Anéis Semissimples (parte II)

Exemplo. $M_n(\mathbb{F})$ (é simples).

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = M_n(\mathbb{F})e_{11} \cong \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = M_n(\mathbb{F})e_{22},$$

Considere
$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{F})e_{11} &\longrightarrow M_n(\mathbb{F})e_{22} \\ re_{11} &\longmapsto re_{11}\cdot e_{12} \end{aligned}.$$

Temos que
$$M_n(\mathbb{F})e_{22} \supseteq M_n(\mathbb{F})e_{11}\cdot e_{12} = M_n(\mathbb{F})\, e_{12}\cdot e_{22} \supseteq$$
$$\supseteq \left(M_n(\mathbb{F})\cdot e_{21}\right) e_{12} = M_n(\mathbb{F})e_{22}.$$

$$M_n(\mathbb{F}) = \sum \{L \subseteq M_n(\mathbb{F}) \text{ ideal à esquerda}, L \cong M_n(\mathbb{F})e_{11}\}$$
$$= \left(M_n(\mathbb{F})\, e_{11}\right)\cdot M_n(\mathbb{F}).$$

Exemplo. $R = M_n(\mathbb{F}) \oplus M_n(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} M_n(\mathbb{F}) & \\ & M_n(\mathbb{F}) \end{pmatrix}.$

Considere:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

São ideais minimais à esquerda de R.

Temos que $L_1 \not\cong L_2$, e vale:

$$\sum \{L \subseteq R \mid L \cong L_1\} = L_1 R = \begin{pmatrix} M_n(\mathbb{F}) & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum \{L \subseteq R \mid L \cong L_2\} = L_2 R = \begin{pmatrix} 0 & \\ & M_n(\mathbb{F}) \end{pmatrix}$$

Proposição. Seja R um anel artiniano ~~com 1~~. Então R é semiprimo $\Leftrightarrow$ R é semissimples.

Demonstração. ($\Rightarrow$) R é artiniano, então existe ideal à esquerda minimal $L_1 \subseteq R$. Daí, existe idempotente $e_1 \in R$ tal que $L_1 = Re_1$. Note que

$$R = Re_1 \oplus \underbrace{R(1-e_1)},$$

de fato:

$R(1-e_1) := \{x - xe_1 \mid x \in R\}$

(i) Dado $x \in R$, temos

$$x = \qquad = xe_1 + (x - xe_1) \in Re_1 + R(1-e_1).$$

(ii) Seja $x \in Re_1 \cap R(1-e_1)$, então $x = x_1 e_1 = x_2 - x_2 e_1$

Temos que

$$x = x_1 e_1 = x_1 e_1^2 = x_1 e_1 \cdot e_1 = (x_2 - x_2 e_1) \cdot e_1$$
$$= x_2 (e_1 - e_1^2) = 0.$$

Daí $Re_1 \cap R(1-e_1) = 0.$

Existe $L_2 \subseteq R$ minimal com $L_2 \subseteq R(1-e_1)$, e portanto $L_2 = Re_2$, com $e_2^2 = e_2$. Daí

$$R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus R(1 - e_1 - e_2).$$

Continuando o processo, obtemos que

$$R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \ldots$$

mas o processo termina num número finito de passos.

Daí R é semissimples.

($\Leftarrow$) Seja $I \subseteq R$ ideal tal que $I^2 = 0$. Seja $J \subseteq R$ ideal à esquerda tal que $R = I \oplus J$ (existe, pois R semissimples $\Rightarrow$ R completamente redutível).

Então $1 = x + y$, com $x \in I$ e $y \in J$. Daí

$$x = x - \underbrace{x^2}_{\in I^2 = 0} = xy \in I \cap J = 0.$$

Daí $x = 0$, e portanto $1 = y \in J$. Daí $J = R$.
Isso significa que $I = 0$, e daí, R é semiprimo. $\square$

Proposição. Seja R um anel semissimples e M um R-módulo irredutível. Então M é isomorfo a algum ideal minimal à esquerda de R, visto como R-módulos.

Demonstração. Escreva

$$M = \sum_{m \in M} \sum_{\substack{L_i \subset R \text{ minimal} \\ \text{à esquerda}}} L_i m$$

Daí, existe algum $L_i \cdot m \neq 0$. Mas $L_i \cdot m \subseteq M$ é submódulo, e portanto, $M = L_i \cdot m$. Temos que

$$\begin{aligned} L_i &\longrightarrow L_i \cdot m \\ x &\longmapsto x \cdot m \end{aligned}$$

é isomorfismo de R-módulos (pois L_i é minimal). Daí $M \cong L_i$. $\square$

Proposição. Um anel R é semissimples $\iff$ todo R-módulo é semissimples.

Demonstração. $(\Leftarrow)$ por definição.

$(\Rightarrow)$ Seja M um R-módulo. Então

$$M = \sum_{m \in M} \sum_{\substack{L_i \subseteq R \\ \text{ideal minimal à esquerda}}} L_i \cdot m. \qquad \square$$

Observação. Se R é semissimples com 1, então

$$R = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m \ (\text{é finita!}), \ L_i \subseteq R \text{ minimal à esquerda.}$$

De fato, escreva $R = \bigoplus L_i$. Então, existem $e_1 \in L_1, \ldots, e_m \in L_m$ de modo que

$$1 = e_1 + \cdots + e_m.$$

Daí, $L_1 \oplus \cdots \oplus L_m = R$. Dado e_j, temos

$$L_j \ni e_j = \underbrace{e_j e_1}_{\in L_1} + \cdots + \underbrace{e_j^2}_{\in L_j} + \cdots + \underbrace{e_j e_m}_{\in L_m},$$

daí $e_j e_i = 0$ se $i \neq j$ e $e_j^2 = e_j$. Os elementos $\{e_i\}_{i=1}^m$ são denominados idempotentes ortogonais.

