - t, 2 + 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$
2. (i) $b_1 = b_2 + b_3$; (ii) $b_1 = b_3 + b_4$ e $b_2 = 2b_3 + b_4$; (iii) $b_1 \in \mathbb{R}$; (iv) $b_1 \neq 2$
3. (i) Tem uma única solução quando $a \neq 2$ e $a \neq -1$; não tem soluções quando $a = -1$; tem infinitas soluções quando $a = 2$.
   (ii) Tem infinitas soluções quando $a = 0$ e $b = -1$; não tem soluções quando $a = 0$ e $b \neq -1$; tem uma única solução quando $a \neq 0$.
4. (i) Se $a = 2$ e $b \neq -1$, o sistema é inconsistente; se $a = 2$ e $b = -1$, é consistente com infinitas soluções: $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t\right), t \in \mathbb{R}$; se $a \neq 2$, é consistente com uma única solução: $\left(\frac{b+1}{2-a}, \frac{-2-ab}{2-a}\right)$.
   (ii) Se $ab \neq 2$, o sistema é consistente com uma única solução: $\left(\frac{2-5a}{2-ab}, \frac{5-b}{2-ab}\right)$; se $ab = 2$ e $b = 5$ (ou seja $a = \frac{2}{5}$), é consistente com infinitas soluções: $\left(\frac{5-2t}{5}, t\right), t \in \mathbb{R}$; se $ab = 2$ e $b \neq 5$, é inconsistente.
   (iii) Se $a = 1$ ou $a = -1$ e $b \neq -1$, o sistema é inconsistente; se $a = 1$ ou $a = -1$ e $b = -1$, é consistente com infinitas soluções: $(-5 + 5t, 2 - 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, é consistente com uma única solução: $\left(-5 + 5\frac{b+1}{a^2-1}, 2 - 3\frac{b+1}{a^2-1}, \frac{b+1}{a^2-1}\right)$.
   (iv) Se $a \neq 0$ e $b = 2$, o sistema é consistente com infinitas soluções (neste caso, as soluções são da forma $\left(\frac{2-2r}{a}, \frac{2-2r}{a}, r\right), r \in \mathbb{R}$); se $a \neq 0$ e $b \neq 2$, é consistente com uma única solução (neste caso, a solução é $\left(\frac{2-b}{a}, \frac{b-2}{a}, 1\right)$; se $a = 0$ e $b = 2$, é consistente com infinitas soluções (neste caso, as soluções são da forma $(r, s, 1), r, s \in \mathbb{R}$); se $a = 0$ e $b \neq 2$, é inconsistente.
5. $a = 2$ e $b = 4$; $x = 3$ e $y = 1$
6. (A)
7. (B)
8. (B)
9. (i) verdadeira; (ii) falsa; (iii) falsa; (iv) em geral, falsa (mas verdadeira se $m = n$)
11. (A)
12. (i) $X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$; (ii) $X = \begin{bmatrix} 2+\lambda & -1+\mu & -1+\gamma \\ -2-2\lambda & 1-2\mu & 1-2\gamma \\ \lambda & \mu & \gamma \end{bmatrix}$
13. $C = \begin{bmatrix} 6 & -14 & 2 \\ 3 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
14. (ii) $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -10 & 1 \\ 6 & 5 & 11 \end{bmatrix}$
15. BA não está definida; $AC + D$ é 4×2; $AE + B$ não está definida; $AB + B$ não está definida; $E(A + B)$ é 5×5; $E(AC)$ é 5×2; $E^t A$ não está definida; $(A^t + E)D$ é 5×2
18. (iv) As matrizes são $\begin{bmatrix} s & t \\ t & s \end{bmatrix}$ onde s e t são quaisquer números reais.
19. (i) As matrizes BB^{t} e $B + B^{\mathrm{t}}$ são simétricas se coincidirem com sua transposta:

$$(BB^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = (B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} B^{\mathrm{t}} = BB^{\mathrm{t}}, \quad (B + B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} + (B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} + B = B + B^{\mathrm{t}}.$$

   Vejamos que $B - B^{\mathrm{t}}$ é antisimétrica:

$$(B - B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} - (B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} - B = -(B + B^{\mathrm{t}}).$$

   (ii) Se A é uma matriz quadrada, então $A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{t}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{t}})$.
21. Sejam A e B matrizes de tamanhos $m \times n$ e $p \times q$, respectivamente. O produto AB está definido se, e somente se, $n = p$. Além disso, AB é de tamanho $m \times q$. Se AB é quadrada então $m = q$. Ou seja, B é de tamanho $n \times m$. Portanto, BA existe e é de tamanho $n \times n$.
23. Suponha que $AB = BA$. Então,

$$\begin{aligned}(A - B)^2 &= (A - B)(A - B) = A(A - B) - B(A - B) \\ &= A^2 - AB - BA + B^2 \overset{(*)}{=} A^2 + B^2 - 2AB.\end{aligned}$$

   $(*)$ usamos que $AB = BA$.

