

1-) Descreva as superfícies de nível de:

- (a) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ (b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
 (c) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ (d) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

2-) O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ e o plano $y = 2$ têm como intersecção uma elipse. Ache a equação da reta tangente a esta elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

3-) (a) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
 (b) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

4-) Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

5-) Encontre uma parametrização para C e a reta tangente a C no ponto P , onde:

- (a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.
 (b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (0, 1, 1)$.
 (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

6-) Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C , bem como os pontos onde estes valores são assumidos, onde:

- (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3y$.
 (b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.
 (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = xz + y$.
 (d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

7-) Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

8-) Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

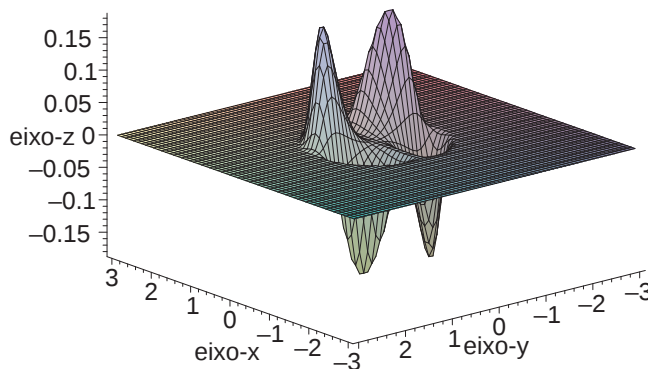
9-) Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da intersecção.

10-) Ache um vetor tangente à intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

- 11-) Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.
- 12-) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1) \in \text{Im}\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.
- 13-) Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4} - (z - 1)^2 = 0$ nos pontos $(2, 2, 2)$ e $(2, 2, 0)$.
- 14-) Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
a) $f(x, y) = xe^z + \sin(y)$, $(2, 0, 0)$ b) $f(x, y, z) = -\frac{4}{y} + z \ln(x)$, $(1, 2, -1)$
- 15-) Seja $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Ache a taxa de variação de V em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $v = i + j - k$.
(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P ?
(c) Qual é a maior taxa de variação em P ?
- 16-) Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D .)
a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (interior e bordas) com vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$
b) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$
c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
d) $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$
- 17-) Determine o máximo e o mínimo valores da função f sujeita às restrições explicitadas:
a) $f(x, y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$
b) $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
c) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$
- 18-) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x, y)$ em D sendo:
a) $f(x, y) = xy$; $D = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$
b) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, 1/4], y \geq 0\}$
- 19-) a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.
b) Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?
- 20-) Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.
- 21-) Determine a distância entre as retas de equação
 $X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1, 0, 3) + \mu(-2, 3, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$
- 22-) Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?
- 23-) Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.
- 24-) Seja $T(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x, y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x + 1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima?

- 25-)** Seja $b \in \mathbb{R}^*$ e $f(x, y) = \frac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.
- Determine, em função de b , o número de pontos críticos de f e classifique-os.
 - Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.
- 26-)** Seja $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.
- Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .
 - Para cada valor de k , classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f ?
- 27-)** A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.
- 28-)** Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.
- 29-)** Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C , sem parametrizar C , onde:
- $f(x, y, z) = x + y + z$ e $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ e } y = z^2\}$.
 - $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$
 - f e C como no exercício 6.a);
 - f e C como no exercício 6.a).
- 30-)** Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:
- $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
 - $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
 - $z = x^2y^2$
 - $z = x^3y^3$
 - $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
 - $z = y \cos x$
 - $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
 - $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$
 - $z = xye^{-x^2-y^2}$
 - $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
 - $z = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$

- 31-)** A figura abaixo exhibe o gráfico de $f(x, y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)^4}$.
- Mostre que há um número infinito de pontos críticos.
 - Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.



32-) Use multiplicadores de Lagrange para provar que:

- (a) Dentre todos os retângulos que têm perímetro constante $2p$, o que tem área máxima é um quadrado.
- (b) Dentre todos os triângulos que têm perímetro constante $2p$, o que tem área máxima é equilátero. SUGESTÃO. Use a fórmula de Heron: $A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, onde x, y, z são os comprimentos dos lados do triângulo.

