Tipos especiais de operadores

Se A é uma matriz, então A^T denota a sua transposta.

Definição. Seja A uma matriz $n \times n$. Dizemos que A é:

(a) Simétrica se $A^T = A$

(b) ortogonal se $AA^T = A^TA = I$.

Obs.: 1. a definição de matriz simétrica significa que A é simétrica em relação a diagonal principal. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{2} \\ 5 & 2 & \pi \\ \sqrt{2} & \pi & -7 \end{pmatrix} \text{ é simétrica}$$

2. Se A é ortogonal, então A é invertível e $A^{-1} = A^T$.

Exemplo. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

é ortogonal. De fato:

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema. Se A é ortogonal, então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

Demonstração. $AA^T = I$. Então

$\det A^T = \det A$

$$1 = \det I = \det(AA^T) = \det A \det A^T = (\det A)^2.$$

Então $(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A \in \{1, -1\}$. $\square$

Teorema. Uma matriz é ortogonal se e só se o conjunto de suas colunas (ou linhas) forma um conjunto ortonormal, com respeito ao produto interno usual.

Exemplo. Seja
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
O conj. dos vetores coluna é
$$\{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}.$$
Tal conjunto é ortonormal, pois:
$$\langle(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\rangle = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$
$$\langle(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\rangle = \cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$
$$\langle(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\rangle = (-\operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta = 1.$$

Matrizes ortonormais aparecem no seguinte contexto:

Teorema. Seja V um esp. vet. com produto interno, β e β' bases ortonormais de V. Então a matriz mudança de base $[I]^{\beta}_{\beta'}$ é uma matriz ortogonal.

Exemplo. Sejam $\gamma = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, e $\beta = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), (0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.
Então
$$[I]^{\beta}_{\gamma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
que é ortogonal, pois suas colunas constituem um conjunto ortonormal (verifique).

$$[(1,0,0)]_\beta = \begin{pmatrix} \langle (1,0,0), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \rangle \\ \langle (1,0,0), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \rangle \\ \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[(0,1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} \langle (0,1,0), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \rangle \\ \langle (0,1,0), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \rangle \\ \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[(0,0,1)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daí, $[I]^\gamma_\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que é ortogonal (verifique).

Definição. Sejam V um esp. vet. com produto interno, β uma **base ortonormal** de V, e $T: V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é:

(a) auto-adjunto se $[T]^\beta_\beta$ é simétrica,

(b) ortogonal se $[T]^\beta_\beta$ é ortogonal.

Obs.: a definição não depende da base β escolhida.

Exemplo. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (7x+3y, 3x-2y)$. Então, em relação à base canônica,

$$[T] = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

que é simétrica. Portanto, T é auto-adjunto.

Operadores ortogonais podem ser vistos como os operadores que preservam o produto interno, ou que preservam distâncias:

Teorema. Sejam V um esp. vet. com produto interno e $T: V \to V$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T é ortogonal,

(ii) T leva base ortonormal em base ortonormal,

(iii) $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in V$,

(iv) $\|v\| = \|T(v)\|, \quad v \in V$.

Teorema. Um operador $T: V \to V$ é auto-adjunto se e só se

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle, \quad \forall v, w \in V.$$

Demonstração. Note que

$$\langle T(v), w \rangle = [T(v)]^T [w] = ([T][v])^T [w] =$$

$$= [v]^T [T]^T [w] = [v]^T [T] [w] = [v]^T [T(w)] = \langle v, T(w) \rangle.$$

A recíproca fica de exercício. $\square$

Teorema. Sejam $T: V \to V$ um operador auto-adjunto, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalores de T e v_1 e v_2 autovetores associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Então $v_1 \perp v_2$.

Demonstração. $\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), v_2 \rangle =$

$$= \langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Portanto
$$(\lambda_1-\lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0.$$
Como $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \langle v_1, v_2\rangle = 0.$ $\square$

Teorema. Seja $T: V \to V$ um operador auto-adjunto. Então existe uma base ortonormal de V constituída de autovetores de T.

Corolário. Seja A uma matriz $n\times n$ simétrica. Então existe uma matriz ortogonal M tal que MAM^T é diagonal.

Exemplo. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x,y,z) = (-2x, 6y+z, y+6z).$$
Note que
$$[T] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
é simétrica, ou seja, T é auto-adjunto.

Vamos encontrar uma base ortonormal constituída de autovetores de T:
$$p_T(x) = \det\begin{pmatrix} -2-x & & \\ & 6-x & 1 \\ & 1 & 6-x \end{pmatrix} = (-2-x)((6-x)^2-1) =$$
$$= -(x+2)(x^2-12x+35)$$
$$= -(x+2)(x-5)(x-7)$$

Calculando autovetores:

$\lambda=-2$: $(-2x,-2y,-2z) = T(x,y,z) = (-2x, 6y+z, y+6z)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -2x \\ -2y = 6y+z \\ -2z = y+6z \end{cases} \sim \begin{cases} 8y+z=0 \\ y+8z=0 \end{cases} \sim y=z=0$$

Daí $V_{-2} = [(1,0,0)]$.

$\lambda = 5$:

$$(5x, 5y, 5z) = (-2x, 6y+z, y+6z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -2x \\ 5y = 6y + z \\ 5z = y + 6z \end{cases} \sim \begin{cases} 7x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$

$\therefore V_5 = [(0,1,-1)]$.

$\lambda = 7$:

$$(7x, 7y, 7z) = (-2x, 6y+z, y+6z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -2x \\ 7y = 6y + z \\ 7z = y + 6z \end{cases} \sim \begin{cases} 9x = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$\therefore V_7 = [(0,1,1)]$.

Note que

$$\langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle = 0$$
$$\langle (1,0,0), (0,1,-1) \rangle = 0$$
$$\langle (0,1,-1), (0,1,1) \rangle = 1 \cdot 1 + 1(-1) = 0.$$

Então

$$\{ (1,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, com respeito ao produto interno canônico, constituído de autovetores de T.