QUESTÃO 1. *Considere o conjunto dos pontos $P \in \mathbb{R}^3$ tais que a distância de P a $A = (0,0,0)$ seja o dobro da distância de P a $B = (3,0,0)$. Mostre que esse conjunto é uma esfera e determine seu centro C e raio r.*

RESPOSTA: $C = (4,0,0)$ $r = 2$

Resolução: Seja $P = (x, y, z)$. Tem-se:

$$d(P,A) = 2d(P,B) \Leftrightarrow \|P - A\|^2 = 4\|P - B\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|(x, y, z)\|^2 = 4\|(x-3, y, z)\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4[(x-3)^2 + y^2 + z^2] \Leftrightarrow$$

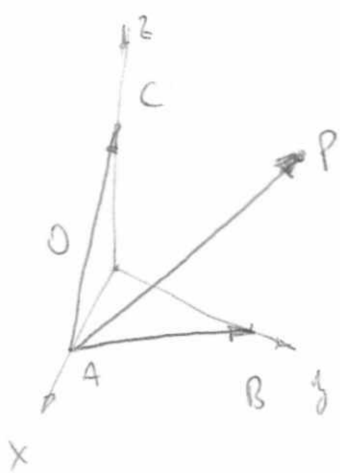
$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 2^2,$$

o que é a equação de uma esfera com centro $C = (4, 0, 0)$ e raio $r = 2$.

QUESTÃO **2.** *Determine a distância d do ponto $P = (2, 1, 4)$ ao plano definido pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 3)$.*

RESPOSTA: $d = 17/7$

Resolução: o volume do paralelepípedo com arestas paralelas a $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AP}$ é dado por



$$V = d \cdot \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = |\langle \vec{AB} \wedge \vec{AC}, \vec{AP} \rangle|$$

donde
$$d = \frac{|\langle \vec{AB} \wedge \vec{AC}, \vec{AP} \rangle|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

Tem-se:
$$\vec{AB} = B - A = (-1, 2, 0)$$
$$\vec{AC} = C - A = (-1, 0, 3)$$
$$\vec{AP} = P - A = (1, 1, 4)$$

$$\therefore \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} = (6, 3, 2),$$

donde $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$

e
$$\langle \vec{AB} \wedge \vec{AC}, \vec{AP} \rangle = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 8 = 17$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{17}{7}}$$

QUESTÃO **3.** *Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A = (2, 2, 1)$ e $B = (-1, 1, -1)$ e é ortogonal ao plano $2x - 3y + z = 3$.*

RESPOSTA:
Equação do plano: $-7x - y + 11z + 5 = 0$

Resolução: o vetor $\vec{n} = (2, -3, 1)$ é normal ao plano $2x - 3y + z = 3$. Um vetor normal ao plano pedido deve ser ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ e a $\vec{n}$, logo deve ser paralelo a $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}$. Assim, o plano pedido é o que passa por A e é normal ao vetor

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -7\hat{i} - \hat{j} + 11\hat{k}$$

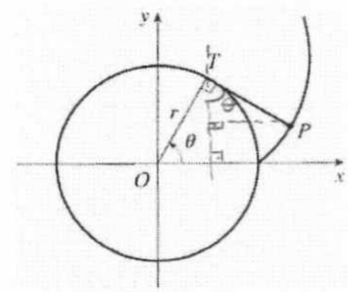
i.e. o plano de equação

$$\langle (x-2, y-2, z-1), (-7, -1, 11) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7(x-2) - (y-2) + 11(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7x - y + 11z + 5 = 0$$

QUESTÃO 4. *Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de* involuta *do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, se a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, escreva as equações paramétricas $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$ da involuta do círculo. Dado $\theta_0 > 0$, calcule o comprimento do arco da involuta compreendido entre $\theta = 0$ e $\theta = \theta_0$.*



RESPOSTA: $x(\theta) = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta)$ $y(\theta) = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$ Comprimento: $\dfrac{r\theta_0^2}{2}$

Resolução: $T(\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

$$\overrightarrow{TP}(\theta) = r\theta(+\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$$

$$\therefore P(\theta) = T(\theta) + \overrightarrow{TP}(\theta) =$$

$$= r(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta),$$

$\theta \in \mathbb{R}$.

$$P'(\theta) = r(\cancel{-\operatorname{sen}\theta} + \cancel{\operatorname{sen}\theta} + \theta\cos\theta, \cancel{\cos\theta} - \cancel{\cos\theta} + \theta\operatorname{sen}\theta) =$$

$$= r\theta(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

$$\therefore \text{comprimento} = \int_0^{\theta_0} \|P'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{\theta_0} r\theta\, d\theta \overset{TFC}{=} \boxed{\frac{r\theta_0^2}{2}}$$

QUESTÃO **5.** *Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção de $z = e^{x^2+4y^2}$ com o gráfico de $g(x,y) = e^x$. Determine a reta tangente a esta curva no ponto $(0,0,1)$.*

RESPOSTA:

Parametrização: $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{4}\operatorname{sen} t,\ \exp\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)\right),\ t \in \mathbb{R}$

Reta tangente: $r = \{(0, -\lambda/4, 1) / \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(0,\lambda,1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

Resolução:

$$\begin{cases} z = e^{4y^2+x^2} \\ z = e^x \end{cases} \Rightarrow e^x = e^{x^2+4y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 4y^2 = \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/4)^2} = 1$$

$$\therefore \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \\ y(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R},$$

parametriza a projeção da intersecção das duas superfícies no plano Oxy. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t,\ \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} t,\ \exp\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t\right)\right) \end{aligned}$$

é uma parametrização da intersecção em questão.

Como $\gamma(\pi) = (0,0,1)$ e $\gamma'(\pi) = (0, -\frac{1}{4}, 0)$, a reta pedida é $\{P \in \mathbb{R}^3 / \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = (0,0,1) + \lambda(0, -1/4, 0)\}$.

#