MAT2116 - Álgebra Linear para Química - 1ª Lista de exercícios

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(a) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 & = & 1 \\ -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 3x_5 & = & -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 & = & 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 & = & 1 \end{cases}$$

(c) Cuja matriz completa é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -9 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Encontre a inversa da matriz dada.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Assuma em todo exercício que A e B são matrizes quadradas.

   (a) Se $A \neq 0$, então A é invertível;

   (b) Se A é invertível, então $A \neq 0$;

   (c) Se $A^3 = 3I$, então A é invertível;

   (d) Se $A^2 = A$ e $A \neq 0$, então A é invertível;

   (e) Se A e B são inversíveis, então $A + B$ é invertível;

   (f) Se $AB = 0$ e $A \neq 0$, então $B = 0$;

   (g) Se A é invertível e $AB = 0$, então $B = 0$;

   (h) Se A é invertível e $AB = I$, então $B = A^{-1}$;

   (i) Se $AX = C$ não tem solução para alguma matriz coluna C, então $AX = 0$ não tem solução;

   (j) Se $AX = 0$ tem apenas a solução trivial, então $AX = C$ tem uma única solução para cada mariz coluna C;

   (k) Se A^2 é invertível, então A é invertível.

Adição de vetores

1. Prove que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

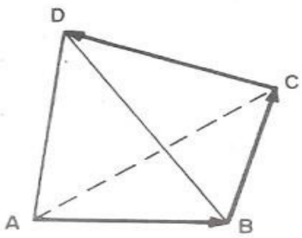
2. Dados representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura, ache um representante de $\vec{x}$ tal que

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$$

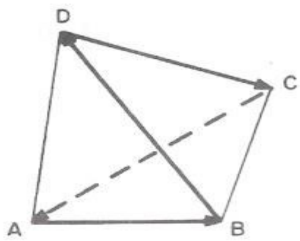
3. Justifique a seguinte regra. Para calcular $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, tome um representante (A, B) de $\vec{u}$, um representante (B, C) de $\vec{v}$, um representante (C, D) de $\vec{w}$. Então $\vec{x}$ tem como representante (A, D). (Intuitivamente falando, "fecha-se o polígono".) Raciocinando por indução finita, pode-se generalizar essa regra para *n* parcelas.

4. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:

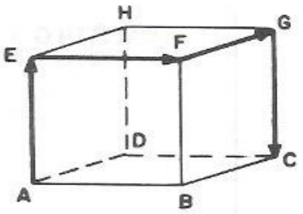
(a)



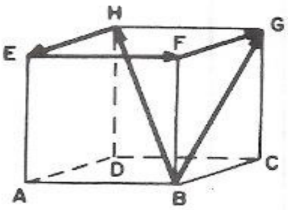
(b)



(c)

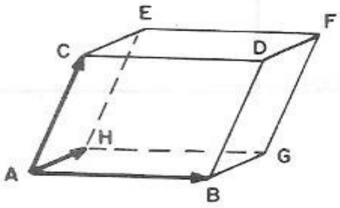


(d)



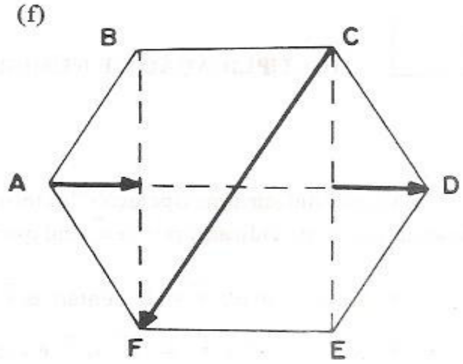
(CUBOS)

(e)



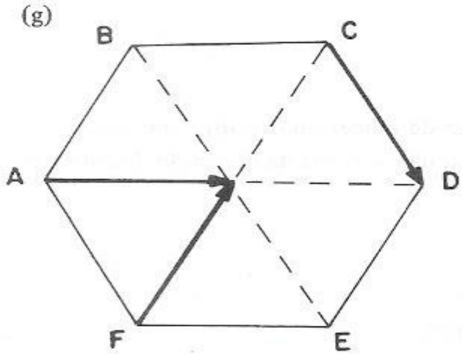
(PARALELEPÍPEDO)

(f)

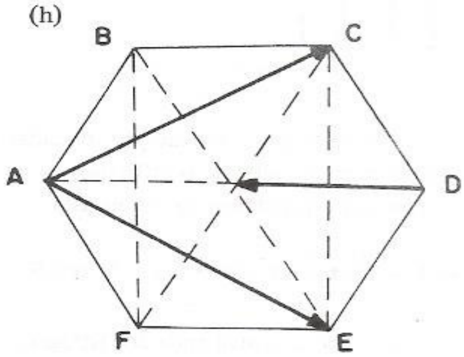


(HEXÁGONOS REGULARES)

(g)



(h)



Multiplicação de um número real por um vetor

1. Prove que $\alpha \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

2. Prove que se $\alpha \vec{u} = \alpha \vec{v}$ e se $\alpha \neq 0$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Prove que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.

