MAT2116 - Álgebra Linear para Química - 2a. Lista de exercícios

Produto Vetorial

É fixada uma base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{v} \wedge \vec{u}$ nos casos

   a) $\vec{u} = (6, -2, -4)$, $\vec{v} = (-1, -2, 1)$.

   b) $\vec{u} = (7, 0, -5)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$.

   c) $\vec{u} = (1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 4)$.

   d) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, 4)$.

2. Calcule o momento em relação ao ponto O da força $\vec{f} = (-1, 3, 4)$, aplicada ao ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = (1, 1, 1)$ (este momento é $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}$).

3. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$. Sendo $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ e $\|\frac{1}{3}\vec{u} \wedge \frac{3}{4}\vec{v}\|$.

4. Sendo ABCD um tetraedro regular de lado unitário, calcule $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

5. Calcule a área do paralelogramo ABCD, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$

6. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 3)$.

7. Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

8. Dados $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$, ache uma base ortonormal positiva $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

(i) $\vec{a} \,//\, \vec{u}$, $\vec{a}$ tem mesmo sentido que $\vec{u}$.

(ii) $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e sua primeira coordenada é positiva.

9. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 9 \\ \vec{x} \wedge (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{cases}$$

10. Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = 2\,(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$, e $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$.

11. Sabe-se que $\vec{x}$ é ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{x}$ e $(0, 1, 0)$, tem-se $\cos\theta > 0$. Ache $\vec{x}$.

12. Prove que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2$.

13. Prove que

a) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2$

b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

14. Prove que $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2\,(\vec{v} \wedge \vec{u})$

15. Prove que se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ então

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge \vec{u}$

(b) $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u} = 3\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$

16. Prove que $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u}$

17. Prove que $(\vec{u}-\vec{t}) \wedge (\vec{v}-\vec{w}) + (\vec{v}-\vec{t}) \wedge (\vec{w}-\vec{u}) + (\vec{w}-\vec{t}) \wedge (\vec{u}-\vec{v}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u})$

18. Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{t}$ então $\vec{u}-\vec{t}$ e $\vec{v}-\vec{w}$ são linearmente dependentes. Prove isso.

19. Prove que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{w} = \vec{0}$. Interprete geometricamente.

20. Prove que se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Interprete geometricamente.

21. Prove que a altura do Δ ABC relativa ao lado AB mede $h = \dfrac{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|}{\| \overrightarrow{AB} \|}$

22. Calcule a distância do ponto C à reta r que passa por dois pontos distintos A e B.

23. Exprima a distância entre duas arestas opostas AB e CD de um tetraedro ABCD em função de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}$.

Produto Misto

É fixada uma base ortonormal positiva.

1. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sendo $\vec{u} = (-1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

2. Calcule o volume de um paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u} = (2, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (-2, -1, -1)$.

3. Calcule o volume do tetraedro ABCD dados $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$.

4. Verifique:

$$[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$$

$$\lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}].$$

5. Prove: $[\vec{u} + \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{w}, \vec{v} + \gamma\,\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

6. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, e que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base negativa, sendo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dois a dois ortogonais.

7. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$, e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Sendo $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 4$, e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base positiva, ache $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

8. Prove que

a) $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$

b) A igualdade ocorrerá se e somente se algum dos vetores for nulo, ou, sendo todos não-nulos, forem dois a dois ortogonais.

9. Prove que se $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente dependentes.

10. Prove:

a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]^2$

b) Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base, então $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u})$ é base positiva.

11. Prove que a altura do tetraedro ABCD relativa à base ABC é

$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

Sugestão Volume $= \frac{1}{3}$ (área $\triangle$ ABC) h.

12. Ache a distância de um ponto D a um plano π que passa pelos pontos não-alinhados A, B, C, conhecendo $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

13. a) Prove que se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base, e $\vec{x} \in V^3$, então

$$\vec{x} = \frac{[\vec{x}, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}\vec{e}_1 + \frac{[\vec{x}, \vec{e}_3, \vec{e}_1]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}\vec{e}_2 + \frac{[\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}\vec{e}_3$$

b) Aplique isto no caso $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (0, 1, 0)$, $\vec{x} = (4, 3, 3)$.

14. Prove que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\ [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{x} & \vec{u}\cdot\vec{y} & \vec{u}\cdot\vec{z} \\ \vec{v}\cdot\vec{x} & \vec{v}\cdot\vec{y} & \vec{v}\cdot\vec{z} \\ \vec{w}\cdot\vec{x} & \vec{w}\cdot\vec{y} & \vec{w}\cdot\vec{z} \end{vmatrix}$$

Sugestão Se MN = P, então det M . det N = det P:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 & * & * \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

15. Calcule o volume do tetraedro OABC, sabendo que OA, OB, OC medem respectivamente 2, 3, 4 e que $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$ medem respectivamente 30, 45 e 60 graus.

