Polinômio minimal

Sejam A uma matriz quadrada e

$$p(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

então, define-se

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 \cdot I.$$

Exemplo. Sejam $p(X) = X^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$p(A) = A^2 + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$p(B) = B^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Seja $p(X) = X^3 + 2X - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Então

$$p(A) = A^3 + 2A - 3 \cdot I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^3 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 \\ 14 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

pol. mônico : coef. líder é 1.

Definição. Seja A uma matriz quadrada. O polinômio mônico p de menor grau tal que $p(A)=0$ é denominado o polinômio minimal de A.
Denota-se tal polinômio por $m_A(X)$.

Exemplos. Alguns exemplos de polinômio minimal, sem se preocupar em como calculamos:

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, então

$$p_A(X)=\det\begin{pmatrix}1-X&0\\0&2-X\end{pmatrix}=(1-X)(2-X)=(X-1)(X-2).$$

$$m_A(X)=(X-1)(X-2).$$

2. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, então

$$p_A(X)=(1-X)(1-X)=(X-1)^2$$

$$m_A(X)=X-1.$$

$$m_A(A)=A-I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

3. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, então

$$p_A(X)=\det\begin{pmatrix}1-X&1\\0&1-X\end{pmatrix}=(1-X)^2=(X-1)^2$$

$$m_A(X)=(X-1)^2,\quad m_A(A)=(A-I)^2=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A-I=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq 0$$

4. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\quad p_A(X)=(2-X)^2(3-X)=-(X-2)^2(X-3)$

$$m_A(X)=(X-2)(X-3).$$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $p_A(X) = -(X-2)^2(X-3)$

$$m_A(X) = (X-2)^2(X-3).$$

Teorema. Seja A uma matriz quadrada. Então A é diagonalizável se e só se seu polinômio minimal é da forma

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_q),$$

em que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ são distintos.

Consequência: obtemos então um critério para saber se uma matriz é diagonalizável, sabendo seu polinômio minimal.

Teorema. (Cayley-Hamilton). Seja A uma matriz quadrada e $p_A(X)$ seu polinômio característico. Então $p_A(A) = 0$.

Conclusão: o polinômio minimal sempre divide o polinômio característico.

Teorema. Os autovalores de uma matriz sempre são raízes do seu polinômio minimal.

Compilando os três teoremas, obtemos o seguinte:

Teorema. Sejam A uma matriz quadrada, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ seus autovalores distintos, e $a_1, a_2, \ldots, a_q$ suas multiplicidades algébricas. Então:

(i) O polinômio minimal é da forma

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)^{s_1}(X-\lambda_2)^{s_2}\cdots(X-\lambda_q)^{s_q},$$

em que $s_i \in \{1, 2, \ldots, a_i\}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$.

(ii) A é diagonalizável se e só se

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_q).$$

Exemplo. Seja A uma matriz com polinômio característico

$$p_A(X) = -(X-2)^2(X-3).$$

O polinômio minimal é

$$m_A(X) = (X-2)^{s_1}(X-3)^{s_2},$$

em que s_1 e s_2 são inteiros, com $s_1 \in \{1,2\}$ e $s_2 \in \{1\}$.

Ou seja, o polinômio minimal é

$$(X-2)(X-3) \text{ ou } (X-2)^2(X-3).$$

Exemplo. Seja A uma matriz com polinômio característico

$$p_A(X) = -(X-2)^3.$$

Então seu polinômio minimal é

$$m_A(X) = (X-2)^s,$$

em que s é algum inteiro entre 1 e 3. Ou seja, pode ser $X-2$, $(X-2)^2$ ou $(X-2)^3$.

Exemplo. Sejam

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que o polinômio característico das três matrizes é $-(X-2)^3$.

Substituindo:

(1) $$A_1 - 2\cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, o polinômio minimal de A_1 é $X-2$.

(2) Note que

$$A_2 - 2\cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Mas,

$$(A_2 - 2\cdot I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí $m_{A_2}(X) = (X-2)^2$.

(3) Note que

$$(A_3-2I)^2 = \left(\begin{pmatrix} 2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \neq 0.$$

Daí $m_{A_3}(X) = (X-2)^3$.

(isso porque, como $(A_3-2\cdot I)^2 \neq 0$, então $(A_3-2\cdot I) \neq 0$. Além disso, do Teorema de Cayley-Hamilton, sabe-se que $(A_3-2\cdot I)^3 = 0$).

Exemplo. Determine o polinômio minimal de

$$A = \begin{pmatrix} 2&1&3\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

O pol. característico é

$$p_A(X) = \det\begin{pmatrix} 2-X&1&3\\0&2-X&0\\0&0&-1-X\end{pmatrix} = (2-X)^2(-1-X) = -(X-2)^2(X+1)$$

Daí o polinômio minimal é $(X-2)(X+1)$ ou $(X-2)^2(X+1)$.

Testando o primeiro:

$$(A-2\cdot I)(A+I) = \left(\begin{pmatrix} 2&1&3\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 2&1&3\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&3\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Portanto, o polinômio minimal $(X-2)^2(X+1)$.

Exemplo. Determine se o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$T(x,y,z) = (x+4y,\ 3x+2y,\ 5z)$$

é diagonalizável.

A matriz de T (em relação à base canônica) é:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Seu pol. característico é

$$p_T(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 4 & 0 \\ 3 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & 5-X \end{pmatrix} = \big((1-X)(2-X)-12\big)(5-X)$$

$(X-5)(X+2)(-(X-5))$

$$= (X^2-3X-10)(5-X) = (X-5)(X+2)(5-X)$$
$$= -(X-5)(X+2)(X-5) = -(X+2)(X-5)^2.$$

Então, o polinômio minimal é $(X+2)(X-5)$ ou $(X+2)(X-5)^2$.
Testando o primeiro:

$$([T]+2I)([T]-5I) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $m_T(X) = (X+2)(X-5)$, e portanto, T é diagonalizável.