4. Prove que $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$.

5. Se (A, B) é um representante de $\vec{u} \neq \vec{0}$, e (C, D) um representante de $\vec{v} \neq \vec{0}$, prove que:

   $AB \,//\, CD \iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

   (Este resultado é importantíssimo e será muito útil; trata-se de uma "tradução" algébrica muito simples, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, de um fato geométrico muito importante, o paralelismo. É exatamente isto que se pretende na Geometria Analítica.)

6. Resolva a equação na incógnita $\vec{x}$: $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$

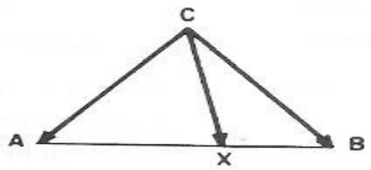
7. Resolva o sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

8. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mostre que $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário (chamado *versor* de $\vec{v}$).

Soma de ponto com vetor

1. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m).



Sugestão. Na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ faça aparecer C em ambos os membros.

2. É dado um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m, n, p).

3. Num triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $\|\overrightarrow{AX}\| = 2\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam.

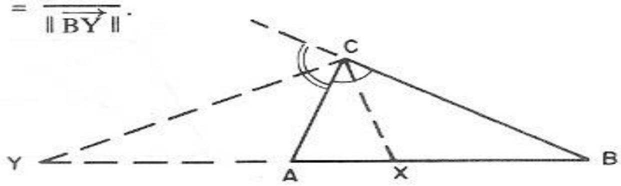
Sugestão: Use o exercício anterior, achando qual deve ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.

4. Num triângulo ABC, sejam X a interseção do lado AB com a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$, e, supondo $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$, Y a interseção da reta AB com uma das bissetrizes externas do ângulo $A\hat{C}B$(*).

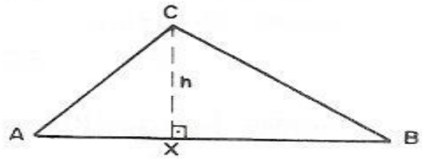
a) Os vetores $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ e $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} - \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ são respectivamente paralelos a $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$. Dê uma explicação geométrica para isso. No Capítulo 8 (Exercício 3) você dará uma prova analítica.

b) Prove que $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|}$ e $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AY}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BY}\|}$.

c) Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{CY}$, X e Y em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



5. Sendo CX a altura do $\triangle ABC$ relativa ao vértice C, exprima $\overrightarrow{CX}$ e X em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
Sugestão. Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são retos, vale $h = \|\overrightarrow{AX}\| \operatorname{tg}\hat{A} = \|\overrightarrow{BX}\| \operatorname{tg}\hat{B}$. Conclua daí que $(\operatorname{tg}\hat{A})\,\overrightarrow{AX} = (\operatorname{tg}\hat{B})\,\overrightarrow{XB}$, quer $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sejam agudos, quer um deles seja obtuso.



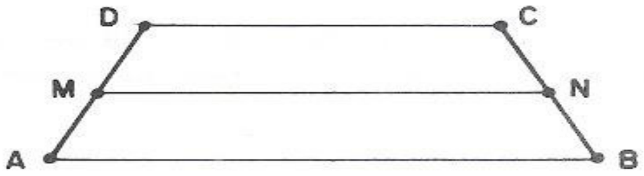
(*) Existe Y se $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$.

6. Prove que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, que divide cada uma na razão $2:1$ a partir do vértice correspondente.

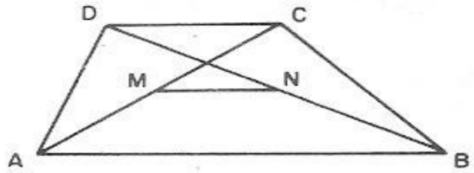
Sugestão: Usando o Exercício Resolvido nº 7: seja G o ponto comum às retas AN e BP, e H o ponto comum às retas AN e CM. Existem λ, μ, α e β tais que $G = A + \lambda \overrightarrow{AN} = B + \mu \overrightarrow{BP}$ e $H = C + \alpha \overrightarrow{CM} = A + \beta \overrightarrow{AN}$. Calcule λ, μ, α e β.

7. Prove que as alturas de um triângulo se encontram num mesmo ponto. Idem para as bissetrizes internas.

8. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



9. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



10. Num triângulo ABC, sejam M, N, P, os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Sugestão: Exercício Resolvido nº 2.

11. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

Sugestão: Tome um ponto O qualquer e considere os pontos $X = O + \overrightarrow{AN}$, $Y = X + \overrightarrow{BP}$ e $Z = Y + \overrightarrow{CM}$. Mostre que $Z = O$ e que O, X, Y não são colineares.