33-) Uma empresa utiliza a mesma matéria-prima para produzir dois produtos, A e B . Para quantidades fixas de matéria-prima e de mão-de-obra, deve-se decidir quantos recursos devem ser alocados para a produção de A ou B . Se x unidades de A e y unidades de B devem ser produzidas, suponha que x e y estejam no conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 9x^2 + 4y^2 = 18.000\}$. O conjunto C chama-se *curva das possibilidades de produção*; um ponto de C representa uma *estratégia de produção* para a empresa. Suponha que cada unidade de A gere um lucro de 3 unidades monetárias e que cada unidade de B gere um lucro de 4 unidades monetárias, de modo que o lucro da empresa seja dado por $P(x, y) = 3x + 4y$. Encontre a estratégia de produção que maximiza o lucro.

34-) Uma empresa produz unidades de um produto A em função de parâmetros que meçam a quantidade de recursos alocados na produção do referido produto. Por exemplo, suponha que $f(x, y)$ unidades de A são produzidas se forem alocadas x unidades de mão-de-obra e y unidades de capital (i.e. máquinas, ferramentas, etc.); a função f chama-se *função de produção* do produto A . Uma classe de funções de produção usadas em muitos modelos são as chamadas *funções de produção de Cobb-Douglas*, i.e. da forma $f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$, onde $C > 0$ e $0 < a < 1$ são constantes.

Suponha que o produto A seja produzido segundo a função de produção $f(x, y) = 64x^{3/4}y^{1/4}$, que cada unidade de mão-de-obra custe 96 unidades monetárias, que cada unidade de capital custe 162 unidades monetárias e que a empresa decida produzir 3.456 unidades do produto A . Determine as quantidades de mão-de-obra x e de capital y que devem ser utilizadas para se minimizar o custo de produção dessas 3.456 unidades. Verifique que, no ponto de custo mínimo, a razão entre a *produtividade marginal de mão-de-obra* $\frac{\partial f}{\partial x}$ e a *produtividade marginal de capital* $\frac{\partial f}{\partial y}$ é igual à razão entre os preços unitários de mão-de-obra e de capital.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES I

35-) [TESTE DA DERIVADA SEGUNDA PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS REAIS] Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Dado $x \in \mathbb{R}^2$, denote por $[x]$ a matriz (coluna) das coordenadas de x na base canônica de $\mathbb{R}^2$; dado $x_0 \in \mathcal{U}$, denote por $\text{Hess } f(x_0)$ a matriz hessiana de f em x_0 . Dado $x_0 \in \mathcal{U}$, diz-se que $\text{Hess } f$ é *positiva definida* em x_0 se, para todo $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $[x]^t \cdot \text{Hess } f(x_0) \cdot [x] > 0$; diz-se que $\text{Hess } f$ é *positiva semi-definida* em x_0 se, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $[x]^t \cdot \text{Hess } f(x_0) \cdot [x] \geq 0$. Analogamente se define $\text{Hess } f$ *negativa definida* ou *negativa semi-definida*.

Use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar que, se $\mathcal{U}$ for um aberto *convexo* (i.e. que satisfaz a seguinte condição: se P, Q forem pontos quaisquer de $\mathcal{U}$, então o segmento PQ está contido em $\mathcal{U}$) e se $\text{Hess } f$ for positiva semi-definida em todos os pontos de $\mathcal{U}$, então todo ponto crítico de f é um ponto de mínimo global (e será um ponto de mínimo global *estrito* se a hessiana for positiva definida). Analogamente, se $\text{Hess } f$ for negativa semi-definida em todos os pontos do aberto convexo $\mathcal{U}$, então todo ponto crítico de f é um ponto de máximo global (e será um ponto de máximo global *estrito* se a hessiana for negativa definida). Generalize esta proposição para funções definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ (dado $n \in \mathbb{N}$) a valores reais.

