http://acervo.folha.uol.com.br/fsp/1983/01/12/2/#

Matemática, Inglês e Francês da Fuvest

A prova

Matemática

01. Um elevador pode carregar no máximo 450kg. Deves ser transportadas 50 pessoas de 70kg. Qual o número mínimo de viagens?

Questão 1 — Resolução

Em cada viagem o elevador pode transportar no máximo 6 pessoas de 70 kg, pois, $6 \times 70 < 450 < 7 \times 70$.

Então para um total de 50 pessoas teremos no mínimo 9 viagens, pois $8 \times 6 < 50 < 9 \times 6$.

Resposta:
O número mínimo de viagens é 9 (nove).

02. Resolva as seguintes equações:
a) $1/2 - x = 6(1/3 - x)$
b) $10x^2 - 7x + 1 = 0$

Questão 2 — Resolução

a) $\frac{1}{2} - x = 6\left(\frac{1}{3} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2x = 4 - 12x \Leftrightarrow 10x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$, portanto o conjunto verdade da equação é $V = \left\{\frac{3}{10}\right\}$

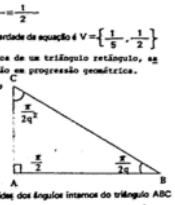
b) $10x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2 \times 10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{7-3}{20} = \frac{1}{5} \\ x'' = \frac{7+3}{20} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto verdade da equação é $V = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right\}$

03. Calcule os ângulos de um triângulo retângulo, sabendo que eles estão em progressão geométrica.

Questão 3 — Resolução



Sejam C, B e A, as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC (retângulo em A).

Se eles estão em progressão geométrica, tem-se:

$C = \frac{\pi}{2q^2}$; $B = \frac{\pi}{2q}$; $A = \frac{\pi}{2}$.

Como $A + B + C = \pi$ tem-se:

$$\frac{\pi}{2q^2} + \frac{\pi}{2q} + \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (não convém)} \\ q'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Assim:

$$A = \frac{\pi}{2}\ ;\ B = \frac{\pi}{2q} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{(1+\sqrt{5})} = \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$C = \frac{\pi}{2q^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\pi(3-\sqrt{5})}{4}$$

Resposta:
As medidas dos ângulos internos do triângulo são:

$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{4}$ e $\frac{\pi(3-\sqrt{5})}{4}$

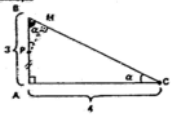
04. Prove que, se $x^2 + y^2 + x^2y^2 = (xy+1)^2$, então $|x-y| = 1$.

Questão 4 — Resolução

$x^2 + y^2 + x^2y^2 = (xy+1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x^2y^2 = x^2y^2 + 2xy + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-y)^2 = 1 \Leftrightarrow |x-y| = 1$ c.q.d.

05. Um triângulo retângulo tem catetos $\overline{AB} = 3$ e $\overline{AC} = 4$. No cateto AB toma-se um ponto P equidistante do ponto A e da reta BC. Qual a distância $\overline{AP}$?

Questão 5 — Resolução



No ΔABC, retângulo em A, temos:

$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = AC^2 + AB^2 \\ AC = 4\ ;\ AB = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow BC = 5$$

Sendo $P \in \overline{AB}$ tal que dist $(P, \overline{BC}) = \overline{AP}$, vem:

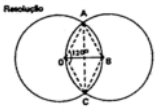
$$\left.\begin{array}{l} \Delta PMB \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{PM}{CA} = \frac{MB}{AB} = \frac{PB}{CB} \\ AP = PM\ ;\ PB = 3 - AP \\ CA = 4\ ;\ CB = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{4} = \frac{3-AP}{5} \Leftrightarrow 5AP = 12 - 4AP \Leftrightarrow AP = \frac{4}{3}$$

Resposta: A distância AP é igual a $\frac{4}{3}$

06. Num plano são dados dois círculos cujas circunferências têm raio igual a 1. A distância entre os centros é também igual a 1. Calcule a área da intersecção dos dois círculos.

Questão 6 — Resolução



A área da região S determinada pela intersecção dos dois círculos é igual a:

2 x (área do setor AÔC de 120^0) − 2 (área do triângulo equilátero de lado 1).

então:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{2 \cdot 1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta:
A área de intersecção dos dois círculos é:

$\left(2\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ unid. de área

07. O polinômio $x^5 - x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4m$ tem uma raiz igual a −1.
a) Determine m.
b) Fatore o polinômio num produto de binômios de 1º grau.