Suponha, agora, que $(A-B)^2 = A^2+B^2-2AB$. Sabemos que $(A-B)^2$ é, por definição $(A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$. Ou seja, temos que

$$A^2+B^2-2AB = A^2 - AB - BA + B^2.$$

Subtraindo A^2+B^2 dos dois lados da igualdade obtemos $-2AB = -AB - BA$. Somando AB aos dois lados da igualdade obtemos $AB = BA$.

24. (i) falsa; (ii) verdadeira; (iii) verdadeira; (iv) verdadeira; (v) verdadeira; (vi) falsa; (vii) falsa; (viii) falsa; (ix) falsa; (x) falsa
26. $X = A^{-1}\begin{bmatrix}1\\8\\3\end{bmatrix}$; $X = A^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\pi\end{bmatrix}$.
28. $X = A^{-1}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\-1 & 0 & 5\end{bmatrix}A^{-1}$
29. $X = -9A^{-1}BA$
30. (ii) $(2A^{-1}-3I)^{\mathrm{t}} = 5\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \Longrightarrow 2A^{-1}-3I = \left(5\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{t}} = 5\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$

    $\Longrightarrow 2A^{-1} = 5\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 15\\10 & 23\end{bmatrix}$

    $\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & 15\\10 & 23\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & \frac{15}{2}\\5 & \frac{23}{2}\end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix}4 & \frac{15}{2}\\5 & \frac{23}{2}\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix}23 & -15\\-10 & 8\end{bmatrix}$

    (iv) $\left(2\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix} - 5A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = (4A^{\mathrm{t}})^{-1}$

    $\Longrightarrow 2\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix} - 5A^{-1} = \left((4A^{\mathrm{t}})^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = ((4A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}})^{-1} = (4A)^{-1} = \frac{1}{4}A^{-1}$

    $\Longrightarrow 2\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix} = 5A^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1} = \frac{21}{4}A^{-1}$

    $\Longrightarrow A^{-1} = \frac{8}{21}\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix} \Longrightarrow A = \frac{21}{8}\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix}^{-1} = \frac{21}{40}\begin{bmatrix}3 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$
31. $t=2$ e $t=-3$
33. (i) falsa; (ii) verdadeira; (iii) verdadeira; (iv) falsa; (v) falsa; (vi) falsa; (vii) verdadeira; (viii) verdadeira
34. Basta realizar o produto.
35. (ii) não; (iii) um exemplo é $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$
36. $\det A = 126$; (i) -126; (ii) 84; (iii) 252; (iv) 126; (v) 126; (vi) 126
37. O determinante da matriz 4×4 é -26; o da 5×5 é -2.
38. $\det A = \frac{6}{7^3}$; se A é 4×4, $\det A = \frac{6}{7^4}$
39. O determinante da primeira matriz é 48; o da segunda, -48.
40. $5(x-1)$
41. 2 e 2
43. $\det A = 1 + a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$
45. (i) falsa; (ii) verdadeira; (iii) verdadeira; (iv) falsa; (v) verdadeira; (vi) verdadeira; (vii) falsa; (viii) falsa; (ix) falsa; (x) verdadeira; (xi) falsa; (xii) falsa; (xiii) falsa
46. n par; n ímpar
47. (i) $\det A = \pm 1$, (ii) $\det A = 1$, (iii) $\det A = 0$ ou $\det A = 5^n$, (iv) $\det A = 0$ se n é ímpar, (v) $\det A = \pm 1$ se n é par, se n é ímpar é impossível ter $A^2 = -I$, (vi) $\det A = 0$ ou $\det A = \pm 1$. (vii) $\det A = \pm 1$
48. 15 e 9
49. $\det A = \frac{3^4}{5}$, $\det B = \frac{3^8}{5^3}$