

QUESTÃO 1. Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por, respectivamente, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Determine os subconjuntos D_f e D_g de $\mathbb{R}^2$ onde f e g são diferenciáveis, respectivamente.

RESPOSTA: $D_f = \mathbb{R}^2$

$D_g = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$

$$\text{a) } \partial_x f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{2}{3} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{e } \partial_y f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{4y}{3\sqrt[3]{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, trivialmente.

$$\forall (x, y) \neq 0, \quad \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}} \quad \text{e,}$$

como $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} x = 0$, $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \in$ limitada e $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

é contínua, segue-se $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = 0 = \partial_x f(0)$

$\therefore \partial_x f$ é contínua no zero; análogamente, $\partial_y f$ é contínua no zero. Portanto, $\partial_x f$ e $\partial_y f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, i.e. $f \in C^1$, donde f é derivável.

(b) No aberto $\overbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}}^{\neq \emptyset}$, f é a composta das aplicações de classe C^1 $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ e

$u \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f \in C^1$, logo é derivável nesse aberto.
 $(x, y) \mapsto x^3 + y^3$

Por outro lado, se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $y_0 = -x_0$, tem-se:

(i) Se $x_0 \neq 0$, $\nexists \partial_x f(x_0, y_0) \therefore f$ não é derivável em (x_0, y_0) .

(ii) Se $x_0 = y_0 = 0$:

$$\partial_x f(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(0 + t \cdot (1, 0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt[3]{t^3} = 1$$

e, análogamente, $\partial_y f(0) = 1$.

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \frac{f(0 + (h, k)) - f(0) - \partial_x f(0) \cdot h - \partial_y f(0) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{h^3 + k^3} - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \doteq \Delta(h, k)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \begin{cases} \Delta(t, 0) = 0 & \therefore \lim_{t \rightarrow 0} \Delta(t, 0) = 0 \\ \Delta(t, t) = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \frac{t}{|t|} & \therefore \nexists \lim_{t \rightarrow 0} \Delta(t, t) \end{cases}$$

$\therefore \nexists \lim_{(h, k) \rightarrow 0} \Delta(h, k)$, i.e. f não é derivável no zero.

Solução alternativa: $\forall v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$, $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(0 + tv) = \sqrt[3]{h^3 + k^3}$; portanto, se f fosse derivável no zero,

sua derivada no zero seria $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(h, k) \longmapsto \sqrt[3]{h^3 + k^3}$,

a qual não é uma aplicação linear. Então f não pode ser derivável no zero. #

QUESTÃO 2. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0, 1, 5)$ e $(0, 0, 6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3y$.

RESPOSTA: $6x - y - z + 6 = 0$

(i) $g \in C^1$ $\therefore g$ é derivável ; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x, y) = (3x^2y, x^3)$.

(ii) Seja (a, b, a^3b) o ~~plano~~ de tangência. O vetor $(2_x g(a, b), 2_y g(a, b), -1) = (3a^2b, a^3, -1)$ é normal ao plano pedido $\therefore$ ortogonal aos vetores:

$$(0, 0, 6) - (0, 1, 5) = (0, -1, 1) \text{ , i.e. } \langle (3a^2b, a^3, -1), (0, -1, 1) \rangle = 0$$

$$\text{e } (a, b, a^3b) - (0, 0, 6) = (a, b, a^3b - 6) \text{ , i.e. } \langle (3a^2b, a^3, -1), (a, b, a^3b - 6) \rangle = 0$$

$$\therefore \begin{cases} -a^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \\ 3a^3b + a^3b - a^3b + 6 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

i.e. o plano pedido é o que passa pelo ponto $(-1, 2, -2)$ e é normal a $(6, -1, -1)$, i.e.

o plano de equação $\langle (x+1, y-2, z+2), (6, -1, -1) \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6x - y - z + 6 = 0$$

QUESTÃO 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f . Determine o gradiente de f no ponto $(2, 1)$.

RESPOSTA: $\nabla f(2, 1) = (1, 4)$

Tem-se, $\forall t \in \mathbb{R}$:

(i) $f(2, t) = 2t^2$

(ii) $f(2t^2, t) = 2t^4$

De (i), aplicando-se a regra da cadeia, tem-se:

$$f_y(2, t) \cdot 1 = 4t \quad \therefore f_y(2, 1) = 4$$

Analogamente, de (ii) :

$$\partial_x f(2t^2, t) \cdot 4t + \partial_y f(2t^2, t) \cdot 1 = 8t^3$$

$$\therefore \partial_x f(2, 1) \cdot 4 + \partial_y f(2, 1) = 8 \quad \therefore \partial_x f(2, 1) = \frac{8 - 4}{4} = 1$$

$$\therefore \nabla f(2, 1) = (1, 4)$$

QUESTÃO 4. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$. Seja

$$g(u, v) = u f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, g(1, 1))$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

RESPOSTA: $a = -4$

(i) O vetor $(2, 1, 1)$ é normal ao plano dado, logo paralelo ao vetor $(\partial_x f(0, 2), \partial_y f(0, 2), -1)$, donde $\partial f(0, 2) = (-2, -1)$.

$$(ii) \quad g(1, 1) = f(0, 2) = 7 - 2 \cdot 0 - 2 = 5$$

(iii) $f \in C^1 \quad \therefore g \in C^1 \quad \therefore g$ é derivável

(iv) Pela regra da cadeia, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \partial_u g(u, v) &= f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v) + \\ &+ u \cdot [\partial_x f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v) \cdot \cos(u^2 - v^3) \cdot 2u + \\ &+ \partial_y f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v) \cdot 4uv] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_v g(u, v) &= u [\partial_x f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v) \cdot \cos(u^2 - v^3) \cdot (-3v^2) + \\ &+ \partial_y f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v) \cdot 2u^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \partial_u g(1, 1) &= f(0, 2) + 2\partial_x f(0, 2) + 4\partial_y f(0, 2) = \\ &= 5 - 4 - 4 = -3 \end{aligned}$$

$$\partial_v g(1, 1) = -3\partial_x f(0, 2) + 2\partial_y f(0, 2) = 4$$

$$(v) \quad \langle (2, 1, 1), (2, 1, -1), (4, 2, a) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - a = 0 \Leftrightarrow a = -12 + 8 = \boxed{-4}$$