

Universidade de São Paulo  
Instituto de Matemática e Estatística

## **Representações de Grupos Finitos e a Correspondência de McKay**

Trabalho desenvolvido na disciplina MAT0148 - Introdução ao Trabalho Científico

**Guilherme da Costa Cruz**  
**Orientador: Kostiantyn Iusenko**

São Paulo - SP  
2020

# Introdução

*I want to suggest that there is an immense wealth of connections with other areas which lies ready to be discovered. If I am right, I foresee new proofs of the classification which will owe little or nothing to the current proofs. They will be much shorter and will help us to understand the finite simple groups in a context much wider than finite group theory.*

John McKay, [9]

Conectar áreas que, à primeira vista, parecem não ter vínculos pode ser uma boa maneira de solucionar um problema e, ao abrir o leque das possibilidades de como uma mesma questão pode ser tratada, pode-se mudar a natureza do estudo das áreas que estavam previamente desconexas. Por isso, assim como sugerido pelo trecho acima, correspondências estão, e devem estar, no âmago do estudo de Matemática. Enquanto que John McKay se refere à classificação de grupos simples, que levou mais de 100 anos para ser finalizada e exigiu em torno de 10.000 páginas espalhadas ao longo de 500 artigos, como sendo um processo que não nos garantiu um amplo entendimento do estudo por estar enclausurada apenas na Teoria de Grupos; podemos citar dois exemplos de conexões muitíssimo frutíferas em Matemática:

- a correspondência de Galois, que possibilitou uma resposta para o problema de expressar raízes de polinômios de grau arbitrário.
- a correspondência entre as álgebras de Lie simples e os diagramas de Dynkin (uma lista de 7 tipos de grafos), que, essencialmente, classifica essas álgebras.

No caso da correspondência de McKay, principal objetivo deste trabalho, nossas matérias-primas são os subgrupos especiais unitários finitos:  $\Gamma \subset \text{SU}_2(\mathbb{C})$ . Para cada subgrupo  $\Gamma$ , ela nos fornece (univocamente) um certo diagrama de Dynkin, que, portanto, também nos dá um conexão natural dessas estruturas com álgebras de Lie simples. Podemos fazê-la de dois modos distintos: utilizando as representações de cada subgrupo  $\Gamma$  ou estudando as singularidades geradas por eles em um espaço chamado a variedade de órbitas.

Assim, na primeira parte do projeto, estudamos e estabelecemos os principais resultados da teoria de Representações de Grupos, tendo como maior finalidade a criação de ferramentas para construir as tabelas de caracteres dos subgrupos  $\Gamma$ . Para tanto, foram utilizados o clássico livro [1] e dois mais modernos, [2] e [3], o primeiro com uma visão geral da Teoria de Representações e o segundo focado apenas em Grupos. Para esclarecer, uma representação (linear) de um grupo  $G$  se trata, basicamente, de enxergar as operações de  $G$ , que podem ser bastante abstratas, como feitas nos grupos lineares  $\text{GL}(n)$ , relativamente mais palpáveis. Já as tabelas de caracteres conseguem caracterizar, de certo modo, todas as representações de um grupo e serão essenciais para estabelecermos o primeiro modo da correspondência.

Na segunda parte, tivemos como escopo o trabalho de [5] e iniciamos com o estudo das rotações dos sólidos platônicos, o que nos fornece uma ótima visualização geométrica quando, em seguida, realizamos a classificação dos subgrupos finitos de  $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ . Na seção seguinte, após construir as tabelas de caracteres para cada um dos possíveis subgrupos, demonstramos caso-a-caso o primeiro modo da correspondência de McKay, além de estabelecer uma relação com as álgebras de Lie associadas. Ao final, estudamos as chamadas singularidades Kleinianas, em referência a F. Klein [19], pois ele foi um dos primeiros a estudar o espaço das órbitas gerado por cada subgrupo  $\Gamma$ . Com isso, estabelecemos o segundo modo da conexão, utilizando o processo de resolução de singularidades. Vale citar que, na verdade, esse modo é historicamente anterior ao primeiro e devido, principalmente, ao matemático DuVal [16].

# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Representações de Grupos Finitos</b>	<b>3</b>
1	Definições e o Teorema de Maschke	3
2	Lema de Schur e primeiras aplicações	7
3	Caracteres e Relações de Ortogonalidade	8
4	Resultados Legais: Divisibilidade e Burnside	13
<b>II</b>	<b>Correspondência de Mckay</b>	<b>16</b>
5	<b>Sólidos Platônicos e suas Simetrias</b>	<b>16</b>
5.1	O grupo de rotações do Diedro: . . . . .	18
5.2	O grupo de rotações do Tetraedro: . . . . .	18
5.3	O grupo de rotações do Cubo: . . . . .	19
5.4	O grupo de rotações do Dodecaedro: . . . . .	20
6	<b>Os subgrupos finitos de <math>SU_2(\mathbb{C})</math></b>	<b>21</b>
6.1	$PSU_2(\mathbb{C})$ : as Rotações da Linha Projetiva . . . . .	22
6.2	Os subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$ . . . . .	24
7	<b>A Correspondência de McKay</b>	<b>26</b>
7.1	Correspondência de McKay para os grupos cíclicos . . . . .	26
7.2	Correspondência de McKay para os grupos diedrais binários . . . . .	27
7.3	Correspondência de McKay para o grupo tetraédrico binário . . . . .	28
7.4	Correspondência de McKay para o grupo octaédrico binário . . . . .	29
7.5	Correspondência de McKay para o grupo icosaédrico binário . . . . .	30
7.6	Uma conexão com as Álgebras de Lie . . . . .	31
8	<b>Resolução de Singularidades Kleinianas</b>	<b>33</b>
8.1	Resolução das singularidades cíclicas . . . . .	36
8.2	Resolução das singularidades não-cíclicas . . . . .	39

## Parte I

# Representações de Grupos Finitos

## 1 Definições e o Teorema de Maschke

Essa seção foi baseada, em linhas gerais, em [1, §1].

Dado um espaço vetorial  $V$ , vale ressaltar que denotamos por  $GL(V)$  o conjunto de todos os isomorfismos lineares de  $V$  em  $V$ , também chamados de automorfismos de  $V$ . Assim, com a operação de composição, temos que  $GL(V)$  tem uma estrutura de grupo, onde o elemento neutro é a função identidade  $Id$ . Lembre, também, que, quando  $V$  tem dimensão finita, digamos  $n$ ,  $GL(V)$  é isomorfo ao grupo multiplicativo das matrizes invertíveis  $GL(n)$ , que, para simplificar, também será denotado por  $GL(V)$ .

**Definição 1.1.** Dado um grupo  $G$ , uma *representação (linear) de  $G$*  é um espaço vetorial  $V$ , sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , munido de um homomorfismo de grupos  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , isto é:

$$\forall g, h \in G, \quad \rho(gh) = \rho(g)\rho(h), \quad \rho(1) = Id, \quad \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}.$$

Invariavelmente, também vamos chamar a função  $\rho$  simplesmente de uma representação.

Assim, para cada  $g \in G$ , temos a função  $\rho(g) : V \rightarrow V$  e, para tornar a notação menos carregada, muitas vezes escreveremos  $\rho(g)(v) \doteq g \cdot v$ , onde  $v \in V$ . Escrito desse modo, fica melhor ilustrada uma ação de cada  $g \in G$  no espaço  $V$ .

Antes de começar a listar outras definições, vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1.1.** 1. **Representação Trivial:** Assim como ocorre em outras estruturas matemáticas, também temos uma que é trivial: para qualquer grupo  $G$ , dado um corpo  $\mathbb{K}$ , podemos tomar  $V = \mathbb{K}$  e  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  tal que  $\rho(g) = Id \forall g \in G$ . Com esse homomorfismo, poderíamos ter tomado, na verdade, qualquer espaço vetorial  $V$ .

2. **Representação Regular:** Sendo  $G$  um grupo, a fim de criar uma representação natural e que reproduza toda a estrutura do grupo, podemos fazer o seguinte: dado um corpo  $\mathbb{K}$ , construa o espaço vetorial, denotado por  $\mathbb{K}[G]$ , que tenha como base o próprio grupo  $G$ , isto é, cada elemento de  $\mathbb{K}[G]$  é uma soma formal de elementos de  $G$  possivelmente multiplicados por algum escalar de  $\mathbb{K}$ . Explicitamente,  $\mathbb{K}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} c_g g : c_g \in \mathbb{K}, g \in G \right\}$ , onde  $G$  é um conjunto

linearmente independente.

Assim, se  $|G| = n$ , então  $\dim(\mathbb{K}[G]) = n$ . Além disso, perceba que esse espaço está munido com uma operação de multiplicação dos elementos de sua base e podemos estender essa operação para todo o espaço assumindo que essa operação seja bilinear.

Agora, podemos definir  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{K}[G])$  do modo mais natural possível:  $\rho(h)$  é a função de multiplicação à esquerda por  $h \in G$ , i.e.

$$\rho(h)\left(\sum_{g \in G} c_g g\right) = \sum_{g \in G} c_g (hg).$$

Chamamos essa representação de regular e o espaço  $\mathbb{K}[G]$  de álgebra do grupo  $G$ , já que uma álgebra é, por definição, um espaço vetorial munido de uma outra operação que seja bilinear.

3. **Representação Natural do grupo Dedral:** O grupo diedral, de ordem  $2n$ , pode ser escrito como  $D_n = \{a^i b^j \mid a^n = 1, b^2 = 1, bab = a^{-1}\}$  e tem uma visualização geométrica bastante natural: ele representa as simetrias de um  $n$ -ágono, em que a rotação de  $2\pi/n$  é dada pelo elemento denotado por  $a$  e a reflexão pelo  $b$ . Lembrando que rotações e reflexões do plano podem ser vistas como matrizes que agem em  $\mathbb{R}^2$ , essa visualização pode ser formalizada algebricamente usando o conceito de representação tomando  $V = \mathbb{R}^2$  e  $\rho : D_n \rightarrow GL(V)$  para ser o homomorfismo que satisfaz

$$\rho(a) = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{bmatrix} \quad \rho(b) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que, nessa representação linear, foi convencionado que  $a$  é a rotação no sentido anti-horário e  $b$  é a reflexão em relação ao eixo  $y$ . Outra observação importante é que a função  $\rho$  é injetora e, portanto, podemos pensar em  $D_n$  como subgrupo de  $GL_2(\mathbb{R})$ .

Como em toda estrutura matemática, devemos dizer quando duas representações podem ser consideradas, através de um isomorfismo, como equivalentes na teoria. A próxima definição será feita com esse intuito.

Considere  $U$  e  $V$  duas representações (definidas sobre um mesmo corpo  $\mathbb{K}$ ) de um grupo  $G$  com os homomorfismos  $\rho : G \rightarrow GL(U)$  e  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ .

**Definição 1.2.** Um morfismo das representações  $U$  e  $V$  é uma transformação linear  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que:

$$\forall g \in G \quad \forall u \in U, \quad \varphi(\rho(g)(u)) = \pi(g)(\varphi(u)), \text{ isto é, } \varphi(g \cdot u) = g \cdot (\varphi(u)).$$

Se esse morfismo for bijetor, diremos que  $\varphi$  é um *isomorfismo de representações*.

Do mesmo modo que há subespaços, somas diretas e produto tensorial de espaços vetoriais, temos esses conceitos para representações. Basta decidir como devem ser as funções  $\rho$  nesses casos.

**Definição 1.3.** Sejam  $U, V$  representações como as acima:

1. Dizemos que um subespaço vetorial  $W \subseteq U$  é uma *subrepresentação de  $U$*  se

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W, \quad \rho(g)(w) \in W.$$

Isso é o mesmo que dizer que  $W$  é invariante pela ação dos elementos de  $G$  ou, mais sucintamente, que  $G \cdot W \subseteq W$ . As subrepresentações  $U$  e  $\{0\}$  serão chamadas de *triviais*.

2. A *soma direta de representações*  $U \oplus V$  é definida como  $\rho \oplus \pi : G \rightarrow GL(U \oplus V)$  de modo que:

$$\forall u \in U \quad \forall v \in V, \quad (\rho \oplus \pi)(g)(u + v) = \rho(g)(u) + \pi(g)(v).$$

3. O *produto tensorial de representações*  $U \otimes V$  é definido como  $\rho \otimes \pi : G \rightarrow GL(U \otimes V)$  de modo que:

$$\forall u \in U \quad \forall v \in V, \quad (\rho \otimes \pi)(g)(u \otimes v) = \rho(g)(u) \otimes \pi(g)(v).$$

Não é difícil de se notar o seguinte:

**Proposição 1.1.** Se  $U, V$  são representações de um grupo  $G$  e  $\varphi : U \rightarrow V$  é um morfismo de representações, então o núcleo  $\ker(\varphi) \subseteq U$  e a imagem  $\text{Im}(\varphi) \subseteq V$  são subrepresentações.

Ilustremos alguns conceitos com um exemplo de subrepresentação de  $\mathbb{K}[G]$  que é isomorfa à representação trivial.

**Exemplo 1.2.** Seja  $G$  grupo finito e defina  $v = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{K}[G]$ , temos que o subespaço  $\mathbb{K}v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}[G]$  é subrepresentação e os elementos de  $G$  agem trivialmente nele:

$$\forall h \in G \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad h \cdot (\lambda v) = \lambda \sum_{g \in G} hg = \lambda \sum_{g' \in G} g' = \lambda v.$$

Assim, para concluirmos que  $\mathbb{K}v$  é isomorfa à representação trivial, vejamos que o isomorfismo  $\phi : \mathbb{K}v \rightarrow \mathbb{K}$ , tal que  $\phi(\lambda v) = \lambda$ , é morfismo de representações. Seja  $\rho$  a função da subrepresentação da rep. regular e  $\pi$  a da representação trivial:  $\forall h \in G \quad \forall \lambda, \quad \phi(\rho(h)\lambda v) = \phi(\lambda v) = \lambda = \pi(h)\lambda = \pi(h)(\phi(\lambda v))$ .

Com essas definições, dada uma representação, podemos pensar quando podemos decompô-la em uma soma direta de representações não nulas. Para que isso aconteça, é necessário que ela tenha uma subrepresentação não nula e própria, senão um dos somandos teria que ser  $\{0\}$ . Isso nos leva a mais algumas definições:

**Definição 1.4.** Seja  $V$  representação de um grupo  $G$ :

1. Dizemos que  $V$  é *decomponível* se  $V$  é isomorfa a alguma soma direta de representações não nulas.
2. Dizemos que  $V$  é *irredutível* se  $V$  não possui uma subrepresentação própria não nula, ou seja, se suas únicas subrepresentações são as triviais,  $V$  e  $\{0\}$ .

Pelo dito acima, temos que toda representação irredutível é indecomponível.

Agora, faremos exemplos de representações dos grupos cíclicos (finitos), o que será importante para quando estudarmos a correspondência de Mckay.

**Exemplo 1.3.** Considere  $G = C_n = \langle g \rangle$  o grupo cíclico, gerado por  $g$ , de ordem  $n$  e o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  dos números complexos. Podemos criar  $n$  representações de dimensão 1 através do número  $\zeta = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ , de modo que  $C_n$  é isomorfo ao grupo multiplicativo  $\{\zeta^k \in \mathbb{C} : k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ . Assim, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , podemos definir a representação:

$$\begin{aligned} \rho_k : G &\rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}) \\ g^j &\mapsto (\zeta^k)^j \text{Id} \end{aligned}$$

Repare que  $\rho_0$  é, na verdade, a representação trivial (já que  $\zeta^0 = 1$ ) e só há  $n$  representações distintas, pois  $\zeta^{k+n} = \zeta^k$ . Além disso, como  $\mathbb{C}$  não possui um subespaço vetorial próprio e não nulo, vale também que cada uma dessas representações é irredutível.

Fixado  $k$  como acima, ilustremos, agora, uma soma direta:

$$\begin{aligned} \rho_k \oplus \rho_{-k} : G &\rightarrow \text{GL}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \\ g^j &\mapsto \begin{bmatrix} (\zeta^k)^j & 0 \\ 0 & (\zeta^{-k})^j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É notável que a imagem dessa representação está contida em  $\text{SU}(2) \doteq \{M \in \text{GL}(\mathbb{C}^2) : MM^* = \text{Id}, \det(M) = 1\}$ . Isso acontece, porque  $\forall j \in \mathbb{N}$  o determinante é dado por  $(\zeta^k)^j (\zeta^{-k})^j = 1$  e  $\zeta^j \overline{\zeta^j} = |\zeta^j|^2 = 1$ , então  $\begin{bmatrix} \zeta^{kj} & 0 \\ 0 & \zeta^{-kj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\zeta^{kj}} & 0 \\ 0 & \overline{\zeta^{-kj}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Pensemos, agora, em decompor um espaço vetorial  $V$ : se  $V$  possui um subespaço  $U \subseteq V$ , podemos achar um subespaço  $W \subseteq V$  complementar, isto é, de modo que  $V = U \oplus W$ . Em dimensão finita, isso pode ser feito, por exemplo, completando uma base de  $U$  até chegar em uma base de  $V$  e, em dimensão arbitrária, pode-se usar o lema de Zorn. Além disso, uma soma direta pode ser pensada, de modo equivalente, como a existência de uma projeção  $P : V \rightarrow U$ , ou seja, uma função linear tal que  $P|_U = \text{Id}_U$ , pois  $P$  implica que  $V = U \oplus \ker(P)$ .

Para o nosso caso, sendo  $V$  uma representação e  $U$  subrepresentação, não há garantia de que qualquer  $W$  também será subrepresentação. Mas o resultado a seguir nos diz que, com certo cuidado, podemos achar um complementar adequado.

**Teorema 1.2.** *Suponha que  $|G| < \infty$  e que  $\mathbb{K}$  é um corpo tal que  $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ . Se  $V$  é uma representação de  $G$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , então, dada uma subrepresentação  $U \subseteq V$ , existe uma função linear  $\overline{P} : V \rightarrow U$  que é uma projeção (em  $U$ ) e um morfismo de representações. Em outras palavras,  $V = U \oplus \ker(\overline{P})$ , onde a soma é de representações.*

*Demonstração.* Sejam  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  a representação e  $P : V \rightarrow U$  uma projeção, que não é necessariamente morfismo de representações. As hipóteses iniciais nos dizem que  $|G|$  pode ser visto como um elemento não-nulo de  $\mathbb{K}$  e, assim, podemos definir  $\overline{P}$  explicitamente como:

$$\begin{aligned} \overline{P} : V &\rightarrow U \\ v &\mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P \rho(g^{-1}) v \end{aligned}$$

Usando o fato de  $U$  ser subrepresentação, repare que a imagem de  $\overline{P}$  está contida, de fato, em  $U$ , porque  $P(\rho(g^{-1})v) \in U \Rightarrow \rho(g)(P\rho(g^{-1})v) \in U$ . Agora, vejamos que:

- $\bar{P}|_U = \text{Id}_U$  : como  $U$  é subrepresentação e  $P|_U = \text{Id}_U$ , temos que  $\forall u \in U \rho(g^{-1})u \in U$  e, assim,  $\rho(g)P\rho(g^{-1})u = \rho(g)\rho(g^{-1})u = \rho(gg^{-1})u = u$ , então  $\bar{P}u = \frac{1}{|G|} \cdot |G|u = ..$
- é morfismo (de representações): sejam  $v \in V$  e  $h \in G$ :

$$\begin{aligned} \rho(h)\bar{P}(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h)\rho(g)P\rho(g^{-1})v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg)P\rho(g^{-1})v = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(g')P\rho((h^{-1}g')^{-1})v \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(g')P\rho(g'^{-1})\rho(h)v = \bar{P}(\rho(h)v), \end{aligned}$$

onde fizemos a mudança  $g' = hg$  na soma.