Questão 7 — Resolução

a) Se −1 é raiz de P(x) = $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4m$ então:

$(-1)^5 + (-1)^4 - 5(-1)^3 - 5(-1)^2 + 4(-1) + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

b) Se −1 é raiz de P(x) então P(x) é divisível por (x + 1).

1	1	−5	−5	4	4	−1
1	0	−5	0	4	0	

Assim:

$x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^4 - 5x^2 + 4) =$
$= (x+1)(x^2-1)(x^2-4) = (x+1)(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

08. Numa progressão geométrica de 4 termos positivos a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. Calcule a razão da progressão.

Questão 8 — Resolução

Sejam: $x; xq; xq^2; xq^3$, os quatro termos em P.G. então:

$$\begin{cases} x + xq = 1 & \text{(I)} \\ xq^2 + xq^3 = 9 \Leftrightarrow q^2 \cdot (x + xq) = 9 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), temos: $q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$

Como os 4 termos da P.G. são positivos, a razão da P.G. deve ser $q = 3$

Resposta: $q = 3$

09. Duas pessoas A e B arremessam moedas. Se A faz dois arremessos e B faz um, qual a probabilidade de A obter o mesmo número de "coroas" que B?

Questão 9 — Resolução

A probabilidade de A e B obterem nenhuma "coroa" é:

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

A probabilidade de A e B obterem uma única "coroa" é:

$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{8}$

Assim, a probabilidade de A e B obterem o mesmo número de "coroa" é:

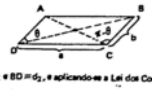
$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Resposta: $\frac{3}{8}$

10. Os lados de um paralelogramo medem a e b e suas diagonais d_1 e d_2. Prove que:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Questão 10 — Resolução



Sendo $AC = d_1$ e $BD = d_2$, e aplicando-se a Lei dos Cossenos tem-se:

$$\begin{cases} d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \\ d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \\ d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2}$$

11. Resolva a equação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x = 1$.

Questão 11 — Resolução

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + 1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\operatorname{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$ (I)

ou

$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 & \text{(II)} \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} x = -2 & \text{(III)} \end{cases}$

De (I): vem: $V_1 = \{x \in \mathbb{R} / x = n\pi \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}$

De (II): vem: $V_2 = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + n2\pi \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}$

De (III): vem: $V_3 = \emptyset$

Então:

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = n\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + n2\pi \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}$

12. Determine a equação de uma das retas que passa pelo ponto (0,0) e é tangente à parábola de equação $y = x^2 + 4$.

Questão 12 — Resolução

A equação da reta que passa pelo ponto (0,0) é $y - 0 = m(x - 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = mx$ (I).

Substituindo-se (I) em $y = x^2 + 4$, tem-se:

$mx = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 = 0$ (II)

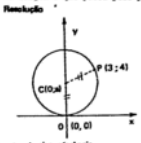
Se a reta é tangente à parábola, então a equação (II) admite uma única solução, o que implica:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$

Resposta: A equação de uma das retas é $y = 4x$, ou $y = -4x$

13. Qual a equação da circunferência tangente ao eixo dos x na origem e que passa pelo ponto (3,4)?

Questão 13 — Resolução



Seja C(0; a) o centro da circunferência.

Sendo $d_{CP} = d_{CO}$

Temos:

$\sqrt{3^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2} \Leftrightarrow 9 + a^2 - 8a + 16 = a^2 \Leftrightarrow a = \frac{25}{8}$

O centro será $C(0; \frac{25}{8})$ e o raio $OC = \frac{25}{8}$

A equação da circunferência será:

$x^2 + \left(y - \frac{25}{8}\right)^2 = \left(\frac{25}{8}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 25y = 0$

14. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine a e b de modo que $AB = I$, onde I é a matriz identidade.

Questão 14 — Resolução

Se $A \cdot B = I$ e $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$ então:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & ab \\ ab & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Resposta: $a = 1$ e $b = 0$

15. Dados dois números complexos α e β satisfazendo $\beta/\alpha = \beta - \alpha = i$, prove que $\alpha + \beta = 1$.

Questão 15 — Resolução

$\frac{\beta}{\alpha} = i \Rightarrow \beta = \alpha \cdot i$ (I)

Substituindo-se (I) em $\beta - \alpha = i$, tem-se:

$\alpha i - \alpha = i \Leftrightarrow \alpha(i - 1) = i \Leftrightarrow \alpha = \frac{i}{i-1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1-i}{2}$ (II)

Substituindo-se (II) em (I), tem-se:

$\beta = \frac{1-i}{2} \cdot i \Leftrightarrow \beta = \frac{1+i}{2}$

Portanto: $\alpha + \beta = \frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} = 1$

16. Determine o lugar geométrico da intersecção de duas retas, a primeira, passando pelo ponto (0,−1), com coeficiente angular m_1, e a segunda, passando pelo ponto (0,1), com coeficiente angular m_2, sabendo-se que $m_1^2 + m_2^2 = 1$.