12. Sendo ABCDEF um hexágono regular de centro O, prove que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\,\overrightarrow{AO}.$$

13. Seja OABC um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

14. Seja OABC um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ em termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

15. Sejam A, B, C, D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$, sendo $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

16. Seja ABCD um quadrilátero, e O um ponto qualquer. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

17. Dados O, A, B, C, ache G tal que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ em função de O, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

18. Sejam A, B e C três pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:

X é um ponto da reta AB $\iff \overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha + \beta = 1$.

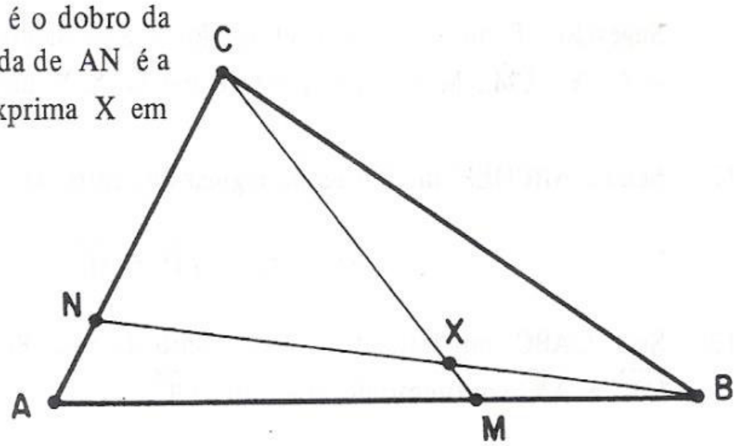
Sugestão: Exercício 1.

19. Nas condições do Exercício 18, prove que:

X é um ponto do segmento AB $\iff \overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, e $\alpha + \beta = 1$.

20. Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Prove que: X é um ponto interior ao triângulo ABC se e somente se $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e $\alpha + \beta < 1$ (um ponto é interior a um triângulo se for interior a alguma ceviana dele).

21. Na figura, a distância de M a A é o dobro da distância de M a B, e a medida de AN é a terça parte da medida de CN. Exprima X em função de A, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



22. Considere o triângulo ABC, e sejam $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$, e $\vec{w} = \vec{u} - \overrightarrow{2v}$. Calcule α real para que o ponto $X = C + \alpha \vec{w}$ pertença à reta AB.

Dependência e independência Linear

1. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v})$ também é LI, o mesmo sucedendo com $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$.

2. Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI. Dado $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem α, β, γ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (por quê?). Prove que $(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t})$ é LI $\iff \alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

3. Prove que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI $\iff$ $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LI. (A implicação $\Rightarrow$ foi provada no Exercício Resolvido nº 3.)

4. Demonstre a Proposição 2 no caso $n = 1$. Pergunta: por que a demonstração feita no texto não serve neste caso?

5. Prove que $(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w})$ é LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Todos os vetores estão referidos a uma mesma base

1. Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$, $\vec{w} = (-1, -1, 4)$, ache as coordenadas de

   a) $\vec{u} + \vec{v}$
   b) $\vec{u} - 2\vec{v}$
   c) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

2. Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, como no exercício anterior.

3. Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, estes vetores sendo dados no exercício 1.

4. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?

5. Ache m de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ seja combinação linear de $\vec{v} = (m-1, 1, m-2)$ e $\vec{w} = (m+1, m-1, 2)$. Em seguida, determine m para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja LD.

6. Decida se são LI ou LD:

   a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$
   b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$
   c) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3, 1)$
   d) $\vec{u} = (1, -3, 14)$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)$
   e) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ $\vec{v} = (200, 2, 1)$, $\vec{w} = (300, 1, 2)$
   f) $\vec{u} = (1, 2, 1)$ $\vec{v} = (1, -1, -7)$, $\vec{w} = (4, 5, -4)$
   g) $\vec{u} = \vec{0}$
   h) $\vec{u} = (1, 1, 1)$

7. Sendo E = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base, e

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$
$$\vec{f}_3 = \vec{e}_3$$

decida se f = $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base.

8. Ache m para que sejam LD

a) $\vec{u} = (m, 1, m)$, $\vec{v} = (1, m, 1)$

b) $\vec{u} = (1-m^2, 1-m, 0)$, $\vec{v} = (m, m, m)$

c) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$

d) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$, $\vec{w} = 0, m, 2m)$

9. Se E = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base, prove que F = $(\alpha \vec{e}_1, \beta \vec{e}_2, \gamma \vec{e}_3)$ é base, desde que α, β, γ não sejam nulos.

10. Seja OABC um tetraedro, e M o ponto médio de BC.

a) explique por que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ é uma base.

b) determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base.

11. Calcule $\|\vec{u}\|$, sendo E = $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base ortonormal, nos casos

a) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (1, 1, 1)_E$

b) $\vec{u} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

c) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$

d) $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$