Com isso,  $\bar{P}$  é projeção e morfismo de representações. Para finalizar, detalhemos a soma direta induzida por  $\bar{P}$ . Primeiramente,  $W = \ker(\bar{P}) \subseteq V$  é subrepresentação, pois  $w \in W \Rightarrow \bar{P}(\rho(h)w) = \rho(h)(\bar{P}w) = \rho(h)(0) = 0 \Rightarrow \rho(h)w \in W, \forall h \in G$ . Além disso,  $V = U \oplus W$ , porque todo  $v \in V$  pode ser escrito como  $v = \bar{P}(v) + (v - \bar{P}(v))$ , onde  $\bar{P}(v) \in U$  e  $(v - \bar{P}(v)) \in W$ ; também, se  $v \in U \cap W$ , então  $\bar{P}(v) = v$  e  $\bar{P}(v) = 0$ , então  $U \cap W = \{0\}$ . Logo,  $\rho = \rho|_U \oplus \rho|_W$ .  $\square$

Utilizando indução, obtemos a seguinte consequência, atribuída a Heinrich Maschke por uma publicação de 1899 [4]:

**Corolário 1.3** (Maschke). *Suponha que  $|G| < \infty$  e que  $\mathbb{K}$  é um corpo tal que  $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ . Então, toda representação de  $G$  de dimensão finita é uma soma direta de (sub)representações irredutíveis.*

*Demonstração.* Seja  $V$  representação de  $G$  tal que  $\dim(V) = n$ . A prova é feita por indução em  $n$ : se  $\dim(V) = 1$ , então  $V$  não possui subespaço próprio e, portanto, já é irredutível. Agora, suponha que o resultado vale para todo subespaço de dimensão  $\leq n - 1$ : se  $V$  for irredutível, já temos o resultado; se  $V$  não for irredutível, temos que existe  $0 \neq U \subsetneq V$  tal que  $U$  é subrepresentação. Aplicando o teorema anterior, temos que existe subrepresentação  $W$  de modo que  $V = U \oplus W$ . Como  $0 < \dim(U) < n$  e  $0 < \dim(W) < n$ , podemos aplicar a hipótese de indução em  $U$  e em  $W$ , isto é,  $U$  e  $W$  são somas diretas de representações irredutíveis e, portanto,  $V$  também o é.  $\square$

Um outro jeito de enunciar esse resultado seria: toda representação indecomponível é irredutível. Isso pode ser visto usando a contrapositiva: se  $V$  for redutível, isto é, possuir subrepresentação própria, o teorema nos diz que ela pode ser decomposta em soma direta. De certo modo, isso simplifica a estrutura das representações de grupos finitos, o que possibilita um bom aprofundamento da teoria.

Agora, repare que a característica do corpo não dividir  $|G|$  foi importante para a demonstração do teorema. A seguir, faremos, de certa forma, uma recíproca do corolário, isto é, a hipótese sobre  $\text{char}(\mathbb{K})$  é condição necessária para que uma representação qualquer de  $G$  seja decomposta em soma de irredutíveis.

**Proposição 1.4** (Recíproca do Teorema de Maschke). *Sejam  $G$  um grupo finito e  $\mathbb{K}$  um corpo. Se a representação regular  $\mathbb{K}[G]$  pode ser decomposta como soma de irredutíveis, então  $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ .*

*Demonstração.* Sendo  $v = \sum_{h \in G} h$ , como no exemplo 1.2, a hipótese nos diz que podemos fazer a seguinte decomposição:  $\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}v \oplus I$ . Como  $I$  é subrepresentação, sendo  $x = \sum_{g \in G} c_g g \in I$ , temos que  $\forall h \in G \ h \cdot x \in I$ , então  $v \cdot x \in I$ . Mas, também:

$$v \cdot x = \sum_{g \in G} c_g \sum_{h \in G} hg = \sum_{g \in G} c_g \sum_{h' \in G} h' = \left( \sum_{g \in G} c_g \right) v \in \mathbb{K}v$$

Assim,  $v \cdot x \in \mathbb{K}v \cap I$ . Então, pela soma direta, temos que  $(\sum_{g \in G} c_g) = 0$  e, portanto,  $I = \{ \sum_{g \in G} c_g g : (\sum_{g \in G} c_g) = 0 \}$ , onde a inclusão é dada pelo acima e a igualdade pela dimensão dos espaços, já que ambos tem dimensão  $|G| - 1$ . Por fim, como  $v \notin I$ , vale que  $|G| = \sum_{g \in G} 1 \neq 0$ . Logo,  $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ .  $\square$

Essa é a primeira razão do porquê os resultados da teoria que faremos a seguir tratam de representações sobre o corpo dos números complexos, um corpo de característica zero.

## 2 Lema de Schur e primeiras aplicações

Neste momento inicial, nosso objetivo está em desenvolver teoremas mais fortes e que nos possibilitem a classificação das representações de alguns grupos. No entanto, antes disso, precisamos de um resultado básico e fundamental de representações.

**Teorema 2.1** (Lema de Schur). *Sejam  $U$  e  $V$  duas representações irredutíveis, sobre  $\mathbb{K}$ , de um grupo  $G$ . Se existir um morfismo de representações não-nulo  $\varphi: U \rightarrow V$ , então:*

1.  $\varphi$  é um isomorfismo.
2. No caso em que  $\mathbb{K}$  é um corpo algebricamente fechado,  $U$  tem dimensão finita e  $V = U$ , vale que  $\varphi = \lambda \text{Id}$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

*Demonstração.* Para provar 1, basta ver que  $\varphi$  é bijetor. Primeiramente, lembre que  $\ker(\varphi) \subseteq U$  e  $\text{Im}(\varphi) \subseteq V$  são subrepresentações. Agora, da hipótese de que  $\varphi$  não é nulo, temos que  $\text{Im}(\varphi) \neq \{0\}$  e  $\ker(\varphi) \neq U$ , então, usando a irredutibilidade de  $U$  e  $V$ , concluímos que  $\ker(\varphi) = \{0\}$  e  $\text{Im}(\varphi) = V$ .

Para o item 2, usemos o fato de  $U$  ter dimensão finita e  $\mathbb{K}$  ser algebricamente fechado para encontrar  $\lambda \in \mathbb{K}$  um autovalor de  $\varphi: U \rightarrow U$ , isto é,  $\exists 0 \neq u \in U$  tal que  $\varphi(u) = \lambda u$ . Em outras palavras:  $\ker(\varphi - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$ . Agora, notemos que a função  $\varphi - \lambda \text{Id}$  é morfismo de representações:

$$g \cdot ((\varphi - \lambda \text{Id})u) = g \cdot \varphi(u) - g \cdot (\lambda u) = \varphi(g \cdot u) - \lambda(g \cdot u) = (\varphi - \lambda \text{Id})(g \cdot u)$$

Assim, utilizando que  $U$  é irredutível, podemos concluir que  $\ker(\varphi - \lambda \text{Id}) = U$  e, portanto,  $\varphi = \lambda \text{Id}$ .  $\square$

Podemos perceber a capacidade de aplicação do lema de Schur com alguns resultados que decorrem facilmente dele.

**Corolário 2.2.** *Seja  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  uma representação de dimensão finita irredutível sobre um corpo algebricamente fechado. Se  $g \in G$  é um elemento central, então  $\rho(g) = \lambda \text{Id}$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Um elemento  $g \in G$  ser central é o mesmo que dizer que  $\forall h \in G$   $gh = hg$ , então, para cada  $h \in G$  e  $v \in V$ :

$$\rho(g)(\rho(h)v) = \rho(gh)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v).$$

Isso nos diz que  $\rho(g) \in \text{GL}(V)$  é um morfismo de representações (não-nulo) e, aplicando o lema de Schur,  $\rho(g) = \lambda \text{Id}$ .  $\square$

**Corolário 2.3.** *Se  $G$  for um grupo abeliano, então suas representações de dimensão finita irredutíveis (sobre um corpo algebricamente fechado) tem dimensão 1.*

*Demonstração.* Seja  $V$  uma representação irredutível de  $G$ . Já que num grupo abeliano todos os seus elementos são centrais, então, pelo resultado acima:

$$\forall g \in G \exists \lambda_g \in \mathbb{K}, \text{ t.q. } \forall v \in V \quad g \cdot v = \lambda_g v.$$

Assim, qualquer subespaço de  $V$  é uma subrepresentação, o que força que  $V$  tenha dimensão 1 para se manter irredutível.  $\square$

**Corolário 2.4.** *Suponha que  $|G| < \infty$  e que  $\mathbb{K}$  é um corpo algebricamente fechado tal que  $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ . Se  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  é uma representação de dimensão finita sobre  $\mathbb{K}$ , então, dado  $g \in G$ ,  $\rho(g)$  é diagonalizável.*

*Demonstração.* Fixando  $g \in G$ , olhemos para a restrição de  $V$  ao subgrupo cíclico  $H = \langle g \rangle$ , isto é, para  $\rho: H \rightarrow \text{GL}(V)$ . Aplicando o teorema de Maschke, temos que  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ , onde cada  $U_i$  é irredutível em relação a  $H$ . Agora, como  $H$  é abeliano, os corolários acima implicam que  $\rho(g) = \lambda_i \text{Id}_{U_i}$  e, assim, escolhendo uma base a partir da soma direta, temos o resultado:

$$[\rho(g)] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \text{Id}_{U_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \text{Id}_{U_r} \end{bmatrix}$$

$\square$

Com os resultados vistos até agora, fica claro que a estrutura de representações é mais palatável quando estamos trabalhando com um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Por isso, a partir de agora, iremos nos preocupar somente com representações sobre o corpo  $\mathbb{C}$  dos complexos.

### 3 Caracteres e Relações de Ortogonalidade

A principal referência para essa seção foi [1, §2].

Muitas vezes no estudo de Matemática, quando queremos classificar ou caracterizar uma estrutura complicada, buscamos transformá-la em uma mais simples, mas que ainda consiga capturar informações o bastante da estrutura inicial. Um exemplo disso está em Álgebra Linear: a função determinante resume uma matriz em um simples número e consegue reduzir o problema de saber se uma matriz é invertível ao problema de saber se seu determinante é zero ou não.

Para o nosso caso, dado um grupo, um problema interessante seria classificar todas as suas representações (de dimensão finita) a menos de isomorfismo. Mas, primeiramente, algumas perguntas devem ser feitas. Por exemplo, possuímos um critério simples para decidir se duas representações são isomorfas? Sabemos quantas representações distintas um grupo pode ter? Essas duas perguntas podem ser respondidas com o auxílio dos caracteres, ferramentas que, de certa forma, conseguem sintetizar uma representação. Agora, vamos defini-los!

**Definição 3.1.** Seja  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  uma representação do grupo  $G$  (sobre  $\mathbb{C}$ ), onde  $V$  tem dimensão finita. Chamamos a função seguinte de *caracter da representação*  $V$ :

$$\begin{aligned}\chi_V: G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{Tr}(\rho(g))\end{aligned}$$

Se a representação  $V$  for irredutível, diremos que o caracter é irredutível.

A partir daqui, a menos que se diga o contrário, quando estivermos falando de uma representação arbitrária de um grupo, assumamos que ela tem dimensão finita e que o grupo é finito.

Primeiramente, lembrando a propriedade de que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  para quaisquer duas matrizes  $A$  e  $B$  quadradas, podemos mostrar o seguinte previsível resultado:

**Proposição 3.1.** Se  $U$  e  $V$  são duas representações (de dimensão finita) de um grupo  $G$  isomorfas, então seus caracteres são iguais.

*Demonstração.* Sendo  $\rho$  e  $\pi$  os homomorfismos de  $U$  e  $V$  respectivamente, temos que existe um isomorfismo de representações  $\varphi: U \rightarrow V$ , isto é,  $\forall g \in G \forall u \in U, \rho(g)(u) = (\varphi^{-1} \circ \pi(g) \circ \varphi)(u)$ . Assim,

$$\forall g \in G \quad \chi_U(g) = \text{Tr}(\rho(g)) = \text{Tr}(\varphi^{-1}\pi(g)\varphi) = \text{Tr}(\pi(g)\varphi\varphi^{-1}) = \text{Tr}(\pi(g)) = \chi_V(g).$$

□

**Proposição 3.2.** Sejam  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(U)$  e  $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$  representações, de caracteres  $\chi_U$  e  $\chi_V$ :

1. O caracter da soma direta  $\rho \oplus \pi$  é igual a  $\chi_U + \chi_V$ .
2. O caracter do produto tensorial  $\rho \otimes \pi$  é igual a  $\chi_U \cdot \chi_V$ .

*Demonstração.* Para o item 1, escrevendo matricialmente a representação da soma direta, temos que:

$$\begin{aligned}\rho \oplus \pi: G &\rightarrow \text{GL}(U \oplus V) \\ g &\mapsto \begin{bmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \pi(g) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim,  $\text{Tr}[(\rho \oplus \pi)(g)] = \text{Tr}(\rho(g)) + \text{Tr}(\pi(g)) = \chi_U(g) + \chi_V(g)$ .

Para 2, fixe  $g \in G$  e lembre que  $\rho(g)$  e  $\pi(g)$  são diagonalizáveis, então existem bases  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $U$  e  $\{f_1, \dots, f_m\}$  de  $V$  tais que as matrizes de  $\rho(g)$  e de  $\pi(g)$  são diagonais em relação a essas bases. Escreva  $\rho(g)(e_i) = \lambda_i e_i$  e  $\pi(g)(f_j) = \mu_j f_j$ . Com isso, podemos montar a seguinte base de  $U \otimes V$   $B = \{e_i \otimes f_j \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  e visualizar a matriz de  $(\rho \otimes \pi)(g)$  em relação a  $B$ :

$$(\rho \otimes \pi)(g)(e_i \otimes f_j) = \rho(g)(e_i) \otimes \pi(g)(f_j) = (\lambda_i e_i) \otimes (\mu_j f_j) = \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j)$$

Assim,  $[(\rho \otimes \pi)(g)]$  é diagonal em relação a  $B$  e satisfaz:

$$\text{Tr}[(\rho \otimes \pi)(g)] = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left( \sum_{j=1}^m \mu_j \right) = \text{Tr}(\rho(g)) \text{Tr}(\pi(g)) = \chi_U(g) \cdot \chi_V(g).$$

□

Para desenvolvermos resultados mais profundos, vamos munir os caracteres com um produto interno. Dadas representações  $U$  e  $V$  de um grupo finito, defina:

$$(\chi_U, \chi_V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g) \overline{\chi_V(g)}.$$

Um outro modo de escrevermos o conjugado é dado a seguir: denote a representação com  $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$  e, dado  $g \in G$ , sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $\pi(g)$ . Como  $g^{|G|} = 1$ , temos que  $\pi(g)^{|G|} = \text{Id}$  e, portanto, cada um dos autovalores é uma raiz  $|G|$ -ésima da unidade. Assim,  $\lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$  e:

$$\overline{\chi_V(g)} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \sum_i \lambda_i^{-1} = \text{Tr}(\pi(g)^{-1}) = \chi_V(g^{-1}).$$

Com o próximo teorema, daremos um importante passo para uma melhor caracterização de representações de grupos.

**Teorema 3.3.** *Se  $U$  e  $V$  representações irredutíveis de um grupo finito, então*

$$(\chi_U, \chi_V) = \begin{cases} 1, & \text{se } U \cong V \\ 0, & \text{se } U \not\cong V \end{cases}.$$

*Em outras palavras, os caracteres irredutíveis formam um conjunto ortonormal.*

*Demonstração.* Denote por  $\rho_U$  e  $\rho_V$  os homomorfismos das representações. Começemos notando que, tomando uma função linear qualquer  $T: U \rightarrow V$ , podemos modificá-la de um modo similar ao feito na demonstração do Teorema de Maschke:

$$\overline{T} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g) T \rho_U(g^{-1}),$$

de modo que  $\overline{T}: U \rightarrow V$  é, agora, morfismo de representações.

Primeiramente, façamos o caso em que  $U \not\cong V$ : pelo Lema de Schur, temos que  $\overline{T} = 0$  para toda  $T$  linear. Assumindo que  $\dim(U) = m$  e  $\dim(V) = n$  e fixando bases, podemos denotar matricialmente:

$$0 = [\overline{T}]_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{k,l} [\rho_V(g)]_{ik} [T]_{kl} [\rho_U(g^{-1})]_{lj} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Dados  $i$  e  $j$ , escolha  $T$  para ser a função tal que  $[T]_{kl} = [\delta_{ik} \delta_{jl}]_{kl}$ , então:

$$0 = [\overline{T}]_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{k,l} [\rho_V(g)]_{ik} \delta_{ik} \delta_{jl} [\rho_U(g^{-1})]_{lj} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\rho_V(g)]_{ii} [\rho_U(g^{-1})]_{jj} \quad \forall i \forall j.$$

E, somando em  $i$  e  $j$ , obtemos o resultado:

$$0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{i=1}^n [\rho_V(g)]_{ii} \right) \left( \sum_{j=1}^m [\rho_U(g^{-1})]_{jj} \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}[\rho_V(g)] \text{Tr}[\rho_U(g^{-1})] = (\chi_V, \chi_U).$$

Agora, façamos o caso em que  $U \cong V$ , isto é, existe isomorfismo de representações  $\phi: V \rightarrow U$ . Pelo lema de Schur, a função  $\phi \circ \overline{T} = \lambda \text{Id}_U$  para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Assim:

$$\lambda \cdot \dim(U) = \text{Tr}(\phi \circ \overline{T}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}[\phi \rho_V(g) T \rho_U(g^{-1})] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}[\rho_U(g) \phi T \rho_U(g^{-1})] = \text{Tr}[\phi \circ T].$$

Com isso,

$$\phi \circ \overline{T} = \frac{\text{Tr}[\phi \circ T]}{\dim(U)} \text{Id}_U.$$

E, utilizando da mesma ideia que acima, podemos escolher  $T$  de modo que  $[\phi \circ T]_{kl} = [\delta_{ik} \delta_{jl}]_{kl}$ , então, já que  $\text{Tr}[\phi \circ T] = \delta_{ij}$ , segue que:

$$\frac{\delta_{ij}}{\dim(U)} = [\phi \circ \overline{T}]_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{k,l} [\rho_U(g)]_{ik} [\phi T]_{kl} [\rho_U(g^{-1})]_{lj} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\rho_U(g)]_{ii} [\rho_U(g^{-1})]_{jj}.$$

Lembrando que, pela proposição 3.1,  $\chi_U = \chi_V$ , só nos resta somar em  $i$  e  $j$ :

$$\begin{aligned} (\chi_V, \chi_U) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_i [\rho_U(g)]_{ii} \right) \left( \sum_j [\rho_U(g^{-1})]_{jj} \right) = \sum_{i,j} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\rho_U(g)]_{ii} [\rho_U(g^{-1})]_{jj} \right) = \\ &= \sum_{i,j} \frac{\delta_{ij}}{\dim(U)} = \sum_{i=1}^{\dim(U)} \frac{1}{\dim(U)} = \frac{\dim(U)}{\dim(U)} = 1. \end{aligned}$$

□

Com isso, temos um critério simples para distinguir representações irreduzíveis não-isomorfas, o que, aliado ao teorema de Maschke, nos proverá de um critério para distinguirmos quaisquer representações de dimensão finita. Nessa direção, escreva uma representação de dimensão finita  $V$  como soma de irreduzíveis:

$$V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_n.$$

Com os caracteres, podemos saber a multiplicidade de representações irreduzíveis isomorfas nessa soma. Escolha representantes  $V_1, \dots, V_r$  das classes de isomorfismo das representações presentes na soma acima. Usando o teorema acima e que  $\chi_V = \chi_{V'_1} + \dots + \chi_{V'_r}$ , defina

$$m_i \doteq (\chi_V, \chi_{V_i}) = (\text{quantidade de } V'_j \text{'s tal que } V'_j \cong V_i).$$

Assim, cada  $m_i \neq 0$  e podemos reescrever a soma como:

$$V \cong V_1^{\oplus m_1} \oplus \dots \oplus V_r^{\oplus m_r}, \text{ de modo que } \sum_{j=1}^r m_j = n \text{ e } i \neq j \Rightarrow V_i \not\cong V_j.$$

Desse modo, podemos criar, a partir dos caracteres, um critério confortável para decidir se duas representações são isomorfas e, por conta dele, poderemos dizer que os caracteres, de fato, caracterizam a estrutura de representações a menos de isomorfismo.