Sugestão Use o resultado do Exercício 14.

Estudo da Reta

Nos Exercícios 2, 4, 8, 9, 10 e 13 o sistema de coordenadas é suposto ortogonal.

1. São dados os pontos $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

   a) Escreva equações vetorial e paramétricas para a reta determinada pelos pontos B e C, e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta?

   b) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

   c) Escreva equações paramétricas da mediana relativa ao vértice C do triângulo.

2. Dados os pontos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 2, 1)$ e $C = (1, 0, 1)$, obtenha equações paramétricas das bissetrizes interna e externa do triângulo ABC, relativas ao vértice C (veja o Exercício 4 a), do Capítulo 4).

3. Obtenha equações paramétricas para os três eixos coordenados.

4. Dados os pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$, determine P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento de PB seja o triplo do comprimento de PA.

5. Escreva equações paramétricas para a reta r, que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$ e:

   a) é paralela à reta

$$s: \frac{1 - x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z + 3}{6}$$

   b) é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, 4)$ e $C = (2, 1, 3)$

   c) é paralela à reta s': $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

6. Passe para a forma simétrica, quando for possível, as equações obtidas no exercício anterior.

7. Verifique se r = s nos casos:

a) $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \frac{1}{2}\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$

b) $r: \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$

c) $r: \quad X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, -\frac{1}{2}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

$s: \quad X = (0, 1, \frac{1}{2}) + \mu(-2, 0, 1) \qquad (\mu \in \mathbb{R})$

8. Dados $A = (0, 2, 1)$, $r: \ X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. Em seguida, diga se a distância do ponto A à reta r é maior, menor, ou igual a $\sqrt{3}$, e por quê.

9. Idem para $A = (1, 1, 1)$, a distância sendo $\sqrt{11}$, e

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

10. Dada a reta r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ e os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, ache o ponto de r equidistante de A e B.

11. Ache equações paramétricas da reta que passa por $A = (3, 3, 3)$ e é paralela à reta BC, sendo $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, -1)$.

12. Dois pontos efetuam movimentos descritos pelas equações

$$X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Pergunta-se se as trajetórias são concorrentes e se haverá colisão.

13. Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Em cada um dos casos a seguir ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $\frac{1}{2}$.

a) $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 2, 3)$

b) $A = (1, 3, 2)$, $B = (2, 2, 2)$

c) $A = (3, 0, 2)$, $B = (2, 1, 2)$

d) $A = (3, -2, 1)$, $B = (0, 0, 1)$

Estudo do Plano

1. Escreva equações vetorial e paramétricas para os planos descritos abaixo:

a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

d) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$

2. Verifique (e explique por que) se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos:

a) $\pi_1: X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1)$

$\pi_2: X = (1, 2, 1) + \alpha(-1, 1, -2) + \beta(-3, 4, -6)$

b) $\pi_1: X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$

$\pi_2: X = (1, 6, 2) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, 3, -1)$

c) $\pi_1: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$

$\pi_2: X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -1, 1)$

d) $\pi_1: X = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$

$\pi_2: X = (0, 1, 1) + \alpha(1, 3, -5) + \beta(1, -1, 3)$

3. Decomponha o vetor $\vec{v} = (1, 2, 4)$ em duas parcelas, sendo uma delas paralela ao plano $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1)$ e outra paralela à reta $X = (0, 0, 0) + \nu(2, 1, 0)$.

4. Ache dois pontos A e B da intersecção dos planos π_1 e π_2, e escreva uma equação vetorial para a reta que passa por A e B. Dados:

$\pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 1)$

$\pi_2: X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 3, 0) + \mu(-2, -1, -1)$.

5. Escreva equações paramétricas para os três planos coordenados.

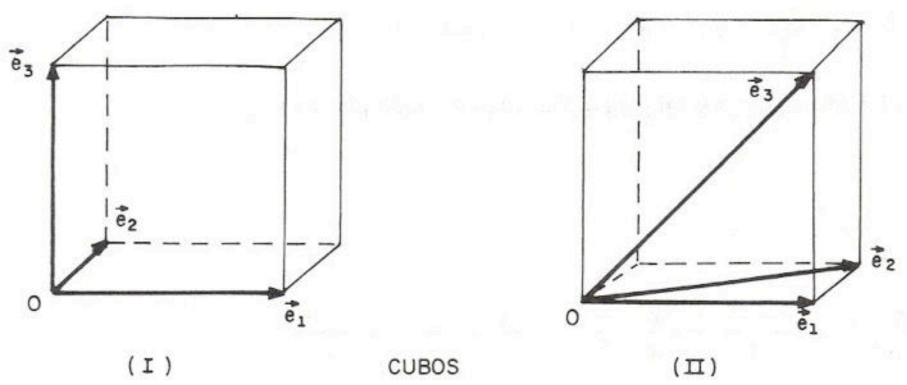
6. Escreva equações vetoriais para os planos bissetores dos diedros determinados pelos planos coordenados (são 6 bissetores!). Suponha que o sistema é ortogonal.