- 36-)** [MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS] Sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq n$ (dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento. Gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leq i \leq n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leq i \leq n$, é, em geral, sobredeterminado se $n \geq 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, i.e. que minimize a soma dos quadrados dos erros $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $E(a, b) \doteq \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$. Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.
- 37-)** Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\|$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. Mostre que f é derivável no complementar de $\{x_0\}$ e que, $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$, $\nabla f(x) = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$. Generalize e demonstre esta proposição para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela mesma fórmula (dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$).
- 38-)** Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ e $c \in \mathbb{R}$ um *valor regular* de g , i.e. tal que o gradiente de g não se anula na superfície de nível c de g , $S_c(g)$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto fora de $S_c(g)$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\|$. Aplique o exercício anterior e o teorema dos multiplicadores de Lagrange para concluir que, se $x_1 \in S_c(g)$ for ponto de máximo ou de mínimo local da restrição de f a $S_c(g)$, então o segmento que liga x_1 a x_0 é normal a $S_c(g)$ em x_1 . Isto ocorre, em particular, se $x_1 \in S_c(g)$ realizar a distância de $S_c(g)$ a x_0 , i.e. se $\|x_0 - x_1\| = \min\{\|x_0 - x\| \mid x \in S_c(g)\}$.
- 39-)** Sejam $X \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que o gradiente de g é não-nulo em todos os pontos da superfície de nível c de g (diz-se que um tal c é *valor regular* de g), denotada, doravante, por S . Sejam $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^3$ tais que $x_0 \neq x_1$, $x_0 \notin S$ e $x_1 \notin S$, e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\| + \|x - x_1\|$.
1. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0, x_1\}$ e calcule o seu campo gradiente.
 2. Aplique o item anterior e o teorema dos multiplicadores de Lagrange para concluir que, se $x_2 \in S$ for ponto crítico da restrição de f a S , então o plano gerado pelos segmentos $[x_0, x_2]$ e $[x_1, x_2]$ contém a reta normal a S em x_2 e os ângulos formados por estes segmentos com a normal são congruentes.
 3. Generalize e demonstre os dois itens anteriores para o caso em que X é um aberto de $\mathbb{R}^n$, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$, c valor regular de g , S superfície de nível c de g , $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ fora de S e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela mesma fórmula. Em particular, para $n = 2$, isto prova a *propriedade reflexiva* das elipses: se x_0 e x_1 forem os focos de uma elipse S , então $\|x - x_0\| + \|x - x_1\|$ é constante em S , logo todo ponto de S é ponto de mínimo da restrição de f a S , o que implica que, para todo $x \in S$, os segmentos que ligam x aos focos da elipse formam com a normal a S em x ângulos congruentes; noutras palavras, se um raio de luz for emitido por um dos focos e se refletir na elipse, o raio refletido passará pelo outro foco. Esta propriedade é explorada, por exemplo, na construção de “*whisper chambers*” e de refletores elipsoidais, usados em teatros.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES II - PARA QUEM JÁ ESTUDOU ÁLGEBRA LINEAR

- 40-)** [FORMAS QUADRÁTICAS DEFINIDAS OU SEMI-DEFINIDAS] Seja $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática, i.e. $Q : x \mapsto \langle T \cdot x, x \rangle$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador simétrico. Usando matrizes, tem-se $Q(x) = [x]^t \cdot [T] \cdot [x]$, onde $[x]$ e $[T]$ denotam, respectivamente, a matriz das coordenadas de $x \in \mathbb{R}^n$ e a matriz do operador T , ambas na base canônica de $\mathbb{R}^n$. As definições dos termos Q (*semi*-)definida positiva ou Q (*semi*-)definida negativa são análogas às do exercício anterior. Mostre que:

- (i) Q é definida positiva se, e somente se, todos os auto-valores do operador simétrico T associado a Q forem estritamente positivos (i.e. > 0); analogamente, Q é semi-definida positiva se, e somente se, todos os auto-valores do operador simétrico T associado a Q forem positivos (i.e. ≥ 0).
- (ii) Q é definida negativa se, e somente se, todos os auto-valores do operador simétrico T associado a Q forem estritamente negativos (i.e. < 0); analogamente, Q é semi-definida negativa se, e somente se, todos os auto-valores do operador simétrico T associado a Q forem negativos (i.e. ≤ 0).

