MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura
2ª lista de exercícios

1. Seja A um anel de integridade e F o corpo de frações de A. Se K é um corpo que contém A, mostre que K contém um subcorpo isomorfo a A. (Neste sentido, F é o menor corpo que contém A).

2. Dizemos que I é um ideal maximal do anel A se para todo ideal J de A tal que $I \subset J \subset A$, temos que $J = I$ ou $J = A$. Seja $A = \mathcal{C}[0,1]$ o anel das funções reais continuas definidas no intervalo $[0,1]$. Prove que $I = \left\{f \in A \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right\}$ é um ideal maximal de A.

3. Sejam F um corpo e $F[X,Y]$ o anel dos polinômios em duas indeterminadas com coeficientes em F. Prove que $F[X,Y]$ não é um anel principal.

   Sugestão: considerar o ideal gerado pelo conjunto $\{X,Y\}$.

4. Determinar todos os polinômios invertíveis do anel $\mathbb{Z}_4[X]$.

5. Determinar todos os polinômios de grau 4, do anel $\mathbb{Z}_4[X]$, que são divisores de zero em $\mathbb{Z}_4[X]$.

6. Sejam p um número primo, $\mathbb{Z}_p(X)$ o corpo de frações do anel de integridade $\mathbb{Z}_p[X]$ e $\varphi\colon \mathbb{Z}_p(X) \to \mathbb{Z}_p(X)$ dada por $\varphi(x) = x^p$. Mostre que φ é um momorfismo de anéis, mas não é automorfismo.

7. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e suponhamos que A seja finito com q elementos.

   (a) Determinar número de funções de A em A;

   (b) Se $A = \mathbb{Z}_{16}$, determinar uma função de A em A que não seja uma função polinomial.

8. Determinar um polinômio $f \in \mathbb{Z}_5[X], f \neq 0$ e grau$(f) \leq 3$, tal que $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 2$ e $f(4) = 3$.

9. Sejam F um corpo e $F[X,Y]$ o anel dos polinômios em duas indeterminadas com coeficientes em F. Prove que $F[X,Y]$ não é um anel principal.

   Sugestão: considerar o ideal gerado pelo conjunto $\{X,Y\}$.

10. Sejam K uma extensão do corpo F e $a \in K$. Mostre que a aplicação $\phi\colon F[X] \to F(a)$ dada por $\phi(f) = f(a)$ é um homomorfismo.

11. Sejam F um corpo e $g \in F[X]$ de grau $n \geq 1$. Mostre que o $F[X]/(g)$ é um espaço vetorial de dimensão n sobre F.

12. Sejam K uma extensão do corpo F e L o conjunto dos elementos de K que são algébricos sobre F. Mostre que L é um subcorpo de K e uma extensão de F.

13. (a) Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais. Em $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são algébricos sobre $\mathbb{Q}$. Determinar um polinômio de grau 4 sobre $\mathbb{Q}$ satisfeito por $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, isto é, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é raiz deste polinômio.

(b) Qual é o grau de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}$? Demonstrar a sua resposta.

(c) Qual é o grau de $\sqrt{2}\,\sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}$?

14. Se $a, b \in K$ são algébricos sobre F de graus m e n respectivamente e se m e n são primos entre si, mostre que $F(a, b)$ é de grau mn sobre F.

15. Suponhamos que F é um corpo finito com q elementos. Mostre que:

    (a) F tem característica finita, $p > 0$ onde p é um inteiro primo;

    (b) $q = p^n$ para algum inteiro n;

    (c) Se $a \in F$, então $a^q = a$;

    (d) Se K é uma extensão de F e $b \in K$ é algébrico sobre F, então $b^{q^m} = b$ para algum $m > 0$.

16. Um número algébrico é dito um *inteiro algébrico* se ele satisfaz um polinômio mônico de $\mathbb{Z}[X]$. Se a é um número algébrico mostrar que existe um inteiro positivo m tal que ma é um inteiro algébrico.

17. Seja $f = X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Mostre que $E = \mathbb{Q}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$ é o corpo de raízes de f.

18. Determinar os graus dos corpos de raízes dos seguintes polinômios sobre $\mathbb{Q}$:

    (a) $X^4 + 1$; (b) $X^6 + 1$; (c) $X^4 - 2$; (d) $X^5 - 1$; (e) $X^9 + X^3 + 1$.

19. Se p é um inteiro primo, mostre que o corpo de raízes sobre $\mathbb{Q}$ do polinômio $X^p - 1$ é de grau $p - 1$.

20. Seja p um inteiro primo. Mostre que:

    (a) Existe um polinômio irredutível de grau 2 sobre $\mathbb{Z}_p$;

    (b) Usar este polinômio para construir um corpo com p^2 elementos.

21. Monstre que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ não tem automorfismos além da identidade.

22. Sejam E uma extensão de F, $f \in F[X]$ e ϕ um automorfismo de E que deixa todos os elementos de F fixo. Demonstrar que se $\alpha \in E$ é uma raiz de f, então $\phi(\alpha) \in E$ é uma raiz de f.

23. Usando o resultado do exercício anterior, mostre que:

    (a) Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $f \in \mathbb{R}[X]$, então $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ é uma raiz de f.

    (b) Se m é um inteiro que não é quadrado perfeito e se $\alpha + \beta\sqrt{m}$ (α e β racionais) é uma raiz de um polinômio p com coeficientes racionais, então $\alpha - \beta\sqrt{m}$ também é uma raiz de p.

24. Mostre que se α e β são construtíveis, então $\alpha \pm \beta, \alpha\beta$ e α/β se $\beta \neq 0$ são construtíveis.

25. Mostre que uma reta em F tem uma equação da forma $ax + by + c = 0$ com $a, b, c \in F$, onde F é um subcorpo dos números reais.

26. Mostre que uma circunferência em F tem uma equação da forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in F$, onde F é um subcorpo dos números reais.

27. Mostre que uma reta em F e uma circunferência em F que se interceptam no plano real, interceptam num ponto no plano de F ou no plano de $F(\sqrt{\gamma})$, onde γ é um número positivo em F e F é um subcorpo dos números reais.

28. Se $\gamma \in F$ é positivo, mostre que $\sqrt{\gamma}$ pode ser contruído como uma intersecção de retas e circunferências em F, onde F é um subcorpo dos números reais.

29. Mostre que os seguintes polinômios são irredutíveis sobre o corpo dos números racionais:

    (a) $8X^3 - 6X - 1$; (b) $X^3 - 2$; (c) $X^3 + X^2 - 2X - 1$.

30. Mostre que $2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ satisfaz $X^3 + X^2 - 2X - 1$.

    Sugestão: Usar que $2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = e^{\frac{2\pi i}{7}} + e^{\frac{-2\pi i}{7}}$.

31. Mostre que o pentágono regular é contrutível.

32. Mostre que o hexágono regular é contrutível.

33. Mostre que o pentadecágono regular é contrutível.

34. Mostre que é possível trisseccionar 72^o.

35. Mostre que um eneágono regular não e construtível.

36. Mostre que um heptadecágono regular é contrutível. (exercício difícil)

37. Se F é de característica zero e $f \in F[X]$ é tal que $f' = 0$, mostre que $f = a \in F$

38. Se F é de característica $p \neq 0$ e $f \in F[X]$ é tal que $f' = 0$, mostre que $f(X) = g(X^p)$ para algum polinômio $g \in F[X]$.

39. Mostre que $(f + g)' = f' + g'$ e que $(\alpha f)' = \alpha f'$, para $f, g \in F[X]$ e $\alpha \in F$.