MAT0147 - Cálculo II - FEA, Economia - 2011

Prof. Gláucio Terra

2^a Lista de Exercícios

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^3-y}$

   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

   (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

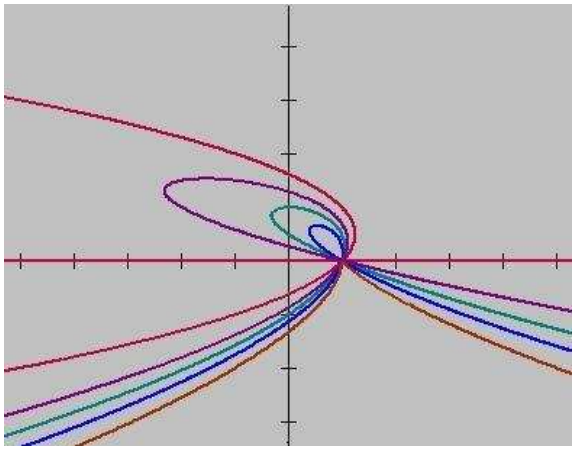
   (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

2. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

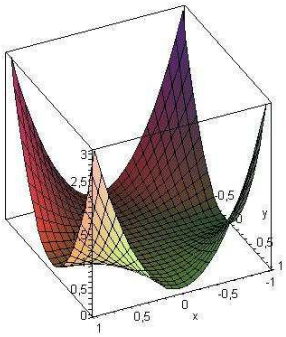
3. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x,y)\neq(1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



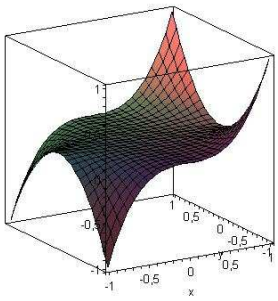
4. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1), \\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(1,1). \end{cases}$$

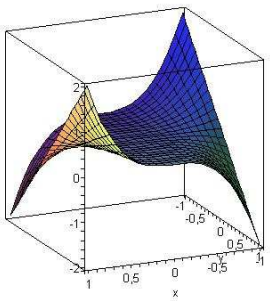
5. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua escolha.



(a)



(b)



(c)

6. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

   (a) $f(x,y) = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{z-t}$

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

8. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\text{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   [**Sugestão:** Dá menos trabalho usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar as regras de derivação.]

9. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

10. Verifique que a função $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é solução da equação de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

11. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2^a ordem.

    (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

12. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) f é contínua em (0,0)?

(c) f é diferenciável em (0,0)?

13. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em (0,0).

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) É f diferenciável em $(0,0)$?

(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

14. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

15. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,\text{sen}\,((x^2+y^2)^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

(d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

16. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

17. Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável.

18. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

19. Seja $f(x,y) = |xy|$. Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$. Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não existe? E $\dfrac{\partial f}{\partial y}$? Observe que f é diferenciável em $(0,0)$ embora **não** exista nenhum disco aberto D contendo a origem tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existam em todos os pontos $(x,y) \in D$.

20. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

21. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $w = x^2+y^2; x = t^2+u^2, y = 2tu$.

(b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t \operatorname{sen} u$.

(c) $w = x^2+y^2+z; x = tu, y = t+u, z = t^2+u^2$.

22. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

23. Um carro A está viajando para o norte a 90km/h e um carro B está viajando para o oeste a 80km/h. O carro A está se aproximando e o carro B está se distanciando da intersecção das duas estradas. Em um certo instante, o carro A está a 0,3km da intersecção e o carro B a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?

24. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3-4t, t^4-3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

25. Seja $f(x, y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e sejam a, b, c, d constantes tais que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Seja $g(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$. Mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au + bv, cu + dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au + bv, cu + dv).$$

26. (a) Seja $v(r, s)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$, onde c é constante. Verifique que:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = w(x + ct, x - ct),$$

onde $w(r, s) = -4c^2 v_{rs}(r, s)$.

(b) Mostre que se $u(x, t)$ é uma solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ então existem funções F e G de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

27. Seja $u = u(x, y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

28. Seja $f = f(x, y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s, t) = f(e^s \cos t, e^s\,\mathrm{sen}\,t)$, mostre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right].$$

29. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \text{ para todo } t > 0 \text{ e } (x, y) \in \mathcal{D}_f \qquad (H)$$

onde λ é um número real fixado. Suponha que f é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ que é homogênea de grau λ. Prove que:

(a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y)$;

(b) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \lambda(\lambda-1)f(x,y)$;

(c) As funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

(d) Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

(i) $f(x,y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ (ii) $f(x,y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2}$

(iii) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}$.