Questão 16 — Resolução

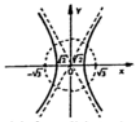
Sendo r_1 a reta que passa no ponto (0, −1) com coeficiente angular m_1, e sendo r_2 a reta que passa no ponto (0, 1) com coeficiente angular m_2, temos:

equação de r_1: $y + 1 = m_1 x \Rightarrow (y+1)^2 = m_1^2 x^2$
equação de r_2: $y - 1 = m_2 x \Rightarrow (y-1)^2 = m_2^2 x^2$
e $m_1^2 + m_2^2 = 1$

$\Rightarrow (y+1)^2 + (y-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} - y^2 = 1}$

Assim, o lugar geométrico das intersecções das retas dadas é a Hipérbole de vértices $(\pm\sqrt{2}; 0)$ e distância focal 2f, tal que:

$$\left.\begin{array}{l} f^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ f > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f = \sqrt{3}$$



17. Seja K a matriz dos coeficientes do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcule o determinante de K.
b) Prove que o sistema admite uma única solução.

Questão 17 — Resolução

a) Aplicando-se a regra de Chió, tem-se:

$$\text{Det } M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= 1 + 1 + 3 = 5$

b) Se Det M ≠ 0 então o sistema é normal e portanto admite uma única solução.

18. a) Esboce o gráfico da função $y = 2^{|\log_2 x|}$.
b) Ache a intersecção desse gráfico com a reta de equação $y = x/2 + 1$.

Questão 18 — Resolução

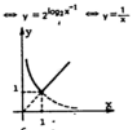
a) $y = 2^{|\log_2 x|}$

Como $\log_2 x = \begin{cases} \log_2 x\ ;\ \text{se } x \geq 1 \\ -\log_2 x\ ;\ \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ tem-se:

(I) para $x \geq 1$; $y = 2^{\log_2 x} \Leftrightarrow y = x$

(II) para $0 < x \leq 1$: $y = 2^{-\log_2 x} \Leftrightarrow y = 2^{\log_2 x^{-1}} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

De (I) e (II) obtém-se o gráfico:

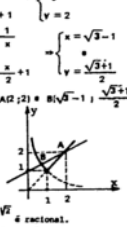


b) Para $x \geq 1$: $\begin{cases} y = x \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{e} \\ y = 2 \end{cases}$

Para $0 < x \leq 1$: $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} - 1 \\ \text{e} \\ y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

Portanto as intersecções são: $A(2; 2)$ e $B(\sqrt{3} - 1; \frac{\sqrt{3}+1}{2})$

Graficamente temos:



19. O número $x = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$ é racional.
a) Usando propriedades das potências, calcule x.
b) Prove que existem dois números irracionais α e β tais que α^β é racional.

Questão 19 — Resolução

a) $x = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$

b) Considerando-se que:

I) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

II) $[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}$

III) $\alpha = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

IV) $\beta = \sqrt{2}$

V) $\alpha^\beta = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} = 2$,

pode-se afirmar que existem dois irracionais α e β tais que α^β é racional.

20. Um aparelho transmissor de rádio, cujas ondas atingem no máximo uma distância r, está situado no alto de uma torre vertical de altura h. As ondas do transmissor atingem uma estrada retilínea e horizontal que está a uma distância d do pé da torre. Determine o comprimento do trecho da estrada no qual se pode captar a transmissão.

Questão 20 — Resolução

Seja BC = 2x, na figura, o trecho da estrada no qual se pode captar a transmissão. Então

$$\left.\begin{array}{l} \Delta AOM \text{ (ret. em O)} \Rightarrow AM^2 = AO^2 + ON^2 \\ AO = h \\ ON = d \end{array}\right\} \Rightarrow AM^2 = h^2 + d^2 \quad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta AMC \text{ (ret. em M)} \Rightarrow AC^2 = AM^2 + MC^2 \\ AC = r \\ MC = x \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 = AM^2 + x^2 \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) temos:

$x = \sqrt{r^2 - (h^2 + d^2)}$ e portanto o trecho da estrada no qual se pode captar a transmissão é: $2\sqrt{r^2 - (h^2 + d^2)}$, se $r^2 \geq h^2 + d^2$