1. Seja $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ ou corpo de caracteristica p. Descreva $\mathbb{F}[C_p \times C_p]$.

(a) Se char $\mathbb{F} = p > 0$. Então, vimos que

$$J := \text{Span}\{e_g - e_1 \mid g \in C_p \times C_p\}$$

é ideal nilpotente, $\mathbb{F}[C_p \times C_p]/J \cong \mathbb{F}$.

(b) Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então

$$\mathbb{F}[C_p \times C_p] \cong \underbrace{\mathbb{F} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}}_{p^2 \text{ vezes}}$$

(c) Seja $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. (denote $C_p = \langle \alpha \mid \alpha^p = 1 \rangle$).

Note que vale

$$\mathbb{F}C_p \cong \mathbb{F}[X]/(X^p - 1).$$

De fato, defina $\Psi : \mathbb{F}[X] \longrightarrow \mathbb{F}C_p$, via $\Psi(X) = e_\alpha$. Tal Ψ é sobre, pois

$$\mathbb{F}C_p \ni \sum_{i=0}^{p-1} a_i e_{\alpha^i} = \Psi\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i\right).$$

Além disso, $\Psi(X^p - 1) = (e_\alpha)^p - e_1 = e_{\alpha^p} - e_1 = 0$.

Daí $(X^p - 1) \subseteq \ker \Psi$.

Daí

$$\mathbb{F}[X]/(X^p-1) \longrightarrow \mathbb{F}[X]/\operatorname{Ker}\psi \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}C_p.$$

Mas $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[X]/(X^p-1) = p = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}C_p$.

Portanto,

$$\mathbb{F}C_p \cong \mathbb{F}[X]/(X^p-1) \cong \mathbb{F}[X]/(X-1) \oplus \mathbb{F}[X]/(\Phi_p),$$

em que $\Phi_p = X^{p-1} + \cdots + X + 1$. Mais ainda,

$$\mathbb{F}[X]/(X-1) \cong \mathbb{F}, \quad \mathbb{F}[X]/(\Phi_p) \cong \mathbb{F}[\xi],$$

em que $\xi \neq \xi^p = 1$.

Agora, temos que

$$\mathbb{F}[C_p \times C_p] \cong \mathbb{F}C_p \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}C_p \cong \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}C_p \oplus \mathbb{F}[\xi] \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}C_p$$

$$\cong \mathbb{F}C_p \oplus \mathbb{F}(\xi)C_p$$

$$\cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}(\xi) \oplus \underbrace{\mathbb{F}(\xi) \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}(\xi)}_{p \text{ vezes}}.$$

2. Seja G abel. finito, $H \subseteq G$ subgrupo, χ_H caracter irr. de H. Escreva $\mathrm{Ind}\,\chi_H = \chi_1 + \dots + \chi_s$, com $\chi_1, \dots, \chi_s$ caracter irr. de G.

(a) $s = [G:H]$

(b) $\{\chi_1, \dots, \chi_s\} = \{\chi \text{ caracter de } G \mid \chi|_H = \chi_H\}$.

(χ_H é o caracter de $\chi_H : H \to \mathbb{C}^\times$)

Então

$$gr(\mathrm{Ind}_H^G \chi_H) = [G:H]\, gr(\chi_H) = [G:H].$$

Como cada rep. irr. de G possui grau 1, então $\mathrm{Ind}_H^G \chi_H$ se decompõe como soma de $[G:H]$ representações irredutíveis. Portanto,

$$s = [G:H].$$

(b) Seja χ um caracter irredutível de G. Então $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ é hom. de grps. Daí $\chi|_H : H \to \mathbb{C}^\times$ tb. é hom. de grps. Daí $\chi|_H$ é caracter irr. de H.

Por Reciprocidade de Frobenius, temos

$$(\mathrm{Ind}\,\chi_H, \chi)_G = (\chi_H, \chi|_H)_H = \begin{cases} 1, & \text{se } \chi|_H = \chi_H, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto:

(i) cada caracter irr. de G aparece com mult. no máximo 1 em $\mathrm{Ind}_H^G \chi$,

(ii) χ aparece em $\mathrm{Ind}\,\chi \iff \chi|_H = \chi_H$.