**Corolário 3.4.** *Duas representações de um grupo finito são isomorfas se, e somente se, seus caracteres são iguais.*

*Demonstração.* A ida já foi feita em 3.1. Para a volta, sejam  $U$  e  $V$  duas representações de um grupo  $G$  que tenham o mesmo caracter  $\chi$ . Escreva  $U$  e  $V$  em somas de irreduzíveis como a acima:

$$U \cong U_1^{\oplus m_1} \oplus \dots \oplus U_r^{\oplus m_r} \quad V \cong V_1^{\oplus n_1} \oplus \dots \oplus V_s^{\oplus n_s}.$$

Segue que

$$m_1 \chi_{U_1} + \dots + m_r \chi_{U_r} = \chi = n_1 \chi_{V_1} + \dots + n_s \chi_{V_s},$$

e, para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$m_i = (\chi, \chi_{U_i}) = \sum_{j=1}^s n_j (\chi_{V_j}, \chi_{U_i}).$$

Então, existe  $\bar{j}$ , que é único pela construção da soma, tal que  $(\chi_{V_{\bar{j}}}, \chi_{U_i}) = 1$ . Isso implica que, para cada  $i$ , existe único  $\bar{j}$  tal que  $V_{\bar{j}} \cong U_i$  e que  $n_{\bar{j}} = m_i$ . Fazendo o processo inverso, também temos que, para cada  $j$ , existe único  $\bar{i}$  tal que  $U_{\bar{i}} \cong V_j$  e que  $m_{\bar{i}} = n_j$ . Conclui-se, pois, que  $r = s$  e que, após uma permutação adequada dos somandos, teremos, para cada  $i$ ,  $U_i \cong V_i$  e  $n_i = m_i$ . Isto é,  $U \cong V$ . □

Com mínimas alterações, pode-se perceber que essa demonstração também prova o seguinte:

**Corolário 3.5.** *A decomposição de uma representação em soma de irreduzíveis é única a menos de isomorfismo e permutação dos somandos.*

Uma outra importante aplicação do teorema é dada decompondo a representação regular  $\mathbb{C}[G]$  (cf. exemplo 1.1) e analisando seu caracter.

Fixe  $g \in G$  e visualize a matriz de  $\rho(g)$  em relação à base  $G$ . Temos que, para cada  $h \in G$ ,

$$\rho(g)(h) \in \langle h \rangle \subseteq \mathbb{C}[G] \Leftrightarrow gh = h \Leftrightarrow g = 1.$$

Isso nos diz que, se  $g \neq 1$ , a diagonal de  $[\rho(g)]$  é formada só por zeros e a de  $[\rho(1)]$  formada só por 1's (afinal,  $\rho(1) = \text{Id}$ ). Sendo  $\psi$  o caracter de  $\mathbb{C}[G]$ , segue que:  $\psi(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \\ 0, & g \neq 1 \end{cases}$ .

Esse fato unido ao teorema de ortonormalidade de caracteres nos fornece um resultado fundamental para descobrir a dimensão de representações irredutíveis, que é provado a seguir.

**Corolário 3.6.** Para todo grupo finito  $G$ , há somente um número finito, digamos  $r$ , de representações irredutíveis não isomorfas. Além disso, denotando suas dimensões por  $n_1, \dots, n_r$ , vale que

$$|G| = n_1^2 + \dots + n_r^2.$$

*Demonstração.* Seja  $V$  uma representação irredutível de  $G$ ,  $\chi_V$  seu caracter e  $\psi$  o caracter de  $\mathbb{C}[G]$ , então

$$(\psi, \chi_V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \chi_V(g) = \frac{1}{|G|} \psi(1) \chi_V(1) = \frac{|G| \cdot \dim(V)}{|G|} = \dim(V).$$

Com isso, cada representação irredutível  $V$  está imersa em  $\mathbb{C}[G]$  com multiplicidade  $m = \dim(V)$ . Agora, como  $\dim(\mathbb{C}[G]) = |G| < \infty$ , só há um número finito de subrepresentações irredutíveis de  $\mathbb{C}[G]$  não isomorfas, o que implica a primeira afirmação do enunciado. Para a segunda, decomponha  $\mathbb{C}[G]$  como soma de irredutíveis não isomorfas:

$$\mathbb{C}[G] = V_1^{\oplus m_1} \oplus \dots \oplus V_r^{\oplus m_r},$$

onde, pela conta acima, cada  $m_i = \dim(V_i)$ . Logo,  $|G| = \dim(\mathbb{C}[G]) = \dim(V_1)^2 + \dots + \dim(V_r)^2$ .  $\square$

Com esse resultado, já podemos classificar todas as representações de alguns grupos mais básicos, como é o caso dos cíclicos:

**Exemplo 3.1.** Sendo  $G = C_n = \langle g \rangle$  o grupo cíclico de ordem  $n$  e retomando o exemplo 1.3, encontramos  $n$  representações distintas de dimensão 1. Não é difícil de se notar que elas são, duas a duas, não isomorfas, já que, por exemplo, elas tem dimensão 1 e, portanto, são iguais a seus caracteres. Além disso, com o nosso último resultado, temos que o número  $r$  de representações irredutíveis satisfaz que  $r \leq n_1^2 + \dots + n_r^2 = |G| = n$ , então as representações de  $C_n$  encontradas são todas as representações irredutíveis de  $C_n$ . Com isso, podemos dizer o valor de todos os caracteres irredutíveis de  $C_n$  para cada  $g^j \in G$ , isto é, estamos aptos a montar nossa primeira tabela de caracteres! ( $\zeta = e^{2\pi i/n}$ )

$C_n$	1	$g$	$g^2$	$\dots$	$g^{n-1}$
$\chi_0$	1	1	1		1
$\chi_1$	1	$\zeta$	$\zeta^2$		$\zeta^{n-1}$
$\chi_2$	1	$\zeta^2$	$\zeta^4$		$\zeta^{n-2}$
$\vdots$				$\ddots$	
$\chi_{n-1}$	1	$\zeta^{n-1}$	$\zeta^{n-2}$		$\zeta$

Uma propriedade notável de um caracter  $\chi$  é que  $\forall g, h \in G \chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ . As funções  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfazem essa propriedade são chamadas de *funções centrais*. Repare que o produto interno  $(\cdot, \cdot)$  também está definido para qualquer uma dessas funções. Denotaremos o espaço vetorial das função centrais por  $F_C(G, \mathbb{C})$  e provaremos que ele é, na verdade, gerado pelos caracteres.

**Teorema 3.7.** Sendo  $G$  um grupo, o conjunto dos caracteres irredutíveis de  $G$  é uma base ortonormal do espaço das funções centrais de  $G$ .

*Demonstração.* Represente o conjunto dos caracteres irredutíveis de  $G$  por  $C = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ , onde cada  $\chi_i$  provém de uma representação irredutível  $\rho_i$ . O teorema 3.3 já mostra esse conjunto é ortonormal e, portanto, linearmente independente. Assim, só falta mostrar que eles geram o conjunto  $F_C(G, \mathbb{C})$ .

Primeiramente, repare que, se existisse  $f \in F_C(G, \mathbb{C})$  que não fosse combinação linear de caracteres irredutíveis, poderíamos construir  $g = f - \sum_i (f, \chi_i) \chi_i$ , de modo que  $g$  seria ortogonal a todos

os caracteres irredutíveis e  $g$  não seria gerada por eles. Desse modo, o teorema pode ser concluído se provarmos que a única função central ortogonal a todos os  $\chi_i \in C$  é a função nula. É o que faremos.

Seja  $f \in F_C(G, \mathbb{C})$  ortogonal a todo caracter e  $\rho$  a representação regular de  $G$ , defina  $\rho^f = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$ . Sabemos pelo Teorema de Maschke, que  $\rho$  pode ser decomposta como soma das representações irredutíveis  $\rho_i$ . Sendo  $h \in G$  arbitrário, analisemos  $\rho_i^f$ :

$$\rho_i(h)\rho_i^f\rho_i(h)^{-1} = \sum_{g \in G} f(g)\rho_i(h)\rho_i(g)\rho_i(h^{-1}) = \sum_{g \in G} f(hgh^{-1})\rho_i(hgh^{-1}) = \rho_i^f.$$

Isso nos mostra que, para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\rho_i^f$  é morfismo de representações, então, por Schur, existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  (possivelmente nulo) tal que  $\rho_i^f = \lambda_i \text{Id}$ . Podemos escrever  $\lambda_i$  de um modo conveniente:

$$\text{Tr}(\lambda_i \text{Id}) = \text{Tr}(\rho_i^f) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_i(g) = |G|(f, \overline{\chi_i}) \Rightarrow \lambda_i = \frac{|G|}{n_i}(f, \overline{\chi_i}),$$

onde  $n_i$  é a dimensão da representação  $\rho_i$ . Assim, pela nossa suposição sobre  $f$ , temos que, para todo  $i$ ,  $\lambda_i = 0$  e, portanto,  $\rho^f = n_1\rho_1 + \dots + n_r\rho_r = 0$ .

Para concluirmos que  $f = 0$ , basta reparar na ação de  $\rho^f$  no elemento neutro  $1 \in \mathbb{C}[G]$ :

$$0 = \rho_f(1) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)(1) = \sum_{g \in G} f(g)g \in \mathbb{C}[G].$$

Por definição, temos que  $G \subseteq \mathbb{C}[G]$  é l.i. (de fato,  $G$  é a base que gera o espaço  $\mathbb{C}[G]$ ), então  $\forall g \in G$   $f(g) = 0$ . □

Da Teoria de Grupos, lembre que dois elementos  $g, g' \in G$  são ditos *conjugados* se  $\exists h \in G$  tal que  $g = hg'h^{-1}$ . Isso define uma relação de equivalência e as classe de equivalência dessa relação são chamadas de classes de conjugação (ou órbitas). Denotaremos a classe de  $g \in G$  por  $O_g$ .

Com essa nomenclatura, podemos dizer que uma função central é, simplesmente, uma função que é constante em cada classe de conjugação do grupo. Na verdade, podemos definir uma função central simplesmente ao dizer seu valor em cada classe de conjugação. Em outras palavras, sendo  $g_1, \dots, g_r$  representantes das órbitas de  $G$  e definindo

$$f_i(h) = \begin{cases} 1, & \text{se } h \in O_{g_i} \\ 0, & \text{se } h \notin O_{g_i} \end{cases},$$

temos que o conjunto  $\{f_1, \dots, f_r\}$  é uma base do espaço  $F_C(G, \mathbb{C})$  e, portanto, a sua dimensão é igual ao número de classes de conjugação. Ligando essa informação com o teorema, concluímos que:

**Corolário 3.8.** *O número de representações irredutíveis de um grupo (a menos de isomorfismo) é igual à quantidade de suas classes de conjugação.*

Desse modo, se nosso objetivo é conhecer as representações de um grupo, o teorema acima nos alerta para a importância de analisarmos suas classes de conjugação. De fato, com as ferramentas criadas até agora, poderemos classificar representações irredutíveis de uma boa quantidade de grupos.

Assim como feito no último exemplo, quando temos todos os caracteres irredutíveis de um grupo, podemos catalogá-los numa tabela de caracteres, isto é: uma tabela em que cada coluna é associada a uma classe de conjugação, e cada linha a um caracter, de modo que cada janela da tabela é preenchida com o valor do caracter na classe de conjugação especificados pelas linha e coluna da janela. Além disso, é útil também fazer uma linha inicial que apresenta a ordem de cada classe de conjugação. Fazamos mais um exemplo:

**Exemplo 3.2.** Encontremos a tabela de caracteres de  $A_4$ , o grupo, de ordem 12, de permutações pares de 4 elementos. Ele é formado pelos ciclos de ordem 3, como (123), e pelas permutações que são produto de dois ciclos independentes de ordem 2, como (12)(34), e possui 4 classes de conjugação: a trivial {1}, uma de tamanho 3 {(12)(34), (13)(24), (14)(23)} e duas de tamanho 4 {(123), (142), (134), (243)} e {(234), (143), (132), (124)}. Com isso, sabemos que há apenas 4 representações irredutíveis de  $A_4$ .

Uma delas é a trivial e há outras duas de dimensão 1, que podem ser puxadas de  $C_3 \subset A_4$  e foram explicitadas na tabela abaixo, onde  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . Com isso, devemos ter que a dimensão  $n_4$  da quarta representação deve satisfazer  $12 = 1 + 1 + 1 + n_4^2 \Rightarrow n_4 = 3$ . O restante da tabela pode ser completado utilizando a ortonormalidade dos caracteres, do teorema 3.3.

$A_4$	1	(12)(34)	(123)	(132)
$ O_g $	1	3	4	4
$\chi_1$	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	$\omega$	$\omega^2$
$\chi_3$	1	1	$\omega^2$	$\omega$
$\chi_4$	3	-1	0	0

A representação de dimensão 3, cujo caracter é  $\chi_4$ , pode ser visualizada geometricamente, já que  $A_4$  é o grupo de rotações de um tetraedro, o que nos dá a inclusão  $A_4 \hookrightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_3(\mathbb{C})$ . Os detalhes dessa visualização serão feitos na seção 5.2.

Observe que a tabela de caracteres é um bom modo de organização, porque algumas propriedades dos caracteres podem ser ilustrados nela. Por exemplo, o teorema 3.3 é equivalente a dizer que as linhas da tabela são ortonormais e o resultado 3.8 é o mesmo que dizer que ela tem mesmo número de linhas e colunas. Outra propriedade desse tipo é dada a seguir:

**Proposição 3.9** (Ortogonalidade das Colunas). *Sejam  $\chi_1, \dots, \chi_r$  os caracteres irredutíveis de um grupo  $G$ , então:*

$$\sum_{i=1}^r \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} |C_G(g)|, & \text{se } h \text{ e } g \text{ são conjugados} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases},$$

onde  $C_G(g) \doteq \{h \in G : hgh^{-1} = g\}$  é o centralizador do elemento  $g \in G$ , o qual satisfaz a seguinte igualdade:

$$|C_G(g)| = \frac{|G|}{|O_g|}.$$

*Demonstração.* Retome as funções centrais  $f_i$  definidas antes do corolário 3.8 e fixe  $f_i$  e  $g_i$  arbitrariamente. Pelo teorema 3.7, podemos escrevê-la como  $f_i = m_1\chi_1 + \dots + m_r\chi_r$  e, assim, para todo  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$m_j = (f_i, \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_i(g) \overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in O_{g_i}} 1 \cdot \overline{\chi_j(g)} = \frac{|O_{g_i}|}{|G|} \overline{\chi_j(g_i)}.$$

Com isso, chegamos na relação de ortogonalidade entre as colunas da tabelas de caracteres de  $G$ :

$$\sum_{j=1}^r \chi_j(h) \overline{\chi_j(g_i)} = \frac{|G|}{|O_{g_i}|} f_i(h) = \begin{cases} \frac{|G|}{|O_{g_i}|} & , \text{ se } h \in O_{g_i} \\ 0 & , \text{ se } h \notin O_{g_i} \end{cases}.$$

Para finalizar, a igualdade sobre a ordem do centralizador de  $G$  é um resultado básico da teoria de Grupos e pode ser obtida através de uma bijeção entre os elementos da órbita de  $g \in G$  e as classes laterais do centralizador de  $g$ .  $\square$

## 4 Resultados Legais: Divisibilidade e Burnside

Para finalizarmos essa parte, iremos citar outros dois resultados interessantes e apresentar um panorama sobre suas provas. O primeiro deles diz que se uma representação  $V$  de um grupo  $G$  é irredutível, então  $\dim(V)$  divide  $|G|$ . Como pode-se perceber, esse resultado é de grande ajuda quando buscamos encontrar as representações irredutíveis de um grupo, por exemplo, para construirmos sua tabela de caracteres. O segundo resultado é o teorema de Burnside: todo grupo de ordem  $p^a q^b$ , onde  $p$  e  $q$  são primos e  $a, b \in \mathbb{N}$ , é solúvel. Desse modo, fica mais claro porque não existem grupos não-solúveis de ordem menor que 60: sua ordem deve ser divisível por, pelo menos, três números primos (e o caso de ordem 30 pode ser provado separadamente). Repare que seu enunciado não envolve a teoria de representações, mas a primeira demonstração desse fato, feita por William Burnside em 1904 [2, §5.5], a utiliza ostensivamente.

Algo em comum entre esse fatos é que, para prová-los, precisaremos do conceito de *inteiros algébricos*, isto é, números complexos que são raízes de polinômios mônicos com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ . Se os coeficientes estiverem em  $\mathbb{Q}$ , os chamamos simplesmente de *números algébricos*. Além disso, dado um número algébrico  $\alpha$ , dizemos que as raízes do seu polinômio minimal<sup>1</sup> são conjugados a  $\alpha$ . Alguns resultados sobre eles serão sintetizados na proposição a seguir e sua prova pode ser encontrada em [2, §5.2].

