PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA E APLICAÇÕES
LISTA DE EXERCÍCIOS 3
09.04.2014

IMPORTANTE: Os exercícios marcados devem ser entregues até a aula de 24.04. Os execícios devem ser feitos em duplas.

[75] **EXERCÍCIO 1.** Seja $G = (V, E)$ um grafo e $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ uma função de pesos. A *matriz laplaciana* de G e w é a matriz $A\colon V \times V \to \mathbb{R}$ tal que

$$A(u,v) = \begin{cases} w(\delta(u)) & \text{if } u = v, \\ -w_{uv} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lembre-se de que o peso de um corte máximo em G é igual a

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{SDP}_1(A) \leq \frac{1}{4}\,\mathrm{SDP}_\infty(A).$$

(a) Prove que a matriz laplaciana é positiva semidefinida.

(b) Seja λ o máximo autovalor de A. Mostre que

$$\mathrm{SDP}_\infty(A) \leq \lambda |V|. \qquad (*)$$

(c) Um *automorfismo* de G é uma permutação $\pi\colon V \to V$ tal que $\pi(u)\pi(v) \in E$ se e somente se $uv \in E$. Um grafo é *vértice transitivo* se para todo u, $v \in V$ há um automorfismo π de G tal que $\pi(u) = v$. Mostre que, se G é vértice transitivo e $w(\pi(u)\pi(v)) = w(uv)$ para toda aresta $uv \in E$ e todo automorfismo π de G, então $(*)$ vale com igualdade.

(d) Calcule $\mathrm{SDP}_\infty(A)$ quando G é um circuito de tamanho n e todos os pesos são unitários.