

PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA E APLICAÇÕES
LISTA DE EXERCÍCIOS 1

13.03.2014

IMPORTANTE: O exercício marcado deve ser entregue até a aula de 25.03. Este exercício deve ser feito em duplas.

EXERCÍCIO 1. Escreva uma função SAGE que recebe um polinômio de uma variável e devolve o seu mínimo global.

EXERCÍCIO 2. Escreva uma função SAGE que recebe um polinômio p de uma variável e decide se ele é positivo. Caso o polinômio seja positivo, a função deve devolver polinômios q_1, \dots, q_k tais que $p = q_1^2 + \dots + q_k^2$.

EXERCÍCIO 3. Escreva uma função SAGE que recebe uma matriz simétrica A e um inteiro k e devolve a soma dos k maiores autovalores de A . Use para tanto o teorema de Fan.

[100] **EXERCÍCIO 4.** McEliece, Rodemich e Rumsey [The Lovász bound and some generalizations, *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences* 3 (1978) 134–152] e Schrijver [A comparison of the Delsarte and Lovász bounds, *IEEE Transactions on Information Theory* IT-25 (1979) 425–429] propuseram uma versão mais forte do número teta de Lovász. Neste exercício iremos investigar essa versão.

Dado um grafo $G = (V, E)$, seja

$$\begin{aligned} \vartheta'(G) = \max \quad & \langle J, X \rangle \\ & \text{tr } X = 1, \\ & X(u, v) = 0 \quad \text{para todo } uv \in E, \\ & X \geq 0, \\ & X: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ é positiva semidefinida,} \end{aligned}$$

onde $X \geq 0$ significa que todas as entradas de X devem ser não-negativas. O número $\vartheta'(G)$ é o parâmetro proposto por McEliece, Rodemich e Rumsey e Schrijver.

(a) Prove que $\alpha(G) \leq \vartheta'(G) \leq \vartheta(G)$.

(b) Escreva uma função SAGE que recebe um grafo G e devolve os valores de $\vartheta(G)$ e $\vartheta'(G)$.

(c) Escreva uma função SAGE que liste todos os grafos conexos G com até n vértices que sejam tais que $\vartheta'(G) < \vartheta(G)$. Use sua função para gerar uma lista com todos os grafos conexos de até 8 vértices para os quais $\vartheta'(G) < \vartheta(G)$.

(d) Encontre um grafo G conexo para o qual $\lfloor \vartheta'(G) \rfloor < \lfloor \vartheta(G) \rfloor$. Qual o menor tal grafo que você consegue encontrar?

(e) Seja G um grafo conexo tal que $\vartheta'(G) < \vartheta(G)$. Mostre como obter a partir de G grafos conexos para os quais ϑ' e ϑ estejam tão distantes um do outro quanto desejado.

Importante: A solução deste exercício deve ser enviada pelo PACA. Você deve enviar tanto um arquivo contendo as funções SAGE pedidas, quanto um relatório contendo a solução de todos os itens.