- 41-)** Seja $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática, i.e. $Q : x \mapsto \langle T \cdot x, x \rangle$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um operador simétrico. Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \langle x, x \rangle$, de modo que a superfície de nível 1 de g coincide com a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^3$, denotada, doravante, por S . Mostre que: (i) Q tem pontos de máximo e mínimo em S ; (ii) todos os pontos de máximo e de mínimo de Q em S são auto-vetores de T ; (iii) os valores máximo e mínimo de Q em S são, respectivamente, o maior e o menor auto-valor de T . Generalize esta proposição para formas quadráticas $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (dado $n \in \mathbb{N}$).
- 42-)** Use o exercício anterior para mostrar que todo operador simétrico $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ admite uma base ortonormal que o diagonaliza. Generalize e demonstre esta proposição para operadores simétricos $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (dado $n \in \mathbb{N}$).

RESPOSTAS

- (a) família de planos paralelos; (b) família de elipsóides com centro em $(0, 0, 0)$; (c) família de hiperbolóides de uma ou duas folhas; (d) família de cilindros hiperbólicos.
- $X = (1, 2, 2) + \lambda(1, 0, -2), \lambda \in \mathbb{R}$.
- (a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, -\cos 2t), t \in [0, 2\pi]$. (b) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t - 1, \sin t - 1), t \in [0, 2\pi]$.
- $\pm \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.
- (a) pontos de máximo: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$; pontos de mínimo: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$.
(b) ponto de máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$; ponto de mínimo: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$. (c) ponto de máximo: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$; ponto de mínimo: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$. (d) ponto de mínimo: $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right)$; não tem ponto de máximo.
- $(5, 8, 6)$.
- $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.
- $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$.
- $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$
- a) $\sqrt{6}$; $(1, 1, 2)$ b) $\sqrt{2}$; $(-1, 1, 0)$.

15. a) $\frac{32}{\sqrt{3}}$ b) $(38, 6, 12)$ c) $2\sqrt{406}$.
16. a) máximo: $f(4, 5) = 13$, mínimo: $f(4, 0) = -7$; b) máximo: $f(0, 0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2e}$; c) máximo: $f(1, 0) = 2$, mínimo: $f(-1, 0) = -2$; d) máximo: $f(2, 0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
17. a) máx $f(2, 2) = f(-2, -2) = 4$; mín $f(4, -4) = f(-4, 4) = -16$; b) máx $2/\sqrt{3}$, mín $-2/\sqrt{3}$; c) máx $1/27$, mín 0 ; d) máx $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$, mín $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$; e) máx $\sqrt{3}$, mín 1 ; f) máx $3/2$, mín $1/2$.
18. a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; b) mínimo: $\frac{1}{32} + (\frac{15}{16})^2$ e máximo 1 .
19. (a) $(1, 1)$ e $(-1, -1)$; (b) $(0, -1, 2)$.
20. $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{100}{3}$.
21. $\sqrt{12}$.
22. $(0, 0, 1)$ ou $(0, 0, -1)$.
23. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
24. ponto de máximo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; não há ponto de mínimo.
25. a) Se $b > 0$, temos 5 pontos críticos: $(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1)$ e $(0, -2)$ pontos de sela; $(0, -2)$ máx. local e $(0, 2)$ mín. local; e se $b < 0$, temos 3 pontos críticos: $(0, 0)$ e $(0, 2)$ pontos de sela; $(0, -2)$ mín. local.
b) Pontos de máx: $(-3, 3)$ e $(3, 3)$; ponto de mín. $(0, 2)$.
26. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0, 0)$ é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: $(0, 0)$ é ponto de máximo global.
27. Mais quentes: $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$; Mais frios: $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$.
30. a) $(-3, 2)$ mínimo; b) $(2/3, 1)$, $(-4/3, -1)$ selas; c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) $(4, 4)$ máximo; f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; g) $(1, 1)$ máximo, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ selas; h) $(0, 0)$ máximo, $(0, 2)$ mínimo, $(0, -2)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$ selas; i) $(0, 0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; j) $(1/3, 0)$ mínimo; k) $(2, 1)$ e $(0, 3)$ sela; $(2, 3)$ mínimo e $(0, 1)$ máximo.
31. a) $(a, 0)$ é ponto crítico $\forall a \in \mathbb{R}$. b) $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$, $\pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$.