**Proposição 4.1.** Denote por  $\mathbb{A}$  o conjunto dos inteiros algébricos:

1. Se um inteiro algébrico é racional, então ele é inteiro. Isto é,  $\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ .
2. Soma e multiplicação de inteiros algébricos são inteiros algébricos, i.e.  $\mathbb{A}$  é um subanel de  $\mathbb{C}$ .
3. Se  $\alpha$  e  $\beta$  são números algébricos, então os números conjugados à soma  $\alpha + \beta$  são da forma  $\alpha' + \beta'$ , onde  $\alpha'$  e  $\beta'$  são conjugados a  $\alpha$  e a  $\beta$  respectivamente.

A demonstração do teorema de divisibilidade se baseia em mostrar que, dada uma representação  $V$  irredutível, o número racional  $|G|/\dim(V)$  é um inteiro algébrico e usar o item 1. da proposição para concluir que  $|G|$  é divisível por  $\dim(V)$ . Um fato mais simples é o de que, usando o corolário 2.4, temos que o valor  $\chi(g)$  de todo caracter é um inteiro algébrico, pois ele é soma de raízes  $|G|$ -ésimas da unidade. Já o resultado da primeira decorre do seguinte

**Teorema 4.2.** Se  $\chi$  é um caracter irredutível e  $g \in G$ , então  $\lambda = \frac{|O_g| \cdot \chi(g)}{\dim(V)}$  é um inteiro algébrico.

*Esboço da demonstração.* Seguiremos o processo de [3, Corollary 22.10]. Primeiramente, note que se  $r = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}[G]$  satisfaz que  $a_g \in \mathbb{Z} \forall g \in G$  e existem  $0 \neq v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  $r \cdot v = \lambda v$ , então  $\lambda$  é um inteiro algébrico.

Por outro lado, sendo  $O_g$  a classe de conjugação de  $g \in G$ , tome a soma dos elementos de  $O_g$ ,

$$\bar{C} = \sum_{g \in O_g} g \in \mathbb{C}[G],$$

e note que  $\bar{C}$  é um elemento central de  $\mathbb{C}[G]$ . Pensando na representação irredutível  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  estendida para  $\rho: \mathbb{C}[G] \rightarrow \text{GL}(V)$ , temos, similarmente ao feito em 2.2, que  $\rho(\bar{C}) = \lambda \text{Id}_V$ . Assim, pelo parágrafo acima (e como  $V \neq \{0\}$ ), temos que  $\lambda$  é um inteiro algébrico.

Para finalizar, basta tomar o traço em ambos os lados e usar que o caracter é constante em  $O_g$ :

$$|O_g| \chi(g) = \sum_{g \in O_g} \chi(g) = \lambda \dim(V) \Rightarrow \lambda = \frac{|O_g| \chi(g)}{\dim(V)}.$$

□

**Corolário 4.3** (Divisibilidade). Se  $V$  é uma representação irredutível de  $G$ , então  $\dim(V)$  divide  $|G|$ .

*Demonstração.* Pela proposição, basta notarmos que  $|G|/\dim(V)$  é um inteiro algébrico: escolhendo representantes  $g_1, \dots, g_k$  para as órbitas de  $G$ , temos que os números abaixo são inteiros algébricos:

$$\frac{|O_{g_i}| \cdot \chi(g_i)}{\dim(V)} \text{ e } \overline{\chi(g_i)}.$$

Logo, temos que a seguinte soma, pela proposição, também é um inteiro algébrico:

$$\sum_{i=1}^k \frac{|O_{g_i}| \cdot \chi(g_i)}{\dim(V)} \cdot \overline{\chi(g_i)} = \frac{1}{\dim(V)} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{|G|}{\dim(V)},$$

onde foi usado 3.3 na última igualdade. □

<sup>1</sup>O polinômio  $p$  de menor grau e com coeficientes racionais tal que  $p(\alpha) = 0$ .

Agora, para provarmos o teorema de Burnside, precisamos de um lema [2, Lemma 5.4.5] sobre inteiros algébricos e, utilizando-o, provaremos um teorema essencial, cuja demonstração é, de fato, uma ponte entre os conceitos da teoria "pura" de Grupos e os das suas representações.

**Lema 4.4.** Se  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  são raízes da unidade tais que  $a = \frac{1}{n}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$  é um inteiro algébrico, então  $a = \epsilon_1 = \dots = \epsilon_n$  ou  $a = 0$ .

**Teorema 4.5.** Se  $G$  é um grupo (finito) com um classe de conjugação de ordem  $p^r$ , onde  $p$  é primo e  $r \geq 1$ , então  $G$  não é simples.

*Demonstração.* Seja  $g \in G$  o elemento tal que  $|O_g| = p^r > 1$  e denote por  $\chi_0, \dots, \chi_k$  os caracteres irredutíveis de  $G$ , onde  $\chi_0$  é o caracter trivial. Pela ortogonalidade das colunas e por  $g \neq 1$ , temos que

$$1 + \sum_{i=1}^k \chi_i(g) \overline{\chi_i(1)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \chi_i(g) \frac{\chi_i(1)}{p} = -\frac{1}{p}.$$

Como  $-1/p$  é um racional não-inteiro, temos que a soma da esquerda não é um inteiro algébrico e, já que  $\chi_i(g)$  é um inteiro algébrico para todo  $i$ , segue que existe  $j \geq 1$  tal que  $\chi_j(1)/p$  não é um inteiro algébrico e  $\chi_j(g) \neq 0$ . Em outras palavras:  $\chi_j(1)$  não é divisível por  $p$ . Como  $|O_g| = p^r$ , isso quer dizer que  $\chi_j(1)$  e  $|O_g|$  são primos entre si e, portanto, existem inteiros  $a$  e  $b$  tais que

$$a|O_g| + b\chi_j(1) = 1 \Rightarrow a \frac{|O_g| \cdot \chi_j(g)}{\chi_j(1)} + b\chi_j(g) = \frac{\chi_j(g)}{\chi_j(1)}.$$

Do teorema 4.2, temos que o lado esquerdo (e, portanto, o lado direito) é um inteiro algébrico. Agora, lembre que  $n = \chi_j(1)$  é a dimensão da  $j$ -ésima representação  $\rho_j$  e que podemos escrever a matriz  $\rho_j(g)$  como uma diagonal cujas entradas são  $n$  raízes  $|G|$ -ésimas da unidade. Desse modo,  $\chi_j(g)$  é uma soma de  $n$  raízes da unidade e, pelo lema acima, segue que todas essas raízes da unidade são iguais. Denotando esse número por  $\lambda$ , isso nos diz que

$$\rho_j(g) = \lambda \text{Id}.$$

Para concluirmos que  $G$  não é simples, isto é, que  $G$  possui um subgrupo normal diferente de  $\{1\}$  e de  $G$ , tome  $K = \ker(\rho_j)$ , de modo que  $K$  é um subgrupo normal de  $G$ . Como  $\rho_j$  não é a representação trivial, vale que  $K \neq G$ . Se  $K \neq \{1\}$ , então  $G$  não é simples. Se  $K = \{1\}$ , então  $\rho_j$  é injetora e, como  $\rho_j(g)$  é elemento central de  $\text{GL}(V)$ , segue que  $g$  é elemento central de  $G$ , ou seja,  $1 \neq g \in Z(G)$ . Além disso, como  $Z(G)$  é subgrupo normal de  $G$  e  $Z(G) \neq G$  (pois  $|O_g| > 1$ ), concluímos novamente que  $G$  não é simples.  $\square$

**Teorema 4.6 (Burnside).** Todo grupo de ordem  $p^a q^b$ , onde  $p$  e  $q$  são primos e  $a, b \in \mathbb{N}$ , é solúvel.

*Demonstração.* Suponha o contrário, isto é, existe um grupo não-solúvel  $G$  de ordem  $p^a q^b \neq 1$ . Se tomarmos tal grupo com a menor ordem possível, podemos assumir que  $G$  é simples e não-abeliano, já que  $G$  possui um subgrupo  $H$  normal, próprio e não-trivial implica que  $G/H$  e  $H$  são grupos de ordem  $p^c q^d < |G|$ , então, pela minimalidade da ordem de  $G$ , teríamos que  $G/H$  e  $H$  são solúveis, o que implica que  $G$  é solúvel (absurdo!).

Por  $G$  não ser abeliano, temos que  $Z(G) \neq G$ , então, por  $G$  ser simples, devemos ter que  $Z(G) = \{1\}$ . Além disso, o último teorema nos diz que as ordens das classes de conjugação de  $G$  não podem ser potências de primo, então  $pq$  deve, com exceção da trivial, dividir a ordem de cada uma das classes de conjugação. Com isso, sendo  $k + 1$  o número de classes de conjugação de  $G$ , existem  $m_i > 0$  tal que

$$p^a q^b = |G| = 1 + \sum_{i=1}^k (pq)^{m_i} \Rightarrow pq \cdot R - p^a q^b = 1, \text{ onde } R \in \mathbb{N}.$$

Os casos em que  $a = 0$  ou  $b = 0$  implicam que  $p^a q^b = 1$  e, para  $a, b > 0$ , segue que  $pq \mid 1$ , isto é,  $p = q = 1$  (absurdos!).  $\square$

## Parte II

# Correspondência de Mckay

## 5 Sólidos Platônicos e suas Simetrias

Antes de estudarmos os subgrupos de  $SU_2(\mathbb{C})$ , iremos identificar de forma geométrica alguns subgrupos de  $SO_3(\mathbb{R})$ . Como  $SO_3(\mathbb{R})$  é o grupo das rotações no espaço euclidiano tridimensional, podemos basear a nossa análise em objetos contidos em  $\mathbb{R}^3$  que preservem certa simetria. E, quando se fala em objetos tridimensionais simétricos, os melhores exemplos que podemos ter em mente são os sólidos platônicos. São cinco: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Esses poliedros são estudados desde os tempos da Grécia Antiga; na verdade, a classificação deles já fora feita por Euclides (c. 325a.C.-265a.C.) no Livro XIII de *Os Elementos*. Além disso, Platão (c.427a.C.-347a.C.) também os citou em seu discurso *Timeu*, onde quatro deles são associados aos elementos da natureza: o cubo à terra, o tetraedro ao fogo, o octaedro ao ar, o icosaedro à água; e o quinto, o dodecaedro, é associado ao universo. Quase 2000 anos depois, J. Kepler (1571-1630) também tentava encontrar harmonia entre a natureza e os sólidos platônicos: inscrevendo os cinco sólidos sucessivamente e intercalando-os com esferas (ver figura 1), ele criou um modelo para o Sistema Solar no qual as órbitas dos seis planetas conhecidos na época respeitavam uma certa proporção com o raio de cada uma das esferas. Para um melhor panorama histórico sobre os sólidos e sua classificação, pode-se consultar [11, Capítulo 2], e, se quiser ler a classificação dada por Euclides, uma possível edição é [12, Livro XIII].

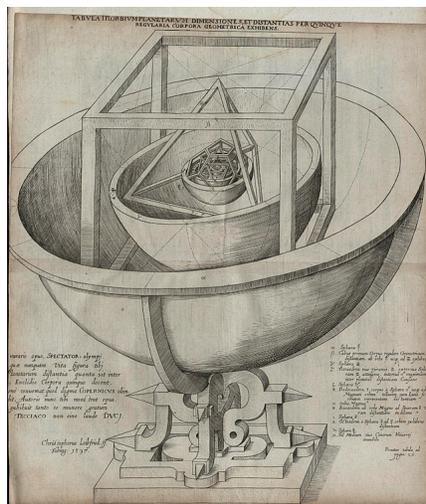


Figura 1: Ilustração do modelo do Sistema Solar de Kepler, de seu livro *Mysterium Cosmographicum*.

Vamos, agora, definir os sólidos platônicos e dar um certo panorama sobre sua classificação.

Primeiramente, o leitor deve ter ideia do que é um poliedro através de diversos exemplos: cubo, pirâmide, prisma, icosaedro, etc. Apesar disso, vamos tentar dar uma definição para eles, tendo consciência de que dificilmente isso irá melhorar a sua visualização. Em linhas gerais, assim como um polígono é uma colagem de segmentos de retas pelas suas pontas de modo que cada ponta é a interseção de exatamente dois segmentos, um poliedro é uma colagem de diversos polígonos pelas suas bordas de modo que cada borda seja a interseção de exatamente dois polígonos. De modo mais metódico, pode-se dizer que o poliedro é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que é interseção de um número finito de semi-espacos. Assim, com essa definição, o cubo seria a interseção de seis semi-espacos, de modo que sejam três pares de semi-espacos com bordas (que são planos) paralelas e que esses pares sejam, da maneira adequada, ortogonais entre si.

De qualquer modo, sabemos que um poliedro possui faces (polígonos), arestas (segmentos de reta) e vértices (pontos) e podem ser caracterizados, em certo sentido, pelo número ou pelo tipo (no caso das faces) de cada um desses elementos. Isto é, se alguém quer explicar o que é um icosaedro,

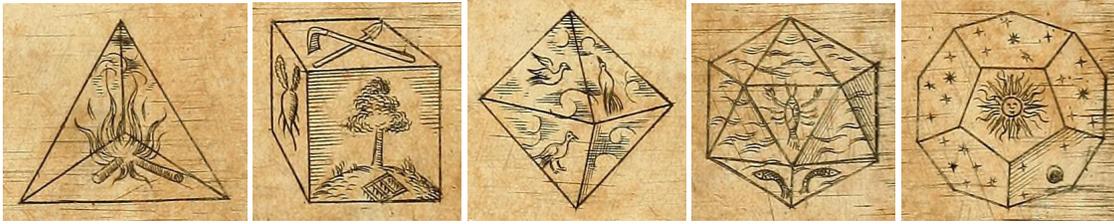


Figura 2: Fogo, Terra, Ar, Água e o Universo.

provavelmente citará que é formado 20 faces triangulares. Agora, pensando em construir poliedros simétricos, dizemos que um poliedro é um *sólido platônico* se for convexo, se todas as suas faces forem polígonos regulares congruentes e se o número de faces que se encontram em cada vértice é o mesmo para todos os vértices.

Assim, se um sólido é formado por polígonos de  $n$  lados e que se encontram  $m$  vezes em cada vértice, podemos analisar quais são os possíveis valores do par ordenado  $(m, n)$ . Como o poliedro é convexo (isto é, os vértices são bicos), temos que, se somarmos os ângulos internos das faces um número  $m$  de vezes, não poderemos ultrapassar  $360^\circ$ . Isto é, como o ângulo interno de um  $n$ -ângono regular é  $\alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ/n$ , devemos ter que

$$360^\circ > m\alpha_n = 180^\circ \left(m - \frac{2m}{n}\right) \Rightarrow \frac{2}{m} > 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Com alguns testes, verifica-se que os únicos valores de  $(m, n)$  que satisfazem a desigualdade são  $(2, n)$ ,  $(m, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 5)$  e  $(5, 3)$ . Apesar de os casos  $(2, n)$  e  $(m, 2)$  não serem de fato poliedros, pois não há polígonos de dois lados ou vértices formados por apenas duas faces, vamos considerá-los como casos degenerados nos quais também poderemos analisar rotações. O objeto dado por  $(2, n)$  é chamado de diedro e o dado por  $(m, 2)$  de hosoedro. Assim como um círculo pode, de certa forma, representar um polígono de dois lados se fixarmos dois pontos diametralmente opostos para serem os vértices e as duas semicircunferências para serem as arestas, a figura abaixo nos mostra uma possível visualização de um diedro e de um hosoedro. No diedro, as duas semi esferas fazem o papel das duas faces (hexagonais no caso da figura) e os pontos no equador o papel dos vértices. No hosoedro, os seis fusos representam as seis faces de duas arestas e os polos norte e sul os vértices.

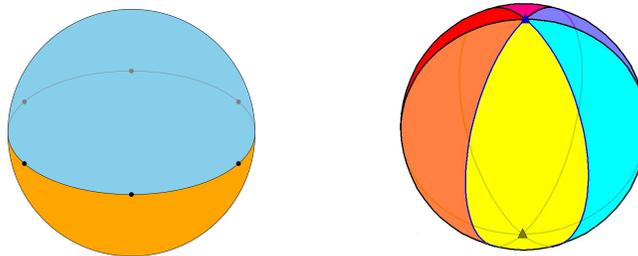


Figura 3: À esquerda, um diedro para  $n = 6$  e, à direita, um hosoedro para  $m = 6$ .

Voltando a falar dos sólidos de fato, verificamos que só há cinco possíveis valores para  $(m, n)$  e, com um pouco de cuidado, nota-se que cada um deles nos dá a construção de um (único) poliedro. A tabela a seguir sintetiza as informações dos sólidos platônicos e dos dois casos degenerados.

$(m,n)$	Poliedro	faces	arestas	vértices
$(2,n)$	diedro	2	n	n
$(m,2)$	hosoedro	m	m	2
$(3,3)$	tetraedro	4	6	4
$(3,4)$	cubo	6	12	8
$(4,3)$	octaedro	8	12	6
$(3,5)$	dodecaedro	12	30	20
$(5,3)$	icosaedro	20	30	12

Por meio da tabela, podemos perceber algumas dualidades: entre o diedro e o hosoedro, entre o cubo e o octaedro e entre o dodecaedro e o icosaedro. Uma forma geométrica de visualizar isso é que, a partir de um desses sólidos, podemos fixar os centros de cada uma de suas faces para serem os vértices de um novo poliedro, o seu dual, cujas arestas são dadas ligando o centro de faces adjacentes. Desse modo, percebe-se que não é por acaso que o número de vértices do cubo é igual à quantidade de faces do octaedro e que o mesmo acontece para o icosaedro e o dodecaedro. Já o tetraedro é o dual de si mesmo.

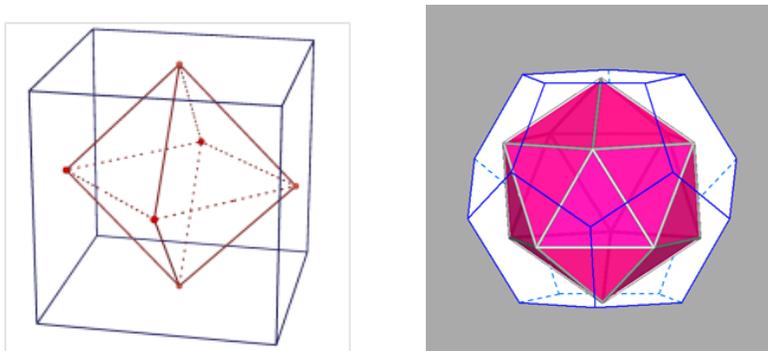


Figura 4: Dualidade entre o cubo e o octaedro e entre o dodecaedro e o icosaedro.

Agora, foquemos nossa atenção em analisar as diferentes rotações dos sólidos. Por isso, apesar de que ilustramos com algumas imagens, tê-los em mãos ou uma boa imagem mental deles facilitará bastante o processo. Alternativamente, pode-se assistir aos vídeos [13] de N. J. Wildberger, nas quais são feitas as diversas rotações dos poliedros.

