PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA E APLICAÇÕES
LISTA DE EXERCÍCIOS 0
25.02.2014

IMPORTANTE: Exercícios marcados devem ser entregues até a aula de 11.03.

EXERCÍCIO 1. Prove:

(a) $x_0, \ldots, x_k$ são afim-independentes sse nenhum x_i é combinação afim dos demais.

(b) $x_0, \ldots, x_k$ são afim-independentes sse $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ são linearmente independentes.

EXERCÍCIO 2. Teorema de Carathéodory (1911).

[5.0] (a) Se $x \in \operatorname{cone} X$, então $x \in \operatorname{cone} B$ para um $B \subseteq X$ linearmente independente.

[5.0] (b) Se $x \in \operatorname{conv} X$, então $x \in \operatorname{conv} B$ para um $B \subseteq X$ afim-independente.

[5.0] **EXERCÍCIO 3.** Seja $A \in \mathcal{H}^n$. Prove que o maior autovalor de A é igual a

$$\max_{\|x\|=1} x^* A x.$$

EXERCÍCIO 4. Seja $A \in \mathcal{H}^n$. Prove que

$$\begin{aligned} & A \text{ é positiva semidefinida} \\ & \quad \iff \exists\, B \in \mathcal{H}^n \text{ tal que } A = B^2 \\ & \quad \iff \exists\, B \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ tal que } A = BB^{\mathsf{T}} \\ & \quad \iff \exists\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^r, \text{ onde } r = \operatorname{posto} A, \text{ tais que } A_{ij} = x_i^* x_j. \end{aligned}$$

O que muda com $\mathbb{R}$ no lugar de $\mathbb{C}$? O que muda quando A é positiva definida?

EXERCÍCIO 5. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone convexo. Escreva $x \succeq y$ se $x - y \in C$. Prove que $\succeq$ é uma ordem parcial e que:

1. se $x \succeq y$ e $\alpha \geq 0$ então $\alpha x \succeq \alpha y$;
2. se $x \succeq y$ e $x' \succeq y'$ então $x + x' \succeq y + y'$.

EXERCÍCIO 6. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone convexo.

[2.0] (a) Se C é pontudo, então 0 é ponto extremal de C.

[7.0] (b) Se C é fechado e 0 é ponto extremal, então C é pontudo.

[7.0] (c) Mostre um exemplo de um cone que não é pontudo e do qual 0 é ponto extremal.

EXERCÍCIO 7. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone convexo.

[5.0] (a) Prove que C^* é fechado.

[5.0] (b) Prove que $(C^*)^* = \text{fecho}(C)$. Logo se C é fechado então $(C^*)^* = C$.

EXERCÍCIO 8. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ dois vetores linearmente independentes. Qual é o dual de $\operatorname{cone}\{x_1, x_2\}$?

EXERCÍCIO 9. Prove que o conjunto das matrizes reais (ou complexas) positivas semidefinidas forma um cone convexo, fechado e pontudo.

EXERCÍCIO 10. Sejam $A, B \in \mathcal{H}^n$ tais que $A, B \succeq 0$. Então $\langle A, B \rangle \geq 0$.

EXERCÍCIO 11. Qual é o interior do cone das matrizes positivas semidefinidas? Qual é o cone dual?

EXERCÍCIO 12. Seja $A \in \mathcal{H}^n$. Então:

(a) $\operatorname{tr} A$ é a soma dos autovalores de A.

(b) $\det A$ é o produto dos autovalores de A.

EXERCÍCIO 13. Prove que:

(a) O produto tensorial $\otimes\colon \mathbb{R}^U \times \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^{U \times V}$ é bilinear: para todo x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^U$, $y \in \mathbb{R}^V$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) \otimes y = (\alpha x_1) \otimes y + (\beta x_2) \otimes y,$$

e similarmente para y.

(b) Se $x_1, \dots, x_m$ é uma base de $\mathbb{R}^U$ e $y_1, \dots, y_n$ é uma base de $\mathbb{R}^V$, então $x_i \otimes y_j$ é uma base de $\mathbb{R}^U \otimes \mathbb{R}^V$.

(c) Se x_1, $x_2 \in \mathbb{C}^U$ e y_1, $y_2 \in \mathbb{C}^V$, então $(x_1 \otimes y_1)^*(x_2 \otimes y_2) = (x_1^* x_2)(y_1^* y_2)$.

EXERCÍCIO 14. Sejam $A \in \mathbb{R}^{U_1 \times V_1}$, $B \in \mathbb{R}^{U_2 \times V_2}$, $x \in \mathbb{R}^{V_1}$ e $y \in \mathbb{R}^{V_2}$. Então

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By.$$

[5.0] **EXERCÍCIO 15.** Dadas decomposições espectrais de matrizes simétricas A e B, descreva uma decomposição espectral de $A \otimes B$. Conclua que, se A, $B \succeq 0$, então $A \otimes B \succeq 0$.

EXERCÍCIO 16. Prove que o produto de Hadamard de matrizes positivas semidefinidas é uma matriz positiva semidefinida. Em outras palavras, sejam A, $B \in \mathcal{H}^n$ e escreva $(A \odot B)_{ij} = A_{ij} B_{ij}$. Se A, $B \succeq 0$, então $A \odot B \succeq 0$.