▶ Nos Exercícios **29–30**, resolva o sistema dado, em que a, b e c são constantes. ◀

29. $2x + y = a$
$3x + 6y = b$

30. $x_1 + x_2 + x_3 = a$
$2x_1 + 2x_3 = b$
$3x_2 + 3x_3 = c$

29. $\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases}$

A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 6 & b \end{pmatrix} \overset{L_1' = \frac{1}{2}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 3 & 6 & b \end{pmatrix} \overset{L_2' = L_2 - 3L_1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & 9/2 & b - 3a/2 \end{pmatrix} \overset{L_2' = \frac{2}{9}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & 1 & \frac{2b}{9} - a/3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1' = L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a/2 - b/9 + a/6 \\ 0 & 1 & \frac{2b}{9} - a/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a/3 - b/9 \\ 0 & 1 & \frac{2b}{9} - a/3 \end{pmatrix}$$

Então, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x = 2a/3 - b/9 \\ y = \frac{2b}{9} - a/3 \end{cases}$$

Assim, $\left(2a/3 - b/9,\ \frac{2b}{9} - a/3\right)$ é a única solução do sistema.

Verificação:

$$2x + y = 2\left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{9}\right) + \left(\frac{2b}{9} - a/3\right) = \frac{4a}{3} - \cancel{\frac{2b}{9}} + \cancel{\frac{2b}{9}} - \frac{a}{3} = \frac{3a}{3} = a$$

$$3x + 6y = 3\left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{9}\right) + 6\left(\frac{2b}{9} - \frac{a}{3}\right) = \cancel{2a} - \frac{b}{3} + \frac{4b}{3} - \cancel{\frac{6a}{3}} = \frac{3b}{3} = b.$$

1.3: (h) Dada qualquer matriz quadrada A, vale $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$.

Verdadeiro.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então $\mathrm{tr}\,A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. A sua transposta é

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Daí $\mathrm{tr}\,A^T = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{tr}\,A$.

1.3: (l) Se A, B e C forem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$, então $A = B$.

Falso.

Contra-exemplos:

(1) Tome $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Então

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, então $AC = BC$,

mas $A \neq B$.

(2) Tome $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Então $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$, mas $A \neq B$.

(3) Tome $C = (0)$, $A = (1)$, $B = (2)$. Então
$AC = (0) = BC$, mas $A \neq B$.

1.3:

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$
(d) $-7C$ (e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$
(g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$ (i) $\text{tr}(D)$
(j) $\text{tr}(D - 3E)$ (k) $4\,\text{tr}(7B)$ (l) $\text{tr}(A)$

3.(j) $\text{tr}(D - 3E)$

Método 1:

Temos que: $-3E = \begin{pmatrix} -18 & -3 & -9 \\ 3 & -3 & -6 \\ -12 & -3 & -9 \end{pmatrix}$

$$D - 3E = \begin{pmatrix} -17 & 2 & -7 \\ 2 & -3 & -4 \\ -9 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(D-3E) = -17 - 3 - 5 = -25.$$

Método 2: $\text{tr}(D-3E) = \text{tr}\,D - 3\,\text{tr}\,E$
$= (1+0+4) - 3(6+1+3) = 5 - 3 \cdot 10 = -25$

1.4: (b) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Falso.

Tome $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Então:

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

1.4: (e) Se A e B forem matrizes tais que o produto AB está definido, então vale $(AB)^T = A^T B^T$.

Falso

Contra-exemplos:

(1) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e \quad (AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, $(AB)^T \neq A^T B^T$.

(2) $A = (1)$, $B = (1 \ \ 2)$.

Então $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A^T = (1)$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

O produto $\underset{1\times 1}{A^T}\ \underset{2\times 1}{B^T}$ nem está definido. Portanto, não tem como a fórmula ser válida.