7. Obtenha equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano

$\pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$

Equação geral de um plano

1. Faça um esboço dos planos com equações gerais dadas abaixo, relativamente aos sistemas de coordenadas ilustrados nas figuras.



a) $x - 2 = 0$ b) $y + 1 = 0$ c) $z + 4 = 0$ d) $x + y - 1 = 0$

e) $x - z = 0$ f) $y - z - 2 = 0$ g) $x + y + z - 1 = 0$

2. Passe para a forma paramétrica as equações gerais dos planos do exercício anterior.

3. Obtenha equações gerais dos planos coordenados e dos planos bissetores dos diedros determinados por eles (suponha o sistema ortogonal).

4. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos (explique por que):

a) $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0, \quad \pi_2 : 2x - 6y + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1 : x - \dfrac{y}{2} + 2z - 1 = 0, \quad \pi_2 : -2x + y - 4z + 2 = 0$

5. Obtenha equações gerais para os planos π descritos abaixo:

a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

d) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$.

6. Dadas as retas

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z \qquad e \qquad s : x - 1 = y = z$$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por r e s.

7. Idem, sendo

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4} \qquad e \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$$

8. Obtenha uma equação geral do plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

9. Idem,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$$

10. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Seja π_2 o plano que passa por $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Seja π_3 o plano de equação vetorial $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu\,(1, 0, 1)$.

    a) Escreva equações gerais de π_1, π_2 e π_3

    b) Mostre que a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um único ponto; determine-o.

11. Verifique se a reta r está contida no plano π nos seguintes casos:

    a) r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 0)$, $\pi : x + 2y + 3z = 1$

    b) $\pi : X = (1, 4, 1) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(-1, 2, -1)$ e r passa pelos pontos $A = (2, 3, 2)$ e $B = (0, 0, 1)$

    c) r: $x - 1 = 2y = 4 - z$ e $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$

12. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e r: $X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$

    a) Mostre que $P \notin r$.

    b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

13. Verifique, em cada um dos casos seguintes, se as retas r e s são concorrentes. Em caso afirmativo, determine o ponto P comum a elas e escreva uma equação geral do plano determinado por elas.

a) $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{2+z}{5}$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

4. Seja $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral de um plano π. Suponhamos $a \neq 0$. Prove que

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}\lambda - \dfrac{c}{a}\mu - \dfrac{d}{a} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

são equações paramétricas de π.

Sugestão Verifique se elas são equações paramétricas de algum plano π_1. Mostre que $\pi_1 \subset \pi$, donde $\pi_1 = \pi$.

Vetor normal a um plano

Está fixado um sistema *ortogonal* de coordenadas.

1. Obtenha um vetor normal ao plano π nos seguintes casos:

a) π passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$

b) π tem equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

c) π tem equação geral $x - 2y + 4z + 1 = 0$

2. Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P = (1, 1, 2)$ e é paralelo a $\pi_1 : x - y + 2z + 1 = 0$.

3. Dê uma equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$.

4. Dê uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta r: $X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.

5. Decomponha o vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ paralela e ortogonalmente ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

6. Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi: 2x + y - z = 2$.

7. Escreva equações paramétricas da reta interseção dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda - \mu \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

8. Escreva equações paramétricas da reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

9. Prove que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que são eqüidistantes de $A = (1, -1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$ é um plano. Mostre em seguida que esse plano passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular ao segmento AB.

10. (Generalização do Exercício 9). Prove que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de dois pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é um plano que passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a ele. Esse plano é chamado *plano mediador* do segmento AB.

11. Mostre que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam dos pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (0, 2, 1)$ é uma reta, perpendicular ao plano que passa por A, B e C. Dê equações paramétricas dessa reta.

Álgebra linear

1. Seja $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Mostre que V com a adição e multiplicação por escalares definidas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 - y_2); \quad a(x, y) = (ax, ay),$$

não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dizendo quais dos 8 axiomas não se verificam.

2. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0,\ x + 2y - z = 0\}$. Prove que S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

3. Seja $M_n(\mathbb{C})$ o espaço vetorial das matrizes complexas $n \times n$ e $sl(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{traço}(A) = 0\}$. Prove que $sl(n, \mathbb{C})$ é um subespaço de $M_n(\mathbb{C})$.

