QUESTÃO 1. *Encontre, caso existam, o máximo e o mínimo absolutos da função* $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ *na região* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

RESPOSTA:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto 2x^3 + y^4$$
é de classe C^1 $\therefore$ derivável $\therefore$ contínua

Como D é compacto, o teorema de Weierstrass garante que f assume máximo e mínimo em D.

(i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = (6x^2, 4y^3)$ $\therefore$ ∇f se anula apenas na origem.

(ii) Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 + y^2$. Então $g \in C^1$ e

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ $\therefore$ ∇g não se anula em $g^{-1}(1) = \partial D$.

(iii) $(x,y) \in g^{-1}(1)$ e $\nabla f(x,y) \parallel \nabla g(x,y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 3x^2y - 2xy^3 = 0 \Leftrightarrow xy(3x - 2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = \pm 1 \\ \text{ou } y = 0 \text{ e } x = \pm 1 \\ x = \frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(iv) De (i), (ii), (iii), do teorema de Fermat e do teorema dos multiplicadores de Lagrange, segue-se que os pts. de máximo ou mínimo de $f|_D$ estão no conjunto $\{(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2})\}$.

$f(0,0) = 0$; $f(\pm 1, 0) = \pm 2$; $f(0, \pm 1) = 1$; $f(\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2}) = \frac{13}{16}$

$\therefore$ o mínimo é -2 e o máximo é 2.

QUESTÃO **2.** *Uma empresa utiliza a mesma matéria-prima para produzir dois produtos, A e B. Para quantidades fixas de matéria-prima e de mão-de-obra, deve-se decidir quantos recursos devem ser alocados para a produção de A ou B. Se x unidades de A e y unidades de B devem ser produzidas, suponha que x e y estejam no conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 9x^2 + 4y^2 = 18.000\}$. O conjunto C chama-se* curva das possibilidades de produção*; um ponto de C representa uma* estratégia de produção *para a empresa. Suponha que cada unidade de A gere um lucro de 3 unidades monetárias e que cada unidade de B gere um lucro de 4 unidades monetárias, de modo que o lucro da empresa seja dado por $P(x, y) = 3x + 4y$. Encontre a estratégia de produção que maximiza o lucro.*

RESPOSTA:

Foi resolvida em aula.

QUESTÃO **3.** *Determine, caso existam, os pontos de máximo e de mínimo da função* $f(x,y) = xy$ *sujeita à restrição* $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$.

RESPOSTA:

(i) $f \in C^1$ e $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = (y, x)$

(ii) Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(x,y) \longmapsto 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64$ (*)

$g \in C^1$ e $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x,y) = (10x + 6y, 10y + 6x)$

$\therefore$ ∇g se anula apenas na origem $\therefore$ ∇g não se anula em $g^{-1}(0)$.

(iii) Dado $x \in \mathbb{R}$, suponha que $\exists y \in \mathbb{R} \,/\, (x,y) \in g^{-1}(0)$. Então o discriminante do polinômio do 2° grau na variável y dado por (*) é maior ou igual a zero, ou seja:

$$36x^2 + 4 \cdot 5 \cdot (64 - 5x^2) \geq 0 \iff x \in [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$$

Assim, $(x,y) \in g^{-1}(0) \Rightarrow x \in [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$ e, por simetria, $y \in [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$. Portanto, $g^{-1}(0) \subset [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}] \times [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$, donde $g^{-1}(0)$ é limitado. Como $g^{-1}(0)$ também é fechado (pois g é contínua e $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é fechado), segue-se que $g^{-1}(0)$ é compacto. Pelo teorema de Weierstrass, conclui-se que f assume máximo e mínimo em $g^{-1}(0)$.

(iv) Por (i) e (ii) e pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, os ptos. de máximo ou mínimo de $f|_{g^{-1}(0)}$ estão em $(x,y) \in g^{-1}(0)$ t.q. $\nabla g(x,y) \,/\!/\, \nabla f(x,y)$, i.e.

são soluções do sistema: $\begin{cases} 5x^2+5y^2+6xy-64=0 \\ 10x^2+\cancel{6xy}-10y^2-\cancel{6xy}=0 \therefore x=\pm y \end{cases}$

1.) Se $x=y$: $16x^2=64 \therefore x^2=4 \therefore x=y=\pm 2$

2.) Se $x=-y$: $4x^2=64 \therefore x^2=16 \therefore x=-y=\pm 4$

$\therefore$ os ptos. de máximo e mínimo de $f|_{g^{-1}(0)}$ estão no conjunto $\{(2,2),(-2,-2),(4,-4),(-4,4)\}$.

$f(2,2)=f(-2,-2)=4$

$f(4,-4)=f(-4,4)=-16$

$\therefore$ $(2,2)$ e $(-2,-2)$ são os ptos. de máximo,
$(-4,4)$ e $(4,-4)$ " " " " mínimo.

QUESTÃO 4. *Seja $f(x,y) = k(x^2+y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.*

(a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

(b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

RESPOSTA:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

(1) $\nabla f(x,y) = (2Kx - 2y, 2Ky - 2x)$

(2) $\text{Hess}\, f(x,y) = \begin{bmatrix} 2K & -2 \\ -2 & 2K \end{bmatrix}$ $\therefore$ $\det \text{Hess}\, f(x,y) = 4K^2 - 4$

$tr\ \text{Hess}\, f(x,y) = 4K$

(a) Segue de (1) que, $\forall K \in \mathbb{R}$, $\nabla f(0,0) = 0$ $\therefore$ $(0,0)$ é pto. crítico de f.

(b) O sinal do determinante e do traço de $\text{Hess}\, f(x,y)$ é dado pelos seguintes diagramas ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$):

sinal de $\det \text{Hess}\, f(x,y) = 4K^2 - 4$: + -1 − 1 +

" " $tr\ \text{Hess}\, f(x,y) = 4K$: − 0 +

Portanto,

(i) Se $-1 < K < 1$, $\det \text{Hess}\, f(0,0) < 0$ $\therefore$ $(0,0)$ pto. de sela;

(ii) Se $K \geq 1$, ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$) $\text{Hess}\, f(x,y)$ é semi-definida positiva (e definida se $K > 1$) $\therefore$ $(0,0)$ é pto. de mínimo global;

(iii) Se $K \leq -1$, ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$) $\text{Hess}\, f(x,y)$ é semi-definida negativa $\therefore$ $(0,0)$ é pto. de máximo global, pelo teste da [illegible] segunda. $\neq$