Lema. Sejam R anel e $e, f \in R$ com $e^2 = e$. Então, visto como grupo abeliano, temos

$$\left(\operatorname{Hom}_R(Re, Rf), +\right) \cong (eRf, +).$$

Se $f = e$, então $\operatorname{End}_R(Re) \cong eRe$ como anéis.

Demonstração. Dado $erf \in eRf$, defina

$$\phi_{erf} : Re \to Rf, \quad \phi_{erf}(x) = xerf.$$

Temos que $erf = 0 \iff \phi_{erf} = 0$. Temos então um mapa bem definido

$$(eRf, +) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(Re, Rf),$$

que é injetivo, e um homomorfismo de grupos. Seja $\phi \in \operatorname{Hom}_R(Re, Rf)$, e seja $\phi(e) = rf$, mas,

$$rf = \phi(e) = \phi(e^2) = e\phi(e) = erf \in eRf.$$

Dado $xe \in Re$, temos que

$$\phi(xe) = \phi(xee) = x\phi(e) = xerf = \phi_{erf}(x).$$

Daí $\phi = \phi_{erf}$, e vale o isomorfismo. $\square$

Proposição. Sejam R semiprimo e $e \in R$ idempotente. Então Re é ideal minimal à esquerda $\Leftrightarrow$ eRe é anel de divisão.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $0 \neq a \in Re$. Então $(Ra) \neq 0$ e $(Ra)^2 \neq 0$. Então existem $r_1, r_2 \in R$ tais que $r_1 a r_2 a \neq 0$. Além disso, $a = ae$. Daí $r_1 a e r_2 a e \neq 0$, e portanto, $e r_2 a e \neq 0$. Como eRe é anel de divisão, existe $ebe \in eRe$ tal que

$$ebe \, e r_2 a e = e.$$

Então,

$$Re \supseteq Ra \supseteq (Rebeer_2) \cdot ae = Re,$$

ou seja, $Ra = Re$. Daí, Re é minimal.

($\Rightarrow$) Do lema anterior, $\mathrm{End}_R(Re, Re) \cong eRe$, e Re é um R-módulo irredutível. Daí, o Lema de Schur garante que $\mathrm{End}_R(Re, Re)$ é um anel de divisão. $\square$

Lema. Sejam $Re, Re' \subseteq R$ ideais minimais à esquerda, com e, e' idempotentes. Então,

$$Re \cong Re' \Leftrightarrow \exists a' \in Re' \text{ tal que } Re' = (Re) \cdot a'.$$

Demonstração ($\Leftarrow$) Defina $\psi: Re \to Re'$, $\psi(xe) = xea'$.
Então ψ é sobrejetivo, e sendo Re minimal à esquerda, segue que ψ é isomorfismo.
($\Rightarrow$) Se $\psi: Re \to Re'$ é isomorfismo, seja $a' = \psi(e)$. Então, $\forall xe \in Re$, temos

$$Re' \ni \psi(xe) = xe\psi(e) = xea'. \qquad \square$$

Corolario. Nas mesmas hipóteses,

$$Re \cong Re' \Leftrightarrow Re' = (Re)(Re'). \qquad \square$$

Teorema. Seja R anel semissimples com 1. Para cada ideal minimal à esquerda $L \subseteq R$, defina

$$B_L = \sum \{ L' \subseteq R \text{ ideal à esquerda}, L' \cong L \}.$$

Então cada B_L é um ideal bilateral de R, que é também um anel simples e semissimples com 1. Além disso,

$$R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m,$$

em que $B_i = B_{L_i}$, e $L_i \ncong L_j$, se $i \neq j$.

Demonstração. Escreva $R = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, e assuma que $L_1, \ldots, L_m$ são não isomorfos, e cada L_i é isomorfo a algum dos $L_1, \ldots, L_m$.

Defina $B_i = B_{L_i}$, então claro que

$$R = B_1 + \cdots + B_m.$$

Agora, do corolário anterior,

$$B_i B_j = 0 \text{ se } i \neq j, \text{ e } B_i^2 \subseteq B_i.$$

Segue que

$$B_i R = B_i (B_1 + \cdots + B_m) \subseteq B_i.$$

Daí, cada B_i é ideal bilateral de R. Provemos que a soma é direta: seja

$$C = B_1 \cap (B_2 + \cdots + B_m).$$

Então

$$CR = C(B_1 + \cdots + B_m) = CB_1 + C(B_2 + \cdots + B_m)$$
$$\subseteq (B_2 + \cdots + B_m) \cdot B_1 + B_1 (B_2 + \cdots + B_m) = 0.$$

Daí, $C = 0$. Ou seja, $B_1 \cap (B_2 + \cdots + B_m) = 0$. Da mesma forma, $B_i \cap (B_1 + \cdots + \hat{B_i} + \cdots + B_n) = 0$.

Então, temos $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$.

Seja $0 \neq I \subseteq B_i$ ideal. Queremos provar que existe $L \cong L_i$, com $L \subseteq I$. Daí, segue que

$$I \cdot B_i \supseteq L \cdot B_i \supseteq B_i, \text{ ou seja, } I = B_i.$$

Temos que, p/ cada ideal minimal $L \subseteq R$, vale que $L \cap I = 0$ ou $L \cap I = L$, ou seja, $L \subseteq I$. Daí existe um tal $L \subseteq I$.

Por fim, escreva $1 = e_1 + \cdots + e_m$, com $e_i \in B_i$. Daí, cada e_i é a unidade de B_i. $\square$