4. Verdadeiro ou Falso. Justifique sua resposta.

   a) Se $V = \mathbb{R}^3$ e S é o conjunto dos pontos (x, y, z) de um plano π, então S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se e somente se o plano π passa pela origem;

   b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$. O conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

5. Quais dos seguintes conjuntos W são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$? justifique a sua resposta.

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$;

   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$;

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$;

   (d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z = 0\}$;

   (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y \leq z\}$;

6. Sejam U, V e W os seguintes subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\},\ V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\},\ W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}.$$

   Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3, U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta?

7. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, U e W subespaços de V e B e C bases de U e de W respectivamente. Mostre que $V = U \oplus W$ se e somente se $B \cup C$ é uma base de V.

8. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, U e W subespaços de V. Mostre que

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

9. Sendo U e W subespaços do $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3, que dimensões pode ter $U + W$ se $(1, 2, 1, 0)$, $(-1, 1, 0, 1)$, $(1, 5, 2, 1)$ é um sistema de geradores de $U \cap W$?

10. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:

$$U = \{(x, y, z) \mid x = 0\},\ V = \{(x, y, z) \mid y - 2z = 0\} \text{ e } W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)]$$

   Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: $U, V, W, U \cap V, V + W$ e $U + V + W$.

11. Determinar uma base e a dimensão do subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes simétricas e das matrizes anti-simétricas.

12. Determinar uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ 2x & - & 3y & = & 0 \\ 3x & + & \frac{1}{2}y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{c)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & - & t & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 4t & = & 0 \\ & & 2y & + & 5z & + & t & = & 0 \end{array} \right.$$

13. Determine uma base do $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,1,1,0),(1,1,2,1)$.

14. Encontre 3 vetores LD em $\mathbb{R}^3$, tais que cada par deles seja LI.

15. Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?

    (a) $F_1(x,y,z) = (x-y, x+y, 0)$;

    (b) $F_2(x,y,z) = (x,x,x)$;

    (c) $F_3(x,y,z) = (2x^2+3y, x, z)$;

16. Seja $F\colon U \longrightarrow V$ uma transformação linear tal que, para alguma base $\{u_1,\dots,u_n\}$ de U, temos que $\{F(u_1),\dots,F(u_n)\}$ é L.I. Mostre que F é injetora.

17. Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

    (a) $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = x+y-z$;

    (b) $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $F(x,y,z) = (x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y)$;

18. Determine um operador linear $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(2,1,1)$ e $(1,-1,2)$.

19. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(1,1,1) = (1,1,0)$, $F(1,0,1) = (2,0,1)$ e $F(0,1,1) = (1,-1,1)$. Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$, $\ker(F)$, $\mathrm{Im}(F)$, $\ker(F)\cap \mathrm{Im}(F)$ e $\ker(F)+\mathrm{Im}(F)$.

20. Mostrar que cada um dos operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ a seguir é invertível e determine o isomorfismo inverso:

    (a) $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x,y,z) = (x-3y-2z, y-4z, z)$;

    (b) $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x,y,z) = (x, x-y, 2x+y-z)$.

21. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz em relação as bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

    Sendo $B = \{(1,2,1),(0,1,-2),(1,1,1)\}$ e $C = \{(1,2),(1,1)\}$:

    (a) Mostre que B e C são bases;

    (b) Determine $(T)_{B,C}$;

    (c) Usando a fórmula $[T(u)]_C = (T)_{B,C}[u]_B$, determine $T(x,y,z)$.

22. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$(T)_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{(1,2,1),(0,1,-2),(1,1,1)\}$ e $C = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$. Mostre que T é invertível e determine $(T^{-1})_{C,B}$ e $T^{-1}(x,y,z)$.

23. Sejam $T \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ e $F, G \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^4)$ tais que:

$$(T)_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ (F)_{C,D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } (G)_{C,D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde B é uma base do $\mathbb{R}^3$, C é uma base do $\mathbb{R}^2$ e D é uma base do $\mathbb{R}^4$. Determine $\Big((F-G)T\Big)_{B,D}$.

24. Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita e T um operador linear de U. Mostre que, se todas as raízes de p_T são reais e simples, então T é diagonalizável.

25. Seja T o operador linear do $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$T(x,y,z,w) = (x+y+z-w, 2x+y-z, y+3z-2w, 2x-4z+2w).$$

T é diagonalizável? Justifique a sua resposta.

26. (a) Estudar quanto à possibilidade de diagonalização as matrizes:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$; (ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 2 & 0 \end{bmatrix}$; (iii) $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$;

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Dentre aquelas do ítem (a) que são diagonalizáveis, determinar uma matriz invertível M tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.

27. Calcular A^{100}, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

28. Seja o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Prove que T é diagonalizável e ache uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

29. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

A é diagonalizável?

30. Seja o operador linear T do $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine condições em a, b e c para que T seja diagonalizável.

31. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule A^{2024}.