MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura
1ª lista de exercícios

1. Seja A um anel tal que $x^2 = x$ para todo $x \in A$. Prove que A é um anel comutativo (Um anel com esta propriedade é chamado de anel de *Boole*).

2. Seja A um anel. Considerando A como grupo abeliano sabemos o que significa na, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$. Prove que $(na)(mb) = (nm)(ab)$, para todo $a, b \in A$ e $n, m \in \mathbb{Z}$.

3. Um anel de integridade D é dito de característica zero se a relação $ma = 0$, onde $0 \neq a \in D$ e $m \in \mathbb{Z}$, vale apenas se $m = 0$, D é dito de característica finita se para algum $a \neq 0$ em D e algum inteiro $m \neq 0$, $ma = 0$. A *característica* de D é definida como sedo $p = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0, na = 0 \text{ para algum } a \in D, a \neq 0\}$. Prove que:

   (a) Se D é de característica p, então $px = 0$ para todo $x \in D$;

   (b) A característica de um anel de integridade ou é zero ou um número primo.

4. **Princípio da Casa do Pombo** Se n objetos são distribuídos em m lugares e se $n > m$, então alguns lugares recebem pelo menos dois objetos.

   Usando o Princípio da Casa do Pombo, prove que se m e n são inteiros primos entre si e a e b são inteiros quaisquer, então existe um inteiro x tal que $x \equiv a (\operatorname{mod} m)$ e $x \equiv b (\operatorname{mod} n)$.

   Sugestão: Considerar os restos das divisões de $a, a+m, a+2m, \ldots, a+(n-1)m$ por n.

5. Sejam A um anel com elemento unidade e I um ideal de A. Se $1 \in I$, mostre que $I = A$.

6. Se F é um corpo, mostrar que os únicos ideais de F são $\{0\}$ e F.

7. Sejam A um anel e I, J ideais de A. Mostre que $I \cap J$ e $I + J = \{i + j \in A \mid i \in I \text{ e } j \in J\}$ são ideais de A. Mostre também que $I \cup J$ é um ideal de A se e somente se $I \subset J$ ou $J \subset I$.

8. Sejam F um corpo, A um anel e $\varphi \colon F \to A$ um homomorfismo de aneis. Mostre que φ é monomorfismo ou $\varphi = 0$.

9. Seja R um anel com elemento unidade 1 e ψ um homomorfismo de R em um anel de integridade R' tal que $\ker(\psi) \neq R$. Mostre que $\psi(1)$ é o elemento unidade de R'.

10. Sejam p um número primo e (p) o ideal de $\mathbb{Z}$ gerado por p. Mostre que:

    (a) $\mathbb{Z}/(p)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, o anel dos inteiros módulo p;

    (b) $\mathbb{Z}/(p)$ é um corpo.

11. Sejam A um anel comutativo e $a \in A$. Mostre que:

    (a) $aA = \{ar \in A \mid r \in A\}$ é um ideal de A;

(b) Mostre por meio de um exemplo que isto pode ser falso se A não é comutativo.

12. Seja A um anel comutativo com elemento unidade. Se os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A, mostre que A é um corpo.

13. Mostre que os únicos ideais do anel $M_2(\mathbb{R})$ são $\{0\}$ e $M_2(\mathbb{R})$, onde $M_2(\mathbb{R})$ é o anel das matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{R}$.

14. Sejam A um anel e I, J ideais de A. Indiquemos por IJ o conjunto de todos os elementos de A que podem ser escritos como somas finitas de elementos da forma ij onde $i \in I$ e $j \in J$. Mostre que IJ é um ideal de A e que $IJ \subset I \cap J$.

15. Se A é um anel com elemento unidade e φ é um homomorfismo de aneis de A em um anel de integridade A', mostre que $\varphi = 0$ ou $\varphi(1)$ é o elemento unidade de A'.

16. Seja A um anel com elemento unidade, tal que os únicos ideais à direita de A são $\{0\}$ e A. Mostre que A é um anel com divisão.

17. Seja A um anel de integridade e F o corpo de frações de A. Se K é um corpo que contém A, mostre que K contém um subcorpo isomorfo a A. (Neste sentido, F é o menor corpo que contém A).

18. Sejam A um anel de integridade, $a, b \in A$. Suponhamos que existam inteiros positivos m, n primos entre si tais $a^m = b^m$ e $a^n = b^n$, mostre que $a = b$.

19. Prove que o único automorfismo do anel $\mathbb{Z}$ é o automorfismo idêntico.

20. Sejam A um anel e I um ideal à esquerda de A. Chama-se *anulador* de I ao conjunto $\mathrm{Anl}(I) = \{x \in A \mid xm = 0, \forall m \in I\}$. Prove que $\mathrm{Anl}(I)$ é um ideal bilateral de A.

21. Seja p um número primo. Prove que:

    (a) Se A é um anel de integridade finito de característica p, então a aplicação $\varphi\colon A \to A$ dada por $\varphi(a) = a^p$ é um automorfismo de A;

    (b) O único automorfismo de $\mathbb{Z}_p$ é o automorfismo idêntico. Deduzir que $a^p \equiv a (\bmod p)$ para todo $a \in A$;

    (c) Prove o *Teorema de Fermat*, isto é, se p não divide a, então $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$.

22. Dizemos que I é um ideal maximal do anel A se para todo ideal J de A tal que $I \subset J \subset A$, temos que $J = I$ ou $J = A$. Seja $A = \mathcal{C}[0,1]$ o anel das funções reais continuas definidas no intervalo $[0,1]$. Prove que $I = \left\{ f \in A \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}$ é um ideal maximal de A.

23. Sejam F um corpo e $F[X, Y]$ o anel dos polinômios em duas indeterminadas com coeficientes em F. Prove que $F[X, Y]$ não é um anel principal.

    Sugestão: considerar o ideal gerado pelo conjunto $\{X, Y\}$.

24. Determinar todos os polinômios invertíveis do anel $\mathbb{Z}_4[X]$.

25. Determinar todos os polinômios de grau 4, do anel $\mathbb{Z}_4[X]$, que são divisores de zero em $\mathbb{Z}_4[X]$.

26. Sejam p um número primo, $\mathbb{Z}_p(X)$ o corpo de frações do anel de integridade $\mathbb{Z}_p[X]$ e $\varphi\colon \mathbb{Z}_p(X) \to \mathbb{Z}_p(X)$ dada por $\varphi(x) = x^p$. Mostre que φ é um momorfismo de anéis, mas não é automorfismo.

27. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e suponhamos que A seja finito com q elementos.

    (a) Determinar número de funções de A em A;

    (b) Se $A = \mathbb{Z}_{16}$, determinar uma função de A em A que não seja uma função polinomial.

28. Determinar um polinômio $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f \neq 0$ e $\partial f \leq 3$, tal que $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 2$ e $f(4) = 3$.