[**Sugestões:**

(a) Derive (H) em relação a t e faça $t = 1$.

(b) Derive (H) duas vezes em relação a t e faça $t = 1$.

(c) Derive (H) em relação a x e em relação a y.]

30. Seja $F(r,s) = G(e^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

(b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

31. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = e^{x^2+y^2}$ no ponto $(0,0,1)$,

(b) $z = \ln(2x+y)$ no ponto $(-1,3,0)$,

(c) $z = x^2 - y^2$ no ponto $(-3,-2,5)$,

(d) $z = e^x \ln y$ no ponto $(3,1,0)$.

32. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

33. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

34. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

35. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível $f(x,y) = 8$ no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

36. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1, 2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

37. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Para um determinado ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0, y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P:

    (a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$;

    (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$;

    (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

38. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0, 2, f(0, 2)\big)$. Seja

$$g(u, v) = u\, f\big(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2 v\big).$$

    Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1, 1, g(1, 1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

39. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície

$$z = x f\left(\frac{x}{y}\right)$$

    passam pela origem.

40. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2, 1)$.

41. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida no gráfico de uma função $z = f(x, y)$ diferenciável. Mostre que a reta tangente a γ em um ponto (x_0, y_0, z_0) está contida no plano tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0, z_0).

42. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida na intersecção dos gráficos de duas funções $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, ambas diferenciáveis. Determine a equação vetorial da reta tangente a γ em um de seus pontos, digamos (x_0, y_0, z_0), em termos dos valores de f, g e de suas derivadas parciais em (x_0, y_0).

43. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2+1, t^3+t^2+t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2\ \forall t \in \mathbb{R}$. Admita que existem 2 pontos $(x_0, y_0) \in \text{Im}\gamma$ com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 2)$ é paralelo ao plano $x + y - z = 0$. Encontre esses 2 pontos.

44. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$, $(1, 0)$;

    (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$;

    (c) $f(x, y, z) = x + \dfrac{y}{z}$, $(4, 3, -1)$;

    (d) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$, $(4, 2, 1)$.

45. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AB}$ é 3 e que a derivada direcional e f em A na direção de $\overrightarrow{AC}$ é 26. Encontre a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AD}$.

46. Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0, 0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$. É f diferenciável em $(0, 0)$?

47. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$.

48. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

    (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0, 0)$.

    (b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

    (c) Seja $\vec{u} = (m, n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.

    (d) É f diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

RESPOSTAS

1. (a) não existe (b) 0 (c) 0
   (d) não existe (e) não existe (f) não existe
   (g) não existe (h) 0 (i) 0 (j) 0

2. (a) 1 (b) 0

4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$

6. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}.$
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{z-t}; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{t-z};$
   $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t) = \dfrac{y-x}{(z-t)^2}; \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{(z-t)^2}.$

7. (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y} f'\left(\dfrac{x}{y}\right); \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2} f'\left(\dfrac{x}{y}\right).$
   (b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by); \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by).$

8. -2

12. (b) Não é contínua em (0,0). (c) Não é diferenciável em (0,0).

13. (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$
    (c) Não é diferenciável em $(0,0)$.
    (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

14. (b) Não

15. (b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\,\mathrm{sen}((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    (c)Sim. (d)Sim.

17. f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.

22. -9600π cm^3/s

23. Estão se distanciando a uma taxa de 10km/h.

24. $a = 3$

29. (d) (i) grau 2; (ii) grau -1; (iii) grau $-\dfrac{3}{2}$.

30. (a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s\cos s\dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4\cos^2 s\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs}\dfrac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s\dfrac{\partial G}{\partial y}$;

(b) 0.

31. (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $e^3 y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

32. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um)

33. $6x - y - z + 6 = 0$

34. $k = 8$

35. $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

36. $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5,-4), \lambda \in \mathbb{R}$.

37. (c)

38. $a = -4$

40. $(1,4)$

42. $X = (x_0,y_0,z_0) + \lambda\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right) \wedge \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Observe que $z_0 = f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$.)

43. $(2,-1)$ e $\left(\dfrac{10}{9}, -\dfrac{7}{27}\right)$

44. (a) $\sqrt{5},\ (1,2)$;

(b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$;

(c) $\sqrt{11},\ (1,-1,-3)$;

(d) $\dfrac{\sqrt{17}}{2},\ \left(\dfrac{1}{2},0,-2\right)$.

45. $\dfrac{327}{13}$.

46. f não é diferenciável em $(0,0)$.

47. $\dfrac{4}{5}$

48. (d) Não é.