1.5: 20. Calcule a inversa (se existir) de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3' = L_3 - L_1 \\ L_4' = L_4 - L_1}}{\overset{L_2' = L_2 - L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4' = L_4 - L_2}{\overset{L_3' = L_3 - L_2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4' = L_4 - L_3}{\overset{L_2' = \frac{1}{3} L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4' = \frac{1}{7} L_4}{\overset{L_3' = \frac{1}{5} L_3}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/7 & 1/7 \end{array}\right). \quad \text{Daí } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Verificação (o produto seguinte deve ser I_4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5: 18. Calcule a inversa (se existir) de:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2' = L_2 + 4L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13\sqrt{2} & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} L_1$

$L_2' = \frac{1}{13\sqrt{2}} L_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4/13\sqrt{2} & 1/13\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1' = L_1 - 3L_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/13\sqrt{2} & -3/13\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4/13\sqrt{2} & 1/13\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Daí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/13\sqrt{2} & -3/13\sqrt{2} & 0 \\ 4/13\sqrt{2} & 1/13\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificando:

$$\begin{pmatrix} 1/13\sqrt{2} & -3/13\sqrt{2} & 0 \\ 4/13\sqrt{2} & 1/13\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2, 26: Determine os valores de a para os quais o sistema possui 1 solução, infinitas soluções e nenhuma solução:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y - (a^2-3)z = a \end{cases}$$

A matriz aumentada é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -a^2+3 & a \end{pmatrix} \underset{L_3' = L_3 - L_1}{\overset{L_2' = L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -a^2+2 & a-2 \end{pmatrix}$$

O sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \quad -6y + z = -3 \\ \quad (a^2+2)z = a-2 \end{cases}$$

Temos que $-a^2+2 = 0 \iff a \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
Ainda, $a-2 = 0 \iff a = 2$.

Assim, se $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$, então $a-2 \neq 0$, portanto obtemos um sistema impossível (ou, com zero soluções).
Se $a \neq \sqrt{2}$ e $a \neq -\sqrt{2}$, então o sistema admite única solução.

1.2: 28: Determine os valores de a para os quais o sistema possui 1 soluçã, infinitas soluções e nenhuma soluçã:

$$\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (a^2+1)z = 3a \end{cases}$$

A matriz aumentada é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -7 \\ 2 & 3 & 17 & -16 \\ 1 & 2 & (a^2+1) & 3a \end{pmatrix} \underset{L_3' = L_3 - L_1}{\overset{L_2' = L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-6 & 3a+7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3' = L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & 3a+9 \end{pmatrix}$$

O sistema fica equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ y + 3z = -2 \\ (a^2-9)z = 3a+9 \end{cases}$$

Temos que $a^2-9=0 \iff a \in \{3, -3\}$, e $3a+9=0 \iff a=-3$.

Portanto:

- Se $a \neq 3$ e $a \neq -3$, o sistema possui única soluçã.
- Se $a=-3$, então $3a+9=0$ e $a^2-9=0$. O sistema fica:

$$\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ y + 3z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Assim o sistema admite infinitas soluções.

· Se $a=3$, então $a^2-9=0$ e $3a+9 \neq 0$. Daí,

$$\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ \quad\; y + 3z = -2 \\ \qquad\quad\;\; 0 = 18 \end{cases}$$

portanto, não existe solução.

1.7: (a) A transposta de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

Verdadeira.

Seja $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ diagonal. Então

$$D^T = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = D.$$

Portanto, D^T é diagonal.

1.7: (j) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é simétrica, então A e B são simétricas.

Falsa. Contra-exemplo:

Tome $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então

A e B não são simétricas. Porém

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

é simétrica.

1.7: 26. Encontre os valores de x que tornam a matriz invertível:

$$M = \begin{pmatrix} x-1/2 & 0 & 0 \\ x & x-1/3 & 0 \\ x^2 & x^3 & x+1/4 \end{pmatrix}$$

A matriz M é triangular inferior. Portanto, M é invertível se e só se as entradas de sua diagonal principal são não-nulas. Assim

$$M \text{ é invertível} \iff x-1/2 \neq 0,\ x-1/3 \neq 0 \text{ e } x+1/4 \neq 0$$

$$\iff x \neq 1/2,\ x \neq 1/3 \text{ e } x \neq -1/4.$$