Para esclarecermos, entende-se por *rotação* um movimento que preserva a estrutura inicial do poliedro, isto é, de modo que a posição final de cada vértice era a posição inicial de algum vértice e duas rotações são consideradas diferentes se elas permutam os vértices de modo distinto. Com isso, pode-se notar que os eixos de uma rotação não trivial intersectam o poliedro sempre em um vértice, no centro de uma face ou no ponto médio de uma aresta, pois, de outro modo, somente seria possível retornar à estrutura inicial com uma rotação de  $360^\circ$ , ou seja, o mesmo que ficar parado.

Nosso objetivo é classificar os grupos de rotação para cada um dos casos da tabela. O primeiro passo para simplificar esse problema é reparar que esse grupo deve ser o mesmo para dois sólidos duais. O motivo para isso é que, denotando-os por  $P$  e  $P'$ , podemos construir  $P'$  como acima e, dessa forma, o eixo que liga dois vértices em  $P$  é o mesmo que liga duas faces em  $P'$  e vice-versa. Assim, os eixos e as ordens de rotação são os mesmo em  $P$  e em  $P'$ .

Com isso, iremos nos restringir somente aos casos do diedro, tetraedro, cubo e dodecaedro.

## 5.1 O grupo de rotações do Diedro:

Um diedro tem a forma  $(2, n)$  para algum  $n \geq 2$ . Voltando à figura 3, note que podemos rotacionar o diedro em relação ao eixo vertical em  $2\pi/n$ , o que corresponde a um elemento de ordem  $n$ . Além disso, temos a rotação de ordem 2, dadas em relação ao eixo que liga dois vértices opostos (se  $n$  for par) ou que liga um vértice e uma aresta oposta (se  $n$  for ímpar). Essa rotação troca os polos norte e sul de lugar.

Nota-se que esses dois tipos de rotação equivalem, no plano, respectivamente, às rotações e às reflexões do  $n$ -ágono. Assim, segue que o grupo de rotações do diedro é, de fato, o grupo diedral  $D_n$ , de ordem  $2n$ .

## 5.2 O grupo de rotações do Tetraedro:

Vamos denotá-lo por  $\mathcal{T}$ . Rotulando os vértices por 1, 2, 3 e 4, temos que cada rotação permuta esses números e, portanto,  $\mathcal{T}$  é subgrupo de  $S_4$ . Vejamos, agora, que  $A_4 \subseteq \mathcal{T}$ , onde  $A_4 \subseteq S_4$  é o subgrupo das permutações pares, formado por dois tipos de elementos: os ciclos de ordem 3, como (123), e as permutações que são produto de dois ciclos independentes de ordem 2, como (12)(34).

- os 3-ciclos podem ser obtidos através da rotação do tetraedro em relação ao eixo que une um vértice à sua face oposta. Por exemplo, a permutação  $(123)$  pode ser visualizada através de um tetraedro em que a face formada pelos vértices 1, 2 e 3 está apoiada numa mesa (horizontal). Com uma rotação de  $120^\circ$  em relação ao eixo vertical, temos a permutação  $(123)$  e, com mais  $120^\circ$ , temos  $(132)$ .
- os produtos de 2-ciclos podem ser obtidos com a rotação em relação ao eixo que une duas arestas opostas. A sequência de figuras 5 ilustra essa rotação.

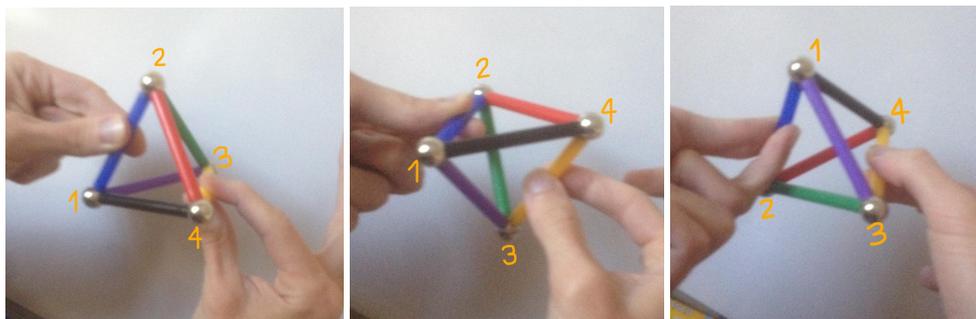


Figura 5: A permutação  $(12)(34) \in \mathcal{T}$ .

Para concluirmos, repare que a permutação  $(12)$  não é possível de ser obtida como rotação do tetraedro, já que, se fixarmos os vértices 3 e 4, a única rotação que poderá ser feita leva o vértices 1 e 2 para as suas posições iniciais, ou seja, é a rotação trivial. Assim,  $A_4 \subseteq \mathcal{T} \subsetneq S_4$  e segue que  $\mathcal{T} = A_4$ , pois  $|S_4|/|A_4| = 2$ .

### 5.3 O grupo de rotações do Cubo:

Vamos denotá-lo por  $\mathcal{O}$ , em referência a seu dual, o octaedro. O cubo possui 8 vértices, então, se seguirmos a mesma ideia que acima, veríamos  $\mathcal{O}$  como subgrupo de  $S_8$ . No entanto, nossa análise pode ser consideravelmente simplificada se notarmos que há outras estruturas mantidas rígidas. No caso do cubo, vamos considerar as diagonais ou, de modo equivalente, as classes de equivalência dos vértices pela relação que identifica dois vértices opostos. Para fixarmos uma enumeração das diagonais, imaginemos um cubo apoiado numa mesa e enumere, de 1 a 4, os vértices da face superior do cubo no sentido anti-horário. Como cada um desses quatro vértices representa (de modo único) uma diagonal, elas também estão enumeradas. Agora, vejamos como cada um dos três tipos de rotação do cubo permuta suas diagonais:

- Em relação ao eixo que liga o centro de duas faces opostas, podemos rotacionar o cubo  $90^\circ$ . Isso corresponde, em termos de permutação das diagonais, aos ciclos de ordem 4. Por exemplo, a permutação  $(1234)$  de nosso cubo pode ser visualizada ao rotacionar  $90^\circ$  em relação ao eixo vertical no sentido anti-horário. Assim, girando mais  $90^\circ$ , obtemos  $(13)(24)$  e, com mais  $90^\circ$ , temos  $(1432)$ .
- Em relação ao eixo que liga dois vértices opostos, com uma rotação de  $120^\circ$ , obtemos os ciclos de ordem 3. Isso acontece, porque o eixo está sobre uma das diagonais e, assim, uma delas é fixada enquanto as outras trocam de lugar. Por exemplo, com o eixo sobre a diagonal 4, obtemos os ciclos  $(123)$  ao girar  $120^\circ$  em um sentido e  $(132)$  ao girar  $120^\circ$  no outro sentido.
- Em relação ao eixo que une o centro de duas arestas opostas, pode-se realizar uma rotação de  $180^\circ$ . Note que esse tipo de rotação fixa duas diagonais e permuta as outras duas, isto é, ela corresponde aos ciclos de ordem 2, como  $(12)$ ,  $(23)$ ,  $\dots$

Com isso, pode-se perceber que cada permutação das 4 diagonais corresponde a uma única rotação do cubo e, portanto, pode-se concluir que  $\mathcal{O} = S_4$ . Um outro modo de visualizar isso é dado ao perceber que podemos inscrever dois tetraedros regulares no cubo, assim como na figura 6. Como cada rotação do tetraedro também é rotação do cubo, temos a inclusão  $A_4 = \mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ . Já uma permutação ímpar em  $\mathcal{O}$  pode ser dada quando trocamos os tetraedros de lugar, o que implica que  $A_4 \subsetneq \mathcal{O} \subseteq S_4$ .

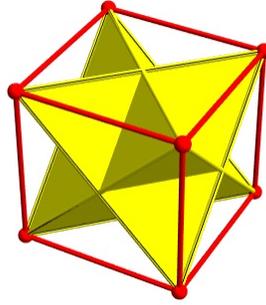


Figura 6: Há 2 tetraedros regulares inscritos no cubo. Figura de Greg Egan [14]

#### 5.4 O grupo de rotações do Dodecaedro:

Em referência ao icosaedro, ele será denotado por  $\mathcal{I}$ . Pode-se ver que as rotações do dodecaedro também são em relação a três eixos somente:

- o que une o centro de duas faces opostas: Como as faces do dodecaedro são pentágonos, essas rotações tem ordem 5 e, como há 6 pares dessas faces, temos que há  $4 \cdot 6 = 24$  rotações não-triviais distintas desse tipo.
- o que une dois vértices opostos: São rotações de ordem 3 e, já que há 10 pares de vértices no dodecaedro, temos  $2 \cdot 10 = 20$  rotações não-triviais desse tipo.
- o que une o centro de duas arestas opostas: Essas rotações tem ordem 2 e, dadas as 30 arestas do dodecaedro, temos mais  $1 \cdot 15 = 15$  dessas rotações.

Somando à rotação trivial, segue que há  $1 + 24 + 20 + 15 = 60$  rotações distintas, isto é,  $|\mathcal{I}| = 60$ . Agora, precisamos decidir a permutação de que estruturas dentro do dodecaedro pode caracterizar as suas rotações. Para isso, através da figura 7, note que há 5 tetraedros regulares dentro do dodecaedro. Pode-se provar que cada rotação do dodecaedro corresponde a uma única permutação desses tetraedros e, portanto, temos a inclusão  $\mathcal{I} \subseteq S_5$ . Agora, fixe um tetraedro, temos que sua rotação também é rotação do dodecaedro e, portanto, temos a inclusão  $A_4 = \mathcal{T} \subset \mathcal{I}$ . Além disso, repare que a rotação de ordem 5 corresponde a uma permutação cíclica dos 5 tetraedros, de modo que  $C_5 = \langle (12345) \rangle \subset \mathcal{I}$ . Assim, o grupo produto  $A_4 \cdot C_5 \subseteq \mathcal{I}$  e, usando o teorema de Lagrange,  $|A_4 \cdot C_5| = 60$ , o que nos força a concluir que  $\mathcal{I} = A_4 \cdot C_5$ , pois a ordem dos dois é a mesma. Mas, também,  $A_4, C_5 \subset A_5$  e  $|A_5| = 60$ , então  $A_5 = A_4 \cdot C_5 = \mathcal{I}$ .

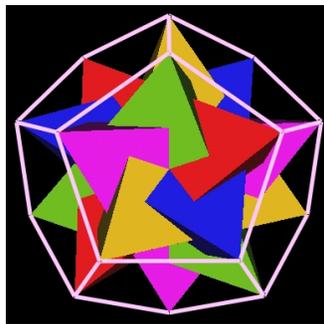


Figura 7: Podemos construir 5 tetraedros regulares dentro do dodecaedro. Figura de [15].

Podemos sintetizar a análise que fizemos dos grupos de rotação por meio da tabela abaixo. Nela denotamos, para cada grupo  $G$ , a ordem das rotações em relação ao eixo que une dois vértices por  $n_1$ , em relação ao que une duas arestas por  $n_2$  e ao que une duas faces por  $n_3$ . Repare que as ordens de rotação do hosoedro, octaedro e icosaedro também podem ser obtidos através da dualidade já citada.

	<b>G</b>	$ G $	<b>n<sub>1</sub></b>	<b>n<sub>2</sub></b>	<b>n<sub>3</sub></b>
Diedro	$D_n$	$2n$	2	2	$n$
Hosoedro	$D_m$	$2m$	$m$	2	2
Tetraedro	$A_4$	12	3	2	3
Cubo	$S_4$	24	3	2	4
Octaedro	$S_4$	24	4	2	3
Dodecaedro	$A_5$	60	3	2	5
Icosaedro	$A_5$	60	5	2	3

Tabela 1: Os grupos de rotação dos sólidos platônicos.

Para finalizarmos a seção, citemos a conexão dos sólidos platônicos com o restante do nosso estudo. Imaginando-os como subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  e colocando os seus centros de massa na origem, temos que cada um dos grupos de rotação obtidos está naturalmente incluído no grupo  $SO_3(\mathbb{R})$ . Na verdade, veremos a seguir que, a menos dos cíclicos, esses são todos os seus possíveis subgrupos finitos.

## 6 Os subgrupos finitos de $SU_2(\mathbb{C})$

Nesta seção, traçaremos a sua relação de 2:1 com  $SO_3(\mathbb{R})$ , dando também uma visualização geométrica dela, e classificaremos os subgrupos finitos de  $SU_2(\mathbb{C})$ .

Primeiramente, lembre que definimos o grupo  $SO_3(\mathbb{R})$  como as rotações do espaço  $\mathbb{R}^3$  e o grupo especial unitário como  $SU_2(\mathbb{C}) = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) : AA^* = \text{Id}\} \subset SL_2(\mathbb{C})$ , onde  $A^*$  denota a matriz transposta conjugada. Este possui uma notável ação na linha projetiva  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[1:z] : z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0:1]\}$ . Lembre que a linha projetiva, em  $\mathbb{C}$ , é formada pelas classes de equivalência da seguinte relação em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ :  $(z_0, z_1) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1) \forall \lambda \in \mathbb{C}$ . Com isso, a informação importante dos elementos de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  são os quocientes e, por isso, denotamos a classe de equivalência de  $(z_0, z_1)$  por  $[z_0 : z_1]$ . Se  $z_0 \neq 0$ , temos que  $[z_0 : z_1] = [1 : \frac{z_1}{z_0}]$  e, se  $z_0 = 0$ , temos que  $[0 : z_1] = [0 : 1]$  representa o ponto no infinito.

Escrevamos a ação (de grupos) de  $SU_2(\mathbb{C})$  (que também é feita por  $GL_2(\mathbb{C})$ ) em  $\mathbb{P}^1 \doteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ :

$$SU_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, [z_0 : z_1] \mapsto [z_0 a + z_1 b : z_0 c + z_1 d]$$

Essa ação é chamada de transformação de Möbius e é usualmente escrita da forma abaixo, usando os representantes usuais:

$$[1 : z] \mapsto \left[1 : \frac{dz + c}{bz + a}\right] \quad \infty = [0 : 1] \mapsto [b : d].$$

Repare que os únicos elementos que agem trivialmente em  $\mathbb{P}^1$  são os da forma  $\lambda \text{Id}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Assim, como estamos em  $SU_2(\mathbb{C})$ , segue que o núcleo da ação é  $\pm \text{Id}$ . Desse modo, se quisermos considerar uma ação fiel, isto é, tal que cada elemento aja de modo diferente, precisamos considerá-la no quociente  $PSU_2(\mathbb{C}) := SU_2(\mathbb{C}) / \{\pm \text{Id}\}$ .

Iremos provar, agora, que há um homomorfismo sobrejetor 2:1 de  $SU_2(\mathbb{C})$  em  $SO_3(\mathbb{R})$  e, para isso, iremos utilizarmos como ferramenta o anel dos quatérnios sobre  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ij = k, i^2 = j^2 = k^2 = -1\}.$$

Repare que, sendo  $w = a + bi \in \mathbb{C}$  e  $z = c + di \in \mathbb{C}$ , podemos escrever o elemento  $a + bi + cj + dk$  por  $w + zj$ . A primeira utilidade dos quatérnios é que podemos identificar  $SU_2(\mathbb{C})$  com os elementos de  $\mathbb{H}$  de módulo 1, isto é, com  $\mathbb{H}_1 \doteq \{w + zj : w, z \in \mathbb{C}, |w|^2 + |z|^2 = 1\}$ . O isomorfismo (de grupos) é dado por

$$\varphi: \mathbb{H}_1 \rightarrow SU_2(\mathbb{C})$$

$$(w + zj) \mapsto \begin{bmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{bmatrix}.$$

A injetividade está clara e contas diretas mostram que a imagem da função está, de fato, em  $SU_2(\mathbb{C})$  e que ela preserva o produto. Verifiquemos a sobrejetividade, isto é, vejamos que qualquer matriz especial unitária pode ser escrita através dos elementos  $z$  e  $w$ . A definição de  $SU_2(\mathbb{C})$  nos dá 4 equações para as entradas da matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1, & a\bar{c} + b\bar{d} = 0 \\ |c|^2 + |d|^2 = 1, & ad - bc = 1 \end{cases}$$

Inicialmente, perceba que a 1ª equações permite concluir que  $|a| = \sin \theta$  e  $|b| = \cos \theta$  p/ algum  $\theta \in \mathbb{R}$ . E, dividindo em casos  $b = 0$  e  $b \neq 0$ , com algumas contas, pode-se concluir  $|b| = |c|$  e  $|a| = |d|$ . Com isso, escrevendo os números na forma trigonométrica, temos, p/ alguns  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ,

$$a = e^{i\alpha} \sin \theta \quad b = e^{i\beta} \cos \theta \quad c = -e^{i\gamma} \cos \theta \quad d = e^{i\delta} \sin \theta.$$

Da 2ª equação, conclui-se que  $\alpha - \gamma = \beta - \delta$  e usando isso e a última equação chega-se que  $\alpha = -\delta$  e  $\beta = -\gamma$ , ou seja,  $a = \bar{d}$  e  $b = -\bar{c}$  e  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

Outra utilidade dos quatérnios é que podemos identificar o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  com o conjunto dos imaginários puros  $\mathbb{H}_p \doteq \{bi + cj + dk : b, c, d \in \mathbb{R}\}$  através de  $i \mapsto (1, 0, 0)$ ,  $j \mapsto (0, 1, 0)$  e  $k \mapsto (0, 0, 1)$ . Desse modo, podemos realizar as transformações em  $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{H}_p$  através da multiplicação nos quatérnios. Na verdade, as rotações em  $\mathbb{R}^3$ , representadas pelo grupo  $SO_3(\mathbb{R})$  são dadas pela seguinte ação dos quatérnios unitários em  $\mathbb{H}_p \cong \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{H}_1 &\rightarrow SO_3(\mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{R}) \\ q &\mapsto q \cdot ( \cdot ) \cdot q^{-1} \end{aligned}$$

Não é difícil de ver que essa função é um homomorfismo de grupos. Ela também é sobrejetora, pois pode-se verificar que escrevendo  $q = \cos \alpha + q_0 \sin \alpha$ , onde  $q_0 \in \mathbb{H}_p$ , vale que  $\phi(q)$  é a rotação de ângulo  $2\alpha$  em relação ao eixo dado por  $q_0$ . Para ilustrar isso, vejamos que o elemento  $\mathbb{H}_1 \ni q_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$  gera a rotação de ângulo  $2\alpha$  em relação ao eixo  $(1, 0, 0)$ : notando que  $q_1^{-1} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ , algumas contas nos dão que, para todo  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} q_1 \cdot (ai + bj + ck) \cdot q_1^{-1} &= ai + (b \cos 2\alpha - c \sin 2\alpha)j + (b \sin 2\alpha + c \cos 2\alpha)k \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1}$$

sendo que a matriz gera uma rotação de  $2\alpha$  em relação a  $(1, 0, 0)$ , pois fixa os elementos da forma  $(a, 0, 0)$ .

