MAT0147 - Cálculo II - FEA, Economia - 2011

Prof. Gláucio Terra

1^a Lista de Exercícios

Parte I: Vetores e Geometria Analítica

Exercícios das seções 12.1 a 12.5 do Stewart.

Parte II: Curvas e Superfícies

1-) Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = (1, t)$ (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$

(c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + \operatorname{sen} t)$

(e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$ (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t),\ \ t \geq 0$

(g) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ (h) $\beta(t) = (\operatorname{sen}^3 t, 1 + sent)$

2-) Considere as curvas $\gamma_1(t) = (t^3, t^6)$ e $\gamma_2(t) = (t^3, t^2)$. As imagens dessas curvas são gráficos de funções da forma $y = f(x)$ com f derivável?

3-) Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t \cos t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Esboce a imagem da curva.

4-) Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (ou $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$) uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$ para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo t. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

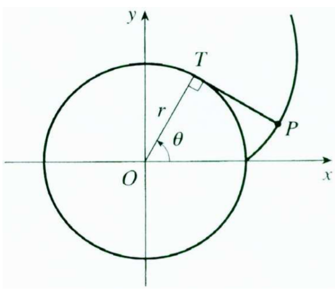
5-) Esboce as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = (1, t, 1),\ t \in \mathbb{R}$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$

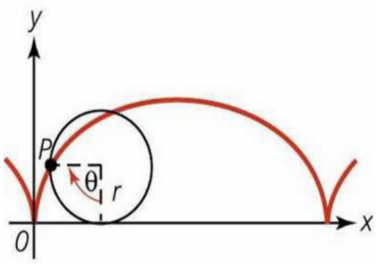
(c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t}),\ t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t),\ t \geq 0$

(e) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

6-) Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de *involuta* do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, se a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, escreva as equações paramétricas $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$ da involuta do círculo. Dado $\theta_0 > 0$, calcule o comprimento do arco da involuta compreendido entre $\theta = 0$ e $\theta = \theta_0$.



7-) Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox, conforme a figura. Encontre equações paramétricas para a curva, chamada *ciclóide*, descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem.



8-) Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \text{arctg}\ \dfrac{y}{x}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y^z}$

(e) $f(x,y) = \text{tg}(x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$

(g) $f(x,y,z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

9-) Esboce uma família de curvas de nível de:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = \text{sen}(xy)$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

10-) Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = e^{-x^2}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{2x^2+4y^2}$

(d) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = \text{arctg}(x^2 + 9y^2)$

(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{-9x^2-y^2}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ (k) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} + 4$ (l) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+4}$

11-) Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$. Desenhe as curvas de nível de f. Determine o conjunto imagem de f. (Sugestão: escreva a equação da curva de nível c de f e investigue os valores possíveis para c, ou seja, os valores de c para os quais existem pares (x,y) do domínio que têm c como imagem).

12-) O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ e o plano $y = 2$ têm como intersecção uma elipse. Ache a equação da reta tangente a esta elipse no ponto (1,2,2).

13-) Encontre uma parametrização para a curva dada

(a) pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$;

(b) pela intersecção do cilíndro $x^2 + y^2 = 4$ com a superfície $y = z^2$. Tente esboçar essa curva (use o computador);

(c) pela intersecção de $z = \sqrt{36 - 4x^2 - y^2}$ com $z^2 = 5x^2 + 8y^2$.

(d) pela intersecção de $z = e^{x^2+y^2}$ com o gráfico de $g(x,y) = e^x$.

(e) pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(f) pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

14-) Seja $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t)=(t\,\cos t, t\,\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+4}),\ t\geq 0$.
(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.
(b) Faça um esboço da imagem de γ.

15-) Seja $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$.
(a) Esboce as curvas de nível e o gráfico de f.
(b) O gráfico de f e o plano $z=2x+1$ têm como intersecção uma curva. Parametrize-a.

16-) Seja $\gamma(t)=(\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\operatorname{sen} t, t), t\in\mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2+y^2-z^2=1$. Esboce a imagem de γ.

17-) O parabolóide $z=6-x-x^2-2y^2$ e o plano $x=1$ têm como intersecção uma parábola. Ache a equação da reta tangente a essa parábola no ponto (1,2,-4). Ache a intersecção dessa reta com o plano xy. Use um computador para visualizar, na mesma tela, os gráficos do parabolóide, da parábola e da reta tangente.

Respostas:

2) Sim; Não.

6) $x=r(\cos\theta+\theta\operatorname{sen}\theta), y=r(\operatorname{sen}\theta-\theta\cos\theta)$; comprimento $=r\theta_0^2/2$.

7) $x=r\theta-r\operatorname{sen}\theta, y=r-r\cos\theta$.

8) (a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\geq y\}$; (b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\neq 0\}$; (c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2>1\}$;
(d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y>0\}$; (e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\neq y+\frac{1+2k}{2}\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}\}$;
(f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x(y-x)(y+x)>0\}$;
(g) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+\frac{z^2}{4}<4\}$.

11) $\mathbb{R}\backslash]0,1[$.

12) $X=(1,2,2)+\lambda(1,0,-2)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

13) (a) $\gamma(t)=((1+\cos t)/2, (\operatorname{sen} t)/2, (1+\cos t)/2)\,,\ t\in[0,2\pi]$.
(b) $\gamma(t)=(2\operatorname{sen} t\sqrt{1+\cos^2 t}, 2\cos^2 t, \sqrt{2}\cos t)\,,\ t\in[0,2\pi]$;
(c) $\gamma(t)=(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, \sqrt{36-16\cos^2 t-4\operatorname{sen}^2 t}),\ t\in[0,2\pi]$;
(d) $\gamma(t)=((1+2\cos t)/2, \operatorname{sen} t, \sqrt{e}\,e^{\cos t})\ ,\ t\in[0,2\pi]$;
(e) $\gamma(t)=((t^2-1)/4, t, (t^2+1)/2))\ ,\ t\in\mathbb{R}$;
(f) $\gamma(t)=(\cos t, \sqrt{2}\ \operatorname{sen} t-1, (\operatorname{sen} t-\sqrt{2})/\sqrt{2})\ ,\ t\in[0,2\pi]$.

15) (b) $\gamma(t)=((t^2-1)/4, t, (t^2+1)/2)\ ,\ t\in\mathbb{R}$.

17) $X=(1,2,4)+\lambda(0,1,-8)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$; $(1,3/2,0)$.