Matrizes

Uma matriz é um agrupamento retangular de números reais. Denota-se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ em que cada } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que o tamanho da matriz A é $m \times n$. Isso significa que A possui m linhas e n colunas. O elemento de A na entrada (i,j) é o número na i-ésima linha e j-ésima coluna, ou seja, é o número a_{ij}. Denota-se a entrada (i,j) de A por $(A)_{ij}$, então $(A)_{ij} = a_{ij}$.

Quando $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n. Neste caso, a diagonal principal da matriz são os elementos nas entradas $(1,1), (2,2), \ldots, (n,n)$.

Definição. Sejam A e B duas matrizes. Dizemos que A e B são iguais, denotado por $A = B$, se A e B possuem o mesmo tamanho (ou seja, possuem o mesmo número de linhas e de colunas), e se $(A)_{ij} = (B)_{ij}$, para toda entrada (i,j).

Vamos introduzir operações envolvendo matrizes.

Soma de matrizes. A soma de matrizes está definida entre duas matrizes que possuem o mesmo tamanho. Dadas A e B, matrizes $m \times n$, define-se $A+B$ como sendo a matriz $m \times n$ tal que $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$, para cada (i,j).

Equivalentemente, se

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

então

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Sejam

$$\underset{2\times 3}{A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}}, \quad \underset{2\times 3}{B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}}, \quad \underset{2\times 2}{C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

Então

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+2 \\ 0+(-2) & -1+4 & 5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

As somas $A+C$ e $B+C$ não estão definidas, pois os tamanhos de A e C, e de B e C não coincidem.

Multiplicação por escalar. Dado A uma matriz $m\times n$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, definimos λA como sendo a matriz de tamanho $m\times n$, tal que $(\lambda A)_{ij}=\lambda(A)_{ij}$, para toda entrada (i,j). Em outras palavras, se

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ então } \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2x2, ou seja, A é quadrada de ordem 2)

Exemplo. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Então
$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2(-1) & 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$-A = (-1)\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{2}\,A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes. Sejam A uma matriz $m_1 \times n_1$ e B uma matriz $m_2 \times n_2$. O produto AB está definido somente se $n_1 = m_2$. Neste caso, a matriz resultante tem tamanho $m_1 \times n_2$.

Assuma que A possui tamanho $m \times l$ e B tamanho $l \times n$. Então AB é a matriz $m \times n$ tal que
$$(AB)_{ij} = (A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + \cdots + (A)_{il}(B)_{lj}$$
$$= \sum_{k=1}^{l} (A)_{ik}(B)_{kj}.$$

Exemplo. Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$
Então A e B possuem tamanho 2×3 e 3×4. Assim, o produto AB está definido, e resultará numa matriz 2×4.
Temos que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 13 & 6 \\ 3 & 7 & 25 & 5 \end{pmatrix}$$

As matrizes B e A possuem tamanho 3×4 e 2×3. Assim, o produto BA não está definido.

Exemplo. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então A e B possuem tamanho 2×3 e 3×2. Assim o produto AB está definido, e é uma matriz 2×2, dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 4 + (-1)(-1) + 2\cdot 2 & 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 4 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 & 3\cdot(-1) + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

O tamanho das matrizes B e A são 3×2 e 2×3. Daí BA está definido, é uma matriz 3×3 dada por:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Sejam A uma matriz $m\times n$ e B uma matriz coluna de tamanho $n\times 1$. Então o produto AB está definido e vai ser uma matriz coluna de tamanho $m\times 1$. Denotando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

então o produto AB pode ser vista como soma de matrizes colunas:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}b_2 \\ \vdots \\ a_{m2}b_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{mn}b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podemos representar o sistema linear acima via uma equação envolvendo matrizes. Defina

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Então A e X possuem tamanho $m \times n$ e $n \times 1$. Seu produto tem tamanho $m \times 1$, e é dado por

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B.$$

Portanto, obtemos a equação $AX = B$.

Exemplo. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad\;\; y + 5z = -1 \end{cases}.$$

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ 0 \cdot x + y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = B.$$

Portanto, temos que $AX = B$.

Transposta da matriz. Dada uma matriz A de tamanho $m \times n$, a sua transposta, denotada por A^T (ou A^t), é a matriz de tamanho $n \times m$ dada por

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}, \quad \text{para toda entrada } (i,j).$$

Equivalentemente, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{então} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplos.

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Traço de uma matriz. O traço de uma matriz está definida somente para matrizes quadradas. Se A é uma matriz quadrada de ordem n, define-se o seu traço, denotado por $\operatorname{tr} A$, como a soma dos elementos em sua diagonal principal. Em outras palavras,

$$\operatorname{tr} A = (A)_{11} + (A)_{22} + \cdots + (A)_{nn} = \sum_{\ell=1}^{n} (A)_{\ell\ell}.$$

Exemplos.

(a) $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, então $\operatorname{tr} A$ não está definido, pois A não é uma matriz quadrada.

(c) $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 1 + (-1) = 0.$

(d) $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15.$