Agora, a função não é injetora, pois  $\phi(-q) = \phi(q) \forall q \in \mathbb{H}_1$ . Isso é facilmente visto pela definição da função, mas repare que também é dado pela interpretação acima: escrevendo  $q = \cos \alpha + q_0 \sin \alpha$ , temos que  $-q = \cos(\alpha + \pi) + q_0 \sin(\alpha + \pi)$ , então  $-q$  gera uma rotação de  $2\alpha + 2\pi = 2\alpha$  em relação a eixo  $q_0$ . Na verdade, pode-se provar que este é único caso que foge da injetividade, isto é,  $\ker(\phi) = \{\pm 1\}$ . Visto de outro modo: os únicos elemento dos quatérnios de norma 1 que comutam com todo quatérnio puro são o 1 e o  $-1$ .

Com isso,  $\phi \circ \varphi^{-1}$  estabelece o homomorfismo 2:1 de  $SU_2(\mathbb{C})$  para  $SO_3(\mathbb{R})$ , que será denotado simplesmente por  $\phi$  nas referências futuras. Equivalentemente,  $\phi$  induz o seguinte isomorfismo:

$$\Phi: SU_2(\mathbb{C}) / \{\pm \text{Id}\} = PSU_2(\mathbb{C}) \cong SO_3(\mathbb{R}) \tag{2}$$

Antes de avançarmos para a classificação dos subgrupos finitos de  $SO_3(\mathbb{R})$ , vejamos uma interpretação dessa correspondência do ponto de vista geométrico.

## 6.1 $PSU_2(\mathbb{C})$ : as Rotações da Linha Projetiva

Sabemos que  $SO_3(\mathbb{R})$  representa as rotações do espaço  $\mathbb{R}^3$  e um bom jeito de visualizá-las é pensar nos diferentes modos que podemos rodar a esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Agora, como podemos dar essa mesma interpretação para  $PSU_2(\mathbb{C})$ ?

A parte mais essencial para darmos essa interpretação é perceber que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  também é uma esfera, isto é, que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  e  $S^2$  são topologicamente equivalentes. Explicitamente, um homeomorfismo entre eles é dado através da projeção estereográfica:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\rightarrow S^2 \\ [1 : x + iy] &\mapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\ \infty = [0 : 1] &\mapsto (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Assim, se  $\mathbb{P}^1$  fará o papel da esfera, é de se sugerir que as transformações de Möbius farão o papel das rotações. E é isso que, de fato, acontecerá. Explicitamente, fixe  $A \in \text{PSU}_2(\mathbb{C})$  e chame de  $\omega_A$  a ação de  $A$  em  $\mathbb{P}^1$ , temos que  $\rho_A := p \circ \omega_A \circ p^{-1}$  é uma rotação de  $S^2$ , isto é,  $\rho_A$  é a restrição em  $S^2$  de uma função de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ . O mais notável é que o isomorfismo que construímos acima (sem se preocupar com a geometria) nos permite enxergar isso, pois ele coincide as duas rotações. Não iremos realizar todas as contas para provar isso, mas espero que a verificação de um exemplo seja uma boa ilustração.

Seja  $A = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \in \text{SU}_2(\mathbb{C})$ , que é dada, em  $\mathbb{H}_1$ , por  $q_1 = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . A ação  $\omega_A$  de  $A$  em  $\mathbb{P}^1$  é a seguinte:

$$\begin{aligned} \omega_A: \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ [1 : z] &\mapsto [1 : \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} z] \\ \infty = [0 : 1] &\mapsto [0 : e^{-i\alpha}] = \infty \end{aligned}$$

Repare que apenas os pontos  $[1 : 0] = 0$  e  $\infty$  são fixados e que  $p(0) = (0, 0, -1)$  e  $p(\infty) = (0, 0, 1)$ . Isso nos sugere que  $\rho_A$  fará o papel da rotação de  $S^2$  em relação ao eixo vertical, que liga os pontos  $(0, 0, -1)$  e  $(0, 0, 1)$ . Agora, lembre, de (1), que  $\phi(q_1) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$  gerava uma rotação de  $2\alpha$ . Essa também será a rotação de  $\rho_A$ ! Façamos as contas apenas nos pontos do Equador de  $S^2$  (no qual a 3ª coordenada é zero), já que a função  $p^{-1}$  é mais simples nesse caso:

$$\begin{aligned} S^2 \ni (x, y, 0) &\xrightarrow{p^{-1}} [1 : x + iy] \xrightarrow{\omega_A} \\ &\xrightarrow{\omega_A} [1 : e^{-i2\alpha}(x + iy)] = [1 : (x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha) + i(y \cos 2\alpha - x \sin 2\alpha)] \xrightarrow{p} \\ &\xrightarrow{p} \left( \frac{2(x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha)}{2}, \frac{2(y \cos 2\alpha - x \sin 2\alpha)}{2}, \frac{1 - 1}{2} \right) = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso, a menos de permutação das linhas e de troca do sinal de  $\alpha$ , a matriz obtida aqui é a mesma que a obtida por  $\phi(q_1)$ . Enquanto que esta fixava o eixo determinado por  $i$ , o qual denotamos por  $(1, 0, 0)$ , a rotação  $\rho_A$  fixa o eixo determinado pela reta  $\overline{0\infty}$ , que foi identificada na 3ª coordenada:  $(0, 0, 1)$ . Assim, se desconsiderarmos essas convenções de coordenadas, podemos simplesmente dizer que  $\phi(A)$  e  $\rho_A$  geram a mesma rotação na esfera.

Vejam as matrizes dadas pelos elementos  $q_2 = \cos \alpha + j \sin \alpha \in \mathbb{H}_1$  e  $q_3 = \cos \alpha + k \sin \alpha \in \mathbb{H}_1$ , que são, respectivamente:

$$B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ -i \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que  $\omega_B$  fixa os pontos  $[1 : \pm i]$ , enquanto que  $\phi(q_2)$  fixa os pontos  $\pm j \in \mathbb{H}$ ; ambos os casos identificados por  $(0, \pm 1, 0)$ . Já  $\omega_C$  fixa os pontos  $[1 : \pm 1]$  e  $\phi(q_3)$  fixa  $\pm k$ ; o primeiro denotado por  $(\pm 1, 0, 0)$  e o segundo por  $(0, 0, \pm 1)$ . Contas similares às feitas acima também mostram que  $\rho_B = \phi(q_2)$  e que  $\rho_C = \phi(q_3)$ .

Aqui, também temos que  $A$  e  $-A$  nos dão a mesma rotação, pois elas geram a mesma transformação de Möbius; então, se estamos interessados que cada matriz unitária represente uma única rotação, devemos pensá-las quocientadas por  $\pm \text{Id}$ . Por isso, podemos dizer que  $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$  faz o papel das rotações da linha projetiva complexa. Resumamos a discussão através de um teorema:

**Teorema 6.1.** *O isomorfismo  $\Phi: \text{PSU}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R})$  (2), obtido através dos quatérnios, satisfaz a seguinte propriedade geométrica:  $\forall A \in \text{PSU}_2(\mathbb{C})$ ,  $\Phi(A)$  nos dá a mesma rotação que  $p \circ \omega_A \circ p^{-1}$ , onde  $p$  denota a projeção estereográfica de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  em  $S^2$  e  $\omega_A$  a transformação de Möbius de  $A$  em  $\mathbb{P}^1$ .*

Munidos com a relação obtida, começaremos a nossa classificação. Temos que cada subgrupo  $G$  de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  pode ser levantado para  $\text{SU}_2(\mathbb{C})$  através do homomorfismo  $\phi$ , isto é,  $\phi^{-1}[G]$  é subgrupo de  $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ . Além disso, temos a relação  $|\phi^{-1}[G]| = 2|G|$ . Com isso em mente, vamos restringir, inicialmente, nossa classificação aos grupos de rotação.

## 6.2 Os subgrupos finitos de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$

Seja  $G \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$  um subgrupo finito não-trivial, cada elemento de  $G$  age na esfera  $S^2$  por meio de uma rotação. Denote o conjunto fixado por  $g \in G$  de  $F^g = \{x \in S^2: g \cdot x = x\}$  e, sendo  $F = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} F^g$ , denote o estabilizador de  $x \in F$  por  $G_x = \{g \in G: g \cdot x = x\}$ . Repare que  $G_x \subseteq G$  é um subgrupo cíclico, pois ele é gerado pelo elemento de  $G$  que representa a rotação de menor ângulo em relação ao eixo determinado por  $x$ . Para cada  $g \in G \setminus \{1\}$ , há exatamente dois pontos da esfera que ficam inalterados pela ação de  $g$ : a interseção entre a esfera e o eixo de rotação. Com isso,

$$\sum_{x \in F} |G_x| = |F| + \sum_{g \in G \setminus \{1\}} |F^g| = |F| + (|G| - 1) \cdot 2.$$

Seja  $O_x = \{g \cdot x \in F: g \in G\}$  a órbita de  $x \in F$  e, por  $F$  ser finito, escolha representantes  $x_1, \dots, x_d \in F$  dessas órbitas, de modo que podemos escrever  $F = \bigcup_i O_{x_i}$ . Assim, usando a relação  $|G_x| \cdot |O_x| = |G|$  e que elementos de uma mesma órbita tem estabilizadores de mesma ordem (pois são conjugados), obtemos que

$$\sum_{x \in F} |G_x| = \sum_{i=1}^d |O_{x_i}| \cdot |G_{x_i}| = \sum_{i=1}^d |G| \quad |F| = \sum_{i=1}^d |O_{x_i}| = \sum_{i=1}^d \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$$

Juntando as 3 equações e escrevendo  $|G| = n$  e  $|G_{x_i}| = n_i$ :

$$d \cdot n = 2(n - 1) + \sum_{i=1}^d \frac{n}{n_i} \Rightarrow d + \frac{2}{n} = 2 + \sum_{i=1}^d \frac{1}{n_i}.$$

Vejamos os possíveis valores de  $d$ : já que assumimos que  $G$  tem mais de um elemento, então  $n_i \geq 2 \forall i$  e, portanto,  $d - 2 < \sum_{i=1}^d \frac{1}{n_i} \leq \frac{d}{2}$ . Assim,  $d < 4$  e temos apenas três casos:

$d = 1$  Assim,  $\frac{2}{n} = 1 + \frac{1}{n_1} \Rightarrow n = n_1 = 1$  e, portanto,  $G$  seria o grupo trivial de 1 elemento.

$d = 2$  Assim,  $\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \Rightarrow n = n_1 = n_2$  e, portanto,  $G = G_{x_1} = G_{x_2}$  é o grupo cíclico de ordem  $n$ . Uma realização geométrica desse grupo é dada pelas rotações da base  $n$ -agonal de uma pirâmide regular.

$d = 3$  Assim,  $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1$ . Além disso, da definição de  $F$  (e por  $G$  ser não-trivial nesse caso), temos que todo  $n_i \geq 2$  e, escrevendo  $2 \leq n_3 \leq n_2 \leq n_1$ , segue que  $n_3 = 2$  e  $n_2 \leq 3$ . Usando isso, temos as seguintes possibilidades para  $(n, n_1, n_2, n_3)$ :

$$(2m, m, 2, 2), (12, 3, 3, 2), (24, 4, 3, 2), (60, 5, 3, 2)$$

Esses valores, aliados à tabela 1, nos sugerem que eles representam, respectivamente, os grupos  $D_m$ ,  $A_4$ ,  $S_4$  e  $A_5$ . Na verdade, cada órbita  $O_{x_i}$  corresponde a um conjunto de pontos especiais dos poliedros regulares: o conjunto de vértices, o conjunto de centros das faces ou o de pontos médios das arestas. Para maiores detalhes de como deduzir esses grupos a partir da configuração  $(n, n_1, n_2, n_3)$ , veja [6, Seção 1.1], onde a abordagem é feita em  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ , ao invés de em  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ .

Com isso, finalizamos a nossa classificação primária:

**Teorema 6.2.** *Se  $G$  é um subgrupo finito de  $SO_3(\mathbb{R})$ , então  $G$  é um grupo cíclico  $C_n$ , um diedral  $D_n$ , o de permutações pares de 4 elementos  $A_4$ , o de permutações de 4 elementos  $S_4$  ou o de permutações pares de 5 elementos  $A_5$ .*

Com a seguinte proposição, chegaremos, também, na classificação em  $SU_2(\mathbb{C})$ .

**Proposição 6.3.** *Se  $\Gamma \subset SU_2(\mathbb{C})$  é um subgrupo finito, então  $\Gamma = \phi^{-1}[G]$  para algum subgrupo  $G \subset SO_3(\mathbb{R})$  ou  $\Gamma = C_n$  para algum  $n$  ímpar.*

*Demonstração.* Vamos separar em relação à paridade da ordem de  $\Gamma$ .

Se  $|\Gamma|$  é par, então  $\Gamma$  possui um elemento de ordem 2 e, como a única matriz de ordem 2 e determinante 1 é  $-\text{Id}$ , segue que  $-\text{Id} \in \Gamma$ . Agora, já que  $\phi(\Gamma)$  é subgrupo de  $SO_3(\mathbb{R})$ , vejamos que  $\Gamma = \phi^{-1}[\phi[\Gamma]]$ : a inclusão  $\Gamma \subseteq \phi^{-1}[\phi[\Gamma]]$  vale em geral e é clara pela definição de pré-imagem; para a outra, usemos que  $\ker \phi = \{\pm \text{Id}\}$ :

$$g \in \phi^{-1}[\phi[\Gamma]] \Rightarrow \exists h \in \Gamma \text{ t.q. } \phi(g) = \phi(h) \Rightarrow g = \pm h.$$

Como  $-\text{Id} \in \Gamma$ , temos que, ambos os possíveis valores de  $g$  implicam que  $g \in \Gamma$ .

Para o caso em que  $|\Gamma|$  é ímpar, temos que  $-\text{Id} \notin \Gamma$ , então a restrição  $\phi: \Gamma \rightarrow \phi(\Gamma)$  é injetora e, portanto,  $\Gamma \cong \phi(\Gamma) \subset SO_3(\mathbb{R})$ . Pela nossa classificação, temos que os únicos subgrupos de  $SO_3(\mathbb{R})$  de ordem ímpar são os cíclicos, então  $\Gamma = C_n$  para algum  $n$  ímpar.  $\square$

Com isso, temos a seguinte lista de subgrupos finitos de  $SU_2(\mathbb{C})$ , chamados, com exceção dos cíclicos, de *grupos poliedrais binários*:

- os grupos cíclicos  $C_n$ , de ordem  $n$ . Para  $n = 2k$ , eles são dados por  $\phi^{-1}[C_k]$ .
- os grupos diedrais binários  $D_n^* := \phi^{-1}[D_n]$ , de ordem  $4n$ .
- o grupo tetraédrico binário  $\mathcal{T}^* := \phi^{-1}[A_4]$ , de ordem 24.
- o grupo octaédrico binário  $\mathcal{O}^* := \phi^{-1}[S_4]$ , de ordem 48.
- o grupo icosaédrico binário  $\mathcal{I}^* := \phi^{-1}[A_5]$ , de ordem 120.

## 7 A Correspondência de McKay

Em 1980, John McKay notou, em [9], que cada um dos subgrupos finitos de  $SU_2(\mathbb{C})$  podem, através do conhecimento de suas representações irredutíveis, ser associados a alguns grafos especiais: os chamados diagramas de Dynkin homogêneos<sup>2</sup>. Eles estão intrinsecamente conectados com o estudo de Álgebras de Lie, já que que os diagramas de Dynkin fornecem uma classificação das álgebras de Lie simples. Com isso, alguns conceitos da área, como sistemas de raízes e matrizes de Cartan, serão usados nessa seção.

A correspondência se baseia nas representações irredutíveis de cada subgrupo finito  $\Gamma \subset SU_2(\mathbb{C})$ , então fixemos por  $\{\rho_0, \dots, \rho_r\}$  um conjunto de representantes das representações (em  $\mathbb{C}$ ) irredutíveis de  $\Gamma$ , onde assumimos que  $\rho_0$  é a representação trivial. Temos, também, que a inclusão de  $\Gamma$  em  $SU_2$  nos dá uma representação injetora  $\rho: \Gamma \hookrightarrow SU_2(\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C})$ . Agora, para cada  $i \in \{0, \dots, r\}$ , temos que  $\rho_i \otimes \rho$  também é uma representação de  $\Gamma$ , então, pelo Teorema de Maschke, para todo  $i$  podemos escrever:

$$\rho_i \otimes \rho = \sum_{j=0}^r a_{ij} \rho_j, \text{ onde } a_{ij} \in \mathbb{N}.$$

Denotando os coeficientes por uma matriz  $A(\Gamma) := (a_{ij})_{ij}$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 7.1** (McKay). *Para cada subgrupo finito  $\Gamma \subset SU_2(\mathbb{C})$ , a matriz  $2Id - A(\Gamma) = C(\tilde{\mathfrak{g}})$  é a matriz de Cartan afim de uma álgebra de Lie simples  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A, D$  ou  $E$ . Ou seja, a matriz representa um dos seguintes diagramas de Dynkin estendidos:  $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$  ou  $\tilde{E}_8$ .*

A demonstração desse fato será feita caso-a-caso da seguinte forma: fixado um subgrupo  $\Gamma$  podemos reduzir o problema, através do teorema 3.4, a encontrar os caracteres irredutíveis  $\chi_i$  de  $\Gamma$ . Mais detalhadamente, lembrando que o caracter de  $\rho_i \otimes \rho$  é dado por  $\chi_i \cdot \chi$  (Proposição 3.2), onde  $\chi$  é o caracter de  $\rho$ , basta provar que  $\chi_i \cdot \chi$  satisfaz a relação pedida no teorema para algum dos diagramas de Dynkin.

Também, devemos observar que, fixada uma ordem  $(O_1, \dots, O_n)$  das classes de conjugação de  $\Gamma$  pela tabela de caracteres, escreveremos um caracter como  $\chi = (a_1, \dots, a_n)$ , onde  $a_j$  indica o valor de  $\chi$  na classe de conjugação  $O_j$ . Além disso, escreveremos cada grupo através de geradores e relações. Para alguns casos, podem ser exigidos mais detalhes, que podem ser encontrados em [10, Chapter II §5].

### 7.1 Correspondência de McKay para os grupos cíclicos

Retome a tabela de caracteres de  $C_n = \langle g \rangle$ , feita no exemplo 3.1. Como são  $n$  representações distintas e todas de dimensão 1, temos que  $r = n - 1$  e que  $\chi_i = \rho_i \forall i = 0, \dots, n - 1$ . Além disso, no exemplo 1.3, foram feitas inclusões de  $C_n$  em  $SU_2(\mathbb{C})$ , então fixemos  $\rho$  como a seguir, onde  $\zeta = e^{2\pi i/n}$ :

$$\rho: C_n \rightarrow SU_2(\mathbb{C})$$

$$g^j \mapsto \begin{bmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{-j} \end{bmatrix}$$

Assim, como  $\rho_1(g^j) = \zeta^j$  e  $\rho_{n-1}(g) = \zeta^{(n-1)j} = \zeta^{-j}$ , segue que  $\rho = \rho_1 \oplus \rho_{n-1}$ . Agora, vejamos, para cada  $i = 0, \dots, n - 1$ , o caracter de  $\rho_i \otimes \rho$ :

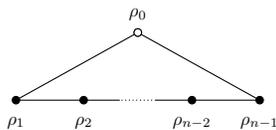
$$\chi_i \cdot \chi(g) = \zeta^i (\zeta + \zeta^{-1}) = \zeta^{i+1} + \zeta^{i-1} = \chi_{i+1}(g) + \chi_{i-1}(g),$$

onde aqui  $i$  pode ser tomado módulo  $n$ , isto é,  $\chi_n = \chi_0$  e  $\chi_{-1} = \chi_{n-1}$ . Com isso, temos as seguintes relações e matriz:

$$\begin{array}{l} \rho_0 \otimes \rho = \rho_1 \oplus \rho_{n-1} \\ \rho_1 \otimes \rho = \rho_0 \oplus \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \otimes \rho = \rho_0 \oplus \rho_{n-2} \end{array} \implies A(C_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<sup>2</sup>Aqui foi utilizado a palavra "homogêneo" para substituir, em inglês, "simply-laced" ou "homogeneous"

Isso significa que, sendo cada  $\rho_i$  um vértice de um grafo, temos que  $\rho_i$  se liga a  $\rho_{i-1}$  e a  $\rho_{i+1}$  e, portanto, obtemos o diagrama de Dynkin estendido  $\widetilde{A}_{n-1}$ :



## 7.2 Correspondência de McKay para os grupos diedrais binários

Lembre que podemos escrever  $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle$ , então  $D_n^* = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ba)^2 = -1 \rangle$ . Pode-se notar que esse grupo tem  $4n$  elementos e possui  $(n+3)$  classes de conjugação distintas, cujos representantes fixaremos para ser  $1, -1, a^k$  ( $p/k = 1, \dots, n-1$ ),  $b$  e  $ab$ . Temos as seguintes classes de conjugação:

$$\begin{aligned} O_1 &= \{1\} & O_{-1} &= \{-1\} & O_{a^k} &= \{a^k, a^{-k}\} \\ O_b &= \{a^{2k}b : k = 0, \dots, n-1\} & O_{ab} &= \{a^{2k+1}b : k = 0, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

A inclusão  $\rho: D_n^* \hookrightarrow \text{SU}_2(\mathbb{C})$  pode ser dada pelas seguintes associações, onde  $\zeta$  denota uma raiz primitiva  $(2n)$ -ésima da unidade:

$$\rho(a) = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix} \quad \rho(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Repare que  $\rho$  é uma representação irredutível de  $D_n^*$ . Se modificarmos a representação um pouco ao substituir  $\zeta$  por  $\zeta^j$  para  $j = 1, \dots, n-1$ , obtemos outras representações irredutíveis, o que, juntando à representação trivial, nos dá  $n$  representações distintas. Os caracteres dessas representações de dimensão 2 foram denotados abaixo por  $\chi_j$ . As outras 3 restantes devem ter dimensão 1 para satisfazer a relação 3.6 e foram explicitadas nas tabelas abaixo.

Como pode ser observado, os valores dos caracteres  $\chi_{n+1}$  e  $\chi_{n+2}$  para  $-1, b$  e  $ab$  são diferentes comparando os casos em que  $n$  é ímpar ou par. Uma das razões disso, já que em ambos os casos  $\chi(a) = -1$ , é dada pela relação:

$$-1 = a^n \Rightarrow \chi(-1) = \chi(a)^n \Rightarrow \chi(b)^2 = \chi(-1) = \chi(a)^n = (-1)^n,$$

onde usamos que os caracteres preservam o produto, pois eles coincidem com a representação quando a dimensão desta é 1.

$D_n^*$	1	-1	$a^k$	$b$	$ab$
$ O_g $	1	1	2	$n$	$n$
$\chi_0$	1	1	1	1	1
$\chi_j$ ( $p/j = 1, \dots, n-1$ )	2	$2(-1)^j$	$\zeta^{jk} + \zeta^{-jk}$	0	0
$\chi_n$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{n+1}$	1	1	$(-1)^k$	1	-1
$\chi_{n+2}$	1	1	$(-1)^k$	-1	1

Tabela 2: Tabela de caracteres do grupo diedral binário  $p/n$  par,  $\zeta = e^{2\pi i/2n}$ .

Denotando o caracter de  $\rho$  por  $\chi$ , temos que  $\chi = \chi_1$ . Agora, só resta ver os produtos!

$$\begin{aligned} \chi_0 \cdot \chi &= \chi = \chi_1 \\ \chi_1 \cdot \chi &= (\chi_1)^2 = (4, 4, \zeta^{2k} + \zeta^{-2k}, 0, 0) = \chi_0 + \chi_n + \chi_2 \end{aligned}$$

Para cada  $j = 2, \dots, n-2$ ,

$$\chi_j \cdot \chi = (4, 4(-1)^{j+1}, \zeta^{(j+1)k} + \zeta^{-(j+1)k} + \zeta^{(j-1)k} + \zeta^{-(j-1)k}, 0, 0) = \chi_{j+1} + \chi_{j-1}$$

$D_n^*$	1	-1	$a^k$	$b$	$ab$
$ O_g $	1	1	2	$n$	$n$
$\chi_0$	1	1	1	1	1
$\chi_j$	2	$2(-1)^j$	$\zeta^{jk} + \zeta^{-jk}$	0	0
$\chi_n$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{n+1}$	1	-1	$(-1)^k$	$i$	$-i$
$\chi_{n+2}$	1	-1	$(-1)^k$	$-i$	$i$

Tabela 3: Tabela de caracteres do grupo diedral binário  $p/n$  par,  $\zeta = e^{2\pi i/2n}$ .

e, usando que  $\zeta^n = \zeta^{-n} = -1$ :

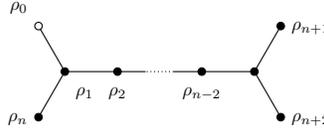
$$\chi_{n-1} \cdot \chi = (4, 4(-1)^n, \zeta^{nk} + \zeta^{(-n-2)k} + \zeta^{(n-2)k} + \zeta^{-nk}, 0, 0) = \chi_{n-2} + \chi_{n+1} + \chi_{n+2}$$

$$\chi_n \cdot \chi = (2, -2, \zeta^k + \zeta^{-k}, 0, 0) = \chi_1$$

$$\chi_{n+1} \cdot \chi = (2, 2(-1)^{n+1}, \zeta^k(\zeta^{-n})^k + \zeta^{-k}(\zeta^n)^k, 0, 0) = \chi_{n-1}$$

$$\chi_{n+2} \cdot \chi = \chi_{n+1} \cdot \chi = \chi_{n-1}$$

Assim, as representações para  $j = 2, \dots, n-2$  nos dá uma cadeia contínua sem bifurcações, enquanto que  $\rho_1$  e  $\rho_{n-1}$  se conectam a essa cadeia e a mais duas representações de dimensão 1. Ou seja,  $D_n^*$  nos fornece o diagrama de Dynkin estendido  $\widetilde{D}_{n+2}$ , onde as pontas são as representações de dimensão 1:



### 7.3 Correspondência de McKay para o grupo tetraédrico binário

Lembre que  $\mathcal{T}^* = \phi^{-1}[A_4]$ . Denotando os geradores de  $A_4$  como  $a = (123)$ ,  $b = (143)$  e, portanto,  $ba = (12)(34)$ , podemos escrever o grupo alternado através de geradores e relações:  $A_4 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ba)^2 = 1 \rangle$ . Desse modo,  $\mathcal{T}^* = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ba)^2 = -1 \rangle$ .

Cada representação de  $A_4$  pode ser puxada para  $\mathcal{T}^*$  através da composição de morfismo  $\mathcal{T}^* \xrightarrow{\phi} A_4 \xrightarrow{\rho} GL(V)$ . Assim, podemos puxar 4 representações irredutíveis, encontradas no exemplo 3.2: denote por  $\rho_0$  a representação trivial, por  $\rho_1$  e  $\rho_2$  as de dimensão 1 e por  $\rho_3$  a de dimensão 3. Além dessas, pode-se verificar que a inclusão  $\rho: \mathcal{T}^* \hookrightarrow \text{SU}_2(\mathbb{C})$  dada pelas relações a seguir também é irredutível:

$$\rho(a) = \frac{1}{1-i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad \rho(b) = \frac{1}{1-i} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(ba) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

onde pode-se perceber que as duas matrizes da esquerda são, de fato, unitárias escrevendo  $(1-i)^{-1} = \frac{1}{2}(1+i)$ . Com essa representação, podemos construir outras duas através do produto tensorial com  $\rho_1$  e com  $\rho_2$ . Explicitamente, temos mais três irredutíveis:  $\rho_4 = \rho$ ,  $\rho_5 = \rho_1 \otimes \rho$  e  $\rho_6 = \rho_2 \otimes \rho$ . Além disso, pela relação 3.6, nota-se que nossa lista está completa, pois  $24 = |\mathcal{T}^*| = 1 + 1 + 1 + 9 + 4 + 4 + 4$ .

Com isso e com o resultado 3.8, conclui-se que a quantidade de classes de conjugação de  $\mathcal{T}^*$  também é 7. Para analisarmos quem são elas, lembre que  $A_4$  possui, além da classe do elemento neutro, uma classe de tamanho 3, representada por  $ba$ , e duas de tamanho 4, representadas por  $a$  e por  $b$ . Com isso, temos a equação de classes de conjugação  $|A_4| = 1 + 3 + 4 + 4$ . A equação do grupo binário é dada por  $|\mathcal{T}^*| = 1 + 1 + 6 + 4 + 4 + 4 + 4$ . Temos:

- duas classes unitárias:  $\{1\}$  e  $\{-1\}$ .
- uma de tamanho 6 formada pelos elementos de ordem 4 e representada por  $ba$ .
- duas de tamanho 4 formadas por elementos de ordem 6 e representadas por  $a$  e  $b$ .

$\mathcal{T}^*$	1	-1	$ba$	$a$	$b$	$-a$	$-b$
$ O_9 $	1	1	6	4	4	4	4
$\chi_0$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1$	1	1	1	$\omega$	$\omega^2$	$\omega$	$\omega^2$
$\chi_2$	1	1	1	$\omega^2$	$\omega$	$\omega^2$	$\omega$
$\chi_3$	3	3	-1	0	0	0	0
$\chi_4$	2	-2	0	1	1	-1	-1
$\chi_5$	2	-2	0	$\omega$	$\omega^2$	$-\omega$	$-\omega^2$
$\chi_6$	2	-2	0	$\omega^2$	$\omega$	$-\omega^2$	$-\omega$

Tabela 4: Tabela de caracteres do grupo tetraédrico binário,  $\omega = e^{2\pi i/3}$ .

- duas de tamanho 4 formadas por elementos de ordem 3 e representadas por  $-a$  e  $-b$ .

Assim, com mais algumas contas, pode-se completar a tabela:

Analiseemos, agora, os produtos de representações. Da definição de  $\rho_4, \rho_5$  e  $\rho_6$ , já temos que

$$\rho_0 \otimes \rho = \rho = \rho_4$$

$$\rho_1 \otimes \rho = \rho_5$$

$$\rho_2 \otimes \rho = \rho_6.$$

Para as outras, percebendo que  $\chi = \chi_4$  e que  $0 = 1 + \omega + \omega^2$ , utilizemos os caracteres:

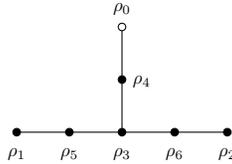
$$\chi_3 \cdot \chi = (6, -6, 0, 0, 0, 0, 0) = \chi_4 + \chi_5 + \chi_6$$

$$\chi_4 \cdot \chi = (4, 4, 0, 1, 1, 1, 1) = \chi_0 + \chi_3$$

$$\chi_5 \cdot \chi = (4, 4, 0, \omega, \omega^2, \omega, \omega^2) = \chi_1 + \chi_3$$

$$\chi_6 \cdot \chi = (4, 4, 0, \omega^2, \omega, \omega^2, \omega) = \chi_2 + \chi_3$$

Logo, a representação de dimensão 3 se conecta com as três de dimensão 2, as quais, por sua vez, se conectam a uma de dimensão 1. Estamos nos referindo ao digrama de Dynkin estendido  $\widetilde{E}_6$ :



## 7.4 Correspondência de McKay para o grupo octaédrico binário

Lembre que  $\mathcal{O}^* = \phi^{-1}[S_4]$ . Denotando os geradores de  $S_4$  como  $a = (1234)$ ,  $b = (132)$  e, portanto,  $ab = (14)$ , podemos escrever o grupo de permutações através de geradores e relações:  $S_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$ . Desse modo,  $\mathcal{O}^* = \langle a, b \mid a^4 = b^3 = (ab)^2 = -1 \rangle$ .

A inclusão  $\rho: \mathcal{O}^* \hookrightarrow \text{SU}_2(\mathbb{C})$  pode ser dada pelas seguintes associações, onde  $\epsilon = e^{\pi/4}$ :

$$\rho(a) = \begin{bmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad \rho(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \epsilon^{-1} & \epsilon^{-1} \\ -\epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \quad \rho(ab) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Pode-se provar, também, que essa representação é irredutível. Agora, apenas escreveremos a tabela de caracteres e maiores detalhes sobre ela e as classes de conjugação de  $\mathcal{O}$  podem ser encontrados em [7, Seções A.5.2-A.5.3].

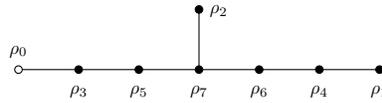
$\mathcal{O}^*$	1	-1	$ab$	$a^2$	$b^2$	$b$	$a$	$a^3$
$ O_g $	1	1	12	6	8	8	6	6
$\chi_0$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1$	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
$\chi_2$	2	2	0	2	-1	-1	0	0
$\chi_3$	2	-2	0	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\chi_4$	2	-2	0	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\chi_5$	3	3	-1	-1	0	0	1	1
$\chi_6$	3	3	1	-1	0	0	-1	-1
$\chi_7$	4	-4	0	0	1	-1	0	0

Tabela 5: Tabela de caracteres do grupo octaédrico binário.

Perceba que  $\chi = \chi_3$  e vejamos os produtos:

$$\begin{aligned}
\chi_0 \cdot \chi &= \chi_3 \\
\chi_1 \cdot \chi &= \chi_4 \\
\chi_2 \cdot \chi &= \chi_7 \\
\chi_3 \cdot \chi &= (4, 4, 0, 0, 1, 1, 2, 2) = \chi_0 + \chi_5 \\
\chi_4 \cdot \chi &= (4, 4, 0, 0, 1, 1, -2, -2) = \chi_1 + \chi_6 \\
\chi_5 \cdot \chi &= (6, -6, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \chi_3 + \chi_7 \\
\chi_6 \cdot \chi &= (6, -6, 0, 0, 0, 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \chi_4 + \chi_7 \\
\chi_7 \cdot \chi &= (8, 8, 0, 0, -1, -1, 0, 0) = \chi_2 + \chi_5 + \chi_6
\end{aligned}$$

Com isso, novamente a representação de maior dimensão, no caso 4, é a única que possui três conexões: duas representações de dimensão três e uma de dimensão 2. E as representações de dimensão 1 (e uma de dimensão 2) só possuem uma conexão, isto é, são as pontas. Temos, desse modo, o diagrama de Dynkin estendido  $\widetilde{E}_7$ :



## 7.5 Correspondência de McKay para o grupo icosaédrico binário

Lembre que  $\mathcal{I}^* = \phi^{-1}[A_5]$ . Denotando os geradores de  $A_5$  como  $a = (12345)$ ,  $b = (254)$  e, portanto,  $ab = (12)(34)$ , podemos escrever através de geradores e relações:  $A_5 = \langle a, b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$ . Desse modo,  $\mathcal{I}^* = \langle a, b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2 = -1 \rangle$ .

Tendo como referência [7, Seção A.6.3], escrevemos abaixo a tabela de caracteres de  $\mathcal{I}^*$ . Alguns detalhes de como obtê-la estão contidos em [6, Example 5.2.4].

Nesse caso, a representação-inclusão em  $SU_2(\mathbb{C})$  também pode ser escolhida como uma das de dimensão 2 incluídas na tabela. Assim, fixemos seu caracter como sendo  $\chi = \chi_2$  e estabeleçamos as relações: (note que  $\alpha\beta = -1$ ,  $\alpha^2 = 1 + \alpha$ ,  $\beta^2 = 1 + \beta$ )

$$\begin{aligned}
\chi_0 \cdot \chi &= \chi_2 \\
\chi_1 \cdot \chi &= \chi_6 \\
\chi_2 \cdot \chi &= (4, 4, 0, 1, 1, \alpha^2, \beta^2, \beta^2, \alpha^2) = \chi_0 + \chi_4 \\
\chi_3 \cdot \chi &= (6, -6, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1) = \chi_8 \\
\chi_4 \cdot \chi &= (6, -6, 0, 0, 0, -\alpha^2, -\beta^2, \beta^2, \alpha^2) = \chi_2 + \chi_5 \\
\chi_5 \cdot \chi &= (8, 8, 0, -1, -1, \alpha, \beta, \beta, \alpha) = \chi_4 + \chi_7
\end{aligned}$$

$\mathcal{I}^*$	1	-1	$ab$	$b^2$	$b$	$a^2$	$a^4$	$a$	$a^3$
$ O_g $	1	1	30	20	20	12	12	12	12
$\chi_0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1$	2	-2	0	-1	1	$-\beta$	$-\alpha$	$\alpha$	$\beta$
$\chi_2$	2	-2	0	-1	1	$-\alpha$	$-\beta$	$\beta$	$\alpha$
$\chi_3$	3	3	-1	0	0	$\beta$	$\alpha$	$\alpha$	$\beta$
$\chi_4$	3	3	-1	0	0	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	$\alpha$
$\chi_5$	4	-4	0	1	-1	-1	-1	1	1
$\chi_6$	4	4	0	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_7$	5	5	1	-1	-1	0	0	0	0
$\chi_8$	6	-6	0	0	0	1	1	-1	-1

Tabela 6: Tabela de caracteres do grupo icosaédrico binário,  $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ ,  $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ .

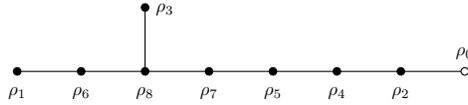
E, usando as igualdades  $\beta = 1 - \alpha$  e que  $-\alpha = -1 + \beta$ :

$$\chi_6 \cdot \chi = (8, -8, 0, -1, 1, \alpha, \beta, -\beta, -\alpha) = \chi_1 + \chi_8$$

$$\chi_7 \cdot \chi = (10, -10, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0) = \chi_5 + \chi_8$$

$$\chi_8 \cdot \chi = (12, 12, 0, 0, 0, -\alpha, -\beta, -\beta, -\alpha) = \chi_3 + \chi_6 + \chi_7$$

Desse modo, obtemos, enfim, o diagrama de Dynkin estendido  $\widetilde{E}_8$ , cujo vértice central é a representação de maior dimensão:



## 7.6 Uma conexão com as Álgebras de Lie

Agora que finalizamos todos os casos, vamos estabelecer uma conexão, de forma geral, entre as representações  $\rho_i$  dos subgrupos  $\Gamma$  e a estrutura das álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  associadas aos diagramas de Dynkin acima. Mais precisamente, entre as dimensões de  $\rho_i$  e os sistemas de raízes de  $\mathfrak{g}$ .

Inicialmente, lembre (ou veja [8, Chapter I-III]) que, sendo  $\mathfrak{g}$  um álgebra de Lie (sobre  $\mathbb{C}$ ) simples de dimensão finita e  $\mathfrak{h}$  sua subálgebra de Cartan, pode-se construir o seu sistema de raízes  $\Delta$ , que é subconjunto do dual  $\mathfrak{h}^*$ , e muni-lo com uma forma bilinear simétrica e não-degenerada  $(\cdot, \cdot)$ . Com uma certa escolha, pode-se definir as raízes positivas e, dentro delas, extrair as intituladas raízes simples, de modo que toda raiz positiva é soma de raízes simples. Escrevemos o conjunto destas como:

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset \mathfrak{h}^*,$$

onde pode-se provar que  $\Pi$  é uma base de  $\mathfrak{h}^*$  e o número  $r = \dim(\mathfrak{h})$  é chamado de rank de  $\mathfrak{g}$ .

Podemos associar a essa álgebra de Lie a denominada álgebra de Lie de Kac-Moody, denotada por  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Sua subálgebra de Cartan  $\tilde{\mathfrak{h}}$  tem dimensão  $r + 1$ , estendendo  $\Pi$  para ser o conjunto de raízes simples  $\tilde{\Pi} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_r\}$  e estendendo  $(\cdot, \cdot)$  do seguinte modo:

$$(\alpha_i, \alpha_0) = (\alpha_0, \alpha_i) = (-\psi, \alpha_i) \text{ e } (\alpha_0, \alpha_0) = (\psi, \psi),$$

onde  $\psi$  é a raiz positiva de maior módulo. Desse modo,  $(\cdot, \cdot)$  continua sendo uma forma bilinear simétrica, porém se torna degenerada, já que  $(\alpha_0 + \psi, \alpha_i) = 0 \forall i = 0, \dots, r$ . A matriz de Cartan de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  é definida como:

$$[C(\tilde{\mathfrak{g}})]_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

A essa matriz associamos os diagramas de Dynkin da seguinte maneira<sup>3</sup>: cada raiz simples corresponde a um vértice do grafo e dois vértices distintos  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  são conectados se, e só se,  $[C(\tilde{\mathfrak{g}})]_{ij} = -1$ .

<sup>3</sup>Para esclarecer, essa matriz é formada apenas por 2's na diagonal e as outras entradas são 0 ou -1

Assim, se  $\tilde{\mathfrak{g}}$  forma, do modo acima, o mesmo grafo que é formado por  $\Gamma \subset \text{SU}_2(\mathbb{C})$  através da correspondência de McKay, temos estabelecida uma bijeção  $\rho_i \mapsto \alpha_i$  entre as representações irredutíveis de  $\Gamma$  e as raízes simples de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Repare que a raiz adicional  $\alpha_0$  corresponde à representação trivial  $\rho_0$ .

Agora, poderemos estabelecer a conexão desejada.

**Lema 7.2.** *Considerando a  $i$ -ésima coluna da tabela de caracteres de  $\Gamma$  como um vetor  $v := (\chi_k(x_i))_k$ , vale que  $v$  é autovetor da matriz  $A(\Gamma)$  com autovalor  $\chi(x_i)$ .*

*Demonstração.* Da definição de  $A(\Gamma)$ , vale que  $\chi \cdot \chi_i = \sum_j A(\Gamma)_{ij} \chi_j$ . Assim,

$$\chi(x_i) \cdot v = (\chi \cdot \chi_k(x_i))_k = \left( \sum_j A(\Gamma)_{kj} \chi_j(x_i) \right)_k = A(\Gamma) \cdot v.$$

□

**Proposição 7.3.** *Usando a notação acima, podemos decompor o seguinte elemento de  $\mathfrak{h}^*$  como  $\alpha_0 + \psi = \sum_{i=0}^r d_i \alpha_i$  e vale que  $\forall i \in \{0, \dots, r\}$ ,  $\dim(\rho_i) = d_i$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, vale essa decomposição, pois toda raiz positiva de  $\mathfrak{g}$  é soma de raízes simples, isto é,  $\psi = \sum_{i=1}^r d_i \alpha_i$ ,  $d_i \in \mathbb{N}$  e, portanto,  $\alpha_0 + \psi = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r d_i \alpha_i$ . Com isso, já temos que  $d_0 = 1 = \dim(\rho_0)$ .

Agora, escrevendo a 1ª coluna da tabela de caracteres como  $e := (\dim(\rho_j))_j = (\chi_j(\text{Id}))_k$  e usando o lema, segue que  $A(\Gamma) \cdot e = \chi(\text{Id})e = 2e$ , pois  $\chi(\text{Id}) = \text{Tr}[\rho(\text{Id})] = \text{Tr}[\text{Id}_2]$ . Logo,  $C(\tilde{\mathfrak{g}}) \cdot e = (2\text{Id} - A(\Gamma)) \cdot e = 0$ .

Vejamus que o vetor  $d := (d_i)_i$  também está no núcleo de  $C(\tilde{\mathfrak{g}})$ . Como  $\alpha_0 + \psi$  é ortogonal a toda raiz simples, então, para todo  $j = 0, \dots, r$ :

$$(\alpha_j, \alpha_0 + \psi) = 0 \Rightarrow \frac{2(\alpha_j, \sum_{i=0}^r d_i \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^r \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \cdot d_i = \sum_{i=0}^r [C(\tilde{\mathfrak{g}})]_{ji} \cdot d_i = 0. \quad (3)$$

Portanto,  $C(\tilde{\mathfrak{g}}) \cdot d = 0$ .

Para finalizarmos, deve-se lembrar que  $C(\tilde{\mathfrak{g}})$  tem posto  $r$ , pois ela contém a matriz  $r \times r$  não-singular  $C(\mathfrak{g})$  como menor principal. Com isso, o núcleo de  $C(\tilde{\mathfrak{g}})$  tem dimensão 1 e, portanto,  $d = \lambda e$  p/ algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ . O fato de que  $d_0 = 1 = \dim(\rho_0)$  nos força que  $\lambda = 1$  e conclui-se a demonstração. □

Um resultado que poderia ser visualizado quando fizemos todos os casos da correspondência pode, também, ser retirado da igualdade (3). Denotando por  $N(j)$  a vizinhança do vértice  $\alpha_j$  no grafo, isto é, os índices dos vértices conectados a  $\alpha_j$ , temos que:

$$\sum_{i=0}^r [2\text{Id} - A(\Gamma)]_{ji} \cdot d_i = 0 \Rightarrow 2d_j = \sum_{i=0}^r [A(\Gamma)]_{ji} \cdot d_i = \sum_{i \in N(j)} d_i$$

Esse resultado mostra que não é à toa que, as representações de dimensão 1 estão conectadas a exatamente duas de dimensão 1 (no caso cíclico) ou somente a uma de dimensão 2 (nos demais casos) e que, se uma representação está conectada a exatamente duas outras, sua dimensão é a média da dimensão de suas vizinhas.

## 8 Resolução de Singularidades Kleinianas

Na seção anterior, estabelecemos a correspondência entre os diagramas de Dynkin e os subgrupos finitos unitários utilizando suas representações irredutíveis. Podemos estabelecer isso de outro modo: através da resolução de singularidades nas variedades das órbitas de cada grupo. Na verdade, esse tipo da conexão é anterior, cronologicamente, ao feito na última seção, já que, por exemplo, Patrick Du Val já a conhecia em 1934 [16].

Primeiramente, vamos entender porque, dado um subgrupo  $\Gamma$  de  $SU_2(\mathbb{C})$ , o seu conjunto das órbitas  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  pode ser considerado como uma variedade algébrica. Para tanto, serão necessários alguns conceitos de Geometria Algébrica. Alguns deles serão dados no decorrer do texto, mas, para maiores detalhes e um amplo entedimento, consulte [17, Seção 2.3] ou [18].

Como nosso estudo foi feito sobre o corpo  $\mathbb{C}$ , todas as definições dadas aqui serão feitas sobre espaços (afins) complexos.

- Definição 8.1.**
1. Um subconjunto  $X \subseteq \mathbb{C}^k$  é uma *variedade algébrica afim* se existe um subconjunto  $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  tal que  $X = V(I) := \{P \in \mathbb{C}^k \mid f(P) = 0 \forall f \in I\}$ , ou seja,  $X$  é conjunto dos zeros comuns dos elementos de  $I$ .
  2. Um *morfismo entre as variedades algébricas afins*  $X \subseteq \mathbb{C}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{C}^m$  é uma função  $f: X \rightarrow Y$  que é a restrição de uma função polinomial entre  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{C}^m$ .
  3. Um variedade algébrica afim  $X \subseteq \mathbb{C}^k$  é dita *irredutível* se ela não pode ser decomposta como união de duas variedades não-vazias, o que é equivalente a dizer que o ideal de  $X$ , definido por  $I(X) := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] \mid f(P) = 0 \forall P \in X\}$ , é primo.
  4. Uma *variedade algébrica projetiva* é um subconjunto  $X \subseteq \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$  definido como os zeros de polinômios homogêneos. Isto é,

$$X = \{(a_0 : \dots : a_k) \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \mid f(a_0, \dots, a_k) = 0 \text{ p/ todo elemento homogêneo } f \in I\},$$

onde  $I$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_k]$  gerado por polinômios homogêneos.

Fixemos  $\Gamma \subset SU_2(\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C})$ . O conjunto das órbitas de  $\Gamma$  está intimamente ligado à álgebra de polinômios dada a seguir. Cada elemento de  $\Gamma$  é uma transformação linear de  $\mathbb{C}^2$ , portanto pode-se estabelecer a seguinte ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{C}[z_1, z_2]$  pela direita:

$$(f \cdot \gamma)(z) = f(\gamma \cdot z), \quad z \in \mathbb{C}^2, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Com ela, podemos definir a subálgebra formada pelos polinômios que são  $\Gamma$ -invariantes:

$$\mathbb{C}[z_1, z_2]^\Gamma := \{f \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid f \cdot \gamma = f \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

**Teorema 8.1.** *Dado um subgrupo finito  $\Gamma \subset SU_2(\mathbb{C})$ , a álgebra  $\mathbb{C}[z_1, z_2]^\Gamma$  é gerada por, no mínimo, 3 polinômios  $X, Y, Z$  e estes satisfazem uma relação  $R(X, Y, Z)$ , que foi especificada na tabela 7 para cada subgrupo  $\Gamma$ .*

$\Gamma \subset SU_2(\mathbb{C})$	$R(X, Y, Z)$
$C_n$	$X^n + YZ$
$D_n^*$	$X^{n+1} + XY^2 + Z^2$
$\mathcal{T}^*$	$X^4 + Y^3 + Z^2$
$\mathcal{O}^*$	$X^3Y + Y^3 + Z^2$
$\mathcal{I}^*$	$X^5 + Y^3 + Z^2$

Tabela 7: Relações entre os geradores da álgebra de  $\Gamma$ -invariantes.

Esse resultado foi provado por Felix Klein em 1884 em seu livro intitulado *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* <sup>4</sup>. No exemplo abaixo, obteremos os

<sup>4</sup>Uma possível tradução para o inglês pode ser consultada em [19]

geradores no caso mais simples, o cíclico, e, para uma prova em geral, pode-se consultar [10, Chapter II §6-§8]. Outro ponto interessante é que um teorema mais geral e da mesma natureza foi provado por Emmy Noether (veja [20]) em 1915: considerando a ação acima feita por um subgrupo  $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$  em  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , vale que  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$  é finitamente gerada sempre que  $G$  é finito. Uma prova (moderna) disso pode ser encontrada em [10, Chapter II §9].

**Exemplo 8.1.** Vejamos quem são os invariantes em relação ao grupo cíclico  $C_n$ . Lembre que o gerador de  $C_n \subset \text{SU}_2(\mathbb{C})$  é dado por

$$\gamma = \begin{bmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{bmatrix},$$

onde  $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ . Assim, pode-se notar que os seguintes polinômios são  $C_n$ -invariantes:

$$X = z_1 z_2, \quad Y = z_1^n, \quad Z = z_2^n.$$

Além disso, eles são geradores de  $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{C_n}$  e satisfazem  $X^n = z_1^n z_2^n = YZ$ . Façamos as contas para ver que  $Y$  é, de fato, invariante:

$$(Y \cdot \gamma)(z_1, z_2) = Y(\zeta_n z_1, \zeta_n^{-1} z_2) = \zeta_n^n z_1^n = z_1^n \Rightarrow Y \cdot \gamma = Y$$

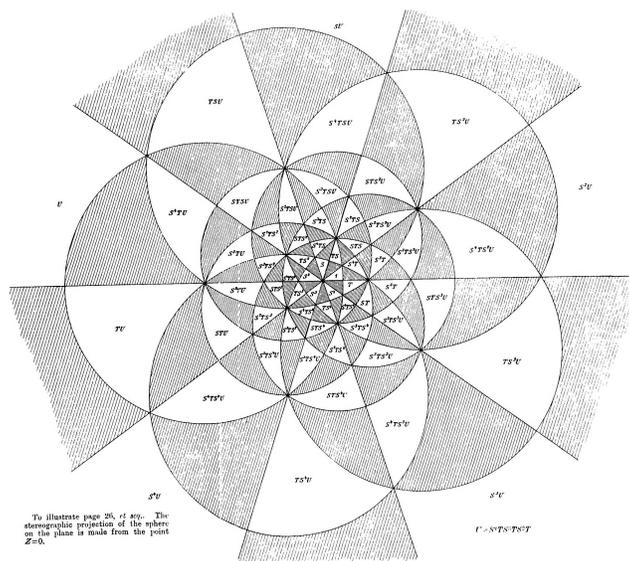
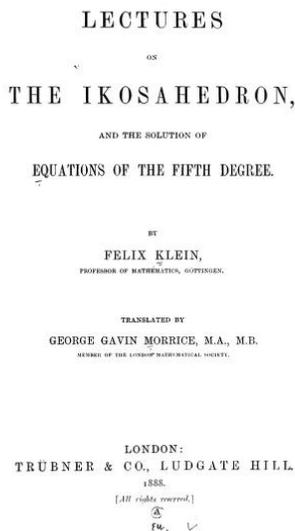


Figura 8: Frontispício e ilustração da tradução de 1888 do livro de F. Klein [19].

Para colocarmos o teorema em perspectiva, considere o seguinte morfismo:

$$F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (z_1, z_2) \mapsto (X(z_1, z_2), Y(z_1, z_2), Z(z_1, z_2))$$

Essa função induz o seu chamado *pullback*:

$$F^*: \mathbb{C}[X, Y, Z] \rightarrow \mathbb{C}[z_1, z_2], \\ p \mapsto p \circ F$$

Perceba que  $\text{Im}(F^*) = \mathbb{C}[z_1, z_2]^\Gamma$ : todo elemento da imagem é dado pela soma e/ou produto dos polinômios  $\Gamma$ -invariantes  $X, Y, Z \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$  e, portanto, é  $\Gamma$ -invariante; para a recíproca, como  $\mathbb{C}[z_1, z_2]^\Gamma$  é gerada pelos  $X, Y, Z$ , basta notar que cada um deles pertence à imagem. Além disso, as relações  $R(X, Y, Z)$  são polinômios irreduzíveis de  $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ , então o ideal  $(R(X, Y, Z))$  é primo e

corresponde ao núcleo<sup>5</sup> de  $F^*$ . Com isso, temos que  $V(R) \subset \mathbb{C}^3$  é uma variedade algébrica irredutível (pois  $I(V(R)) = (R)$ ) e que:

$$C[X, Y, Z] / (R(X, Y, Z)) \cong C[z_1, z_2]^\Gamma.$$

Para estabelecermos a conexão desejada com o conjunto das órbitas de  $\Gamma$ , precisamos de mais alguns resultados, cujas provas podem ser encontradas em [10, Chapter II §9]:

1.  $F(\mathbb{C}^2) = V(R)$ .
2.  $F(z) = F(w) \iff \exists \gamma \in \Gamma \text{ t.q. } z = \gamma \cdot w$ , isto é,  $z$  e  $w$  pertencem à mesma órbita de  $\Gamma$ .

Com isso,  $F$  induz uma bijeção  $\mathbb{C}^2/\Gamma \cong V(R)$  e, por isso, chamamos  $V(R)$  de *variedade de órbitas* de  $\Gamma$ . Como abuso de notação, também iremos denotá-las por  $\mathbb{C}^2/\Gamma$ . Esses serão os objetos sobre os quais iremos realizar o estudo dessa seção: a saber, a resolução de suas singularidades.

Intuitivamente, singularidades são dadas por pontas, cúspides e interseções, ou seja, são pontos em que há uma mudança brusca de uma linha ou do espaço em questão, como mostra a figura 9. Para uma definição formal e no contexto de Geometria Algébrica, consulte [18, Seção 6.2]. Agora, quando nos referimos à resolução de uma singularidade  $x$  num espaço  $X$ , pensamos em encontrar um espaço  $\tilde{X}$ , naturalmente maior, no qual podemos incluir  $X$  e no qual  $x$  não é mais uma singularidade e, sim, um ponto ou um conjunto de pontos regulares. Para uma introdução a esse conceito, recomendamos [21].

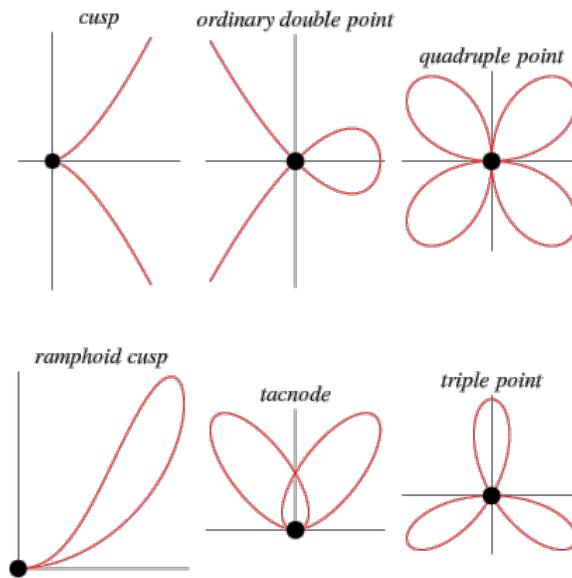


Figura 9: Alguns tipos de singularidades. Figura de [22].

**Definição 8.2.** Seja  $V$  uma variedade com um ponto de singularidade  $v$ , uma *resolução da singularidade*  $(\tilde{V}, v)$  é uma variedade  $\tilde{V}$  munida com um morfismo  $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$  que satisfazem:

1. o conjunto  $\tilde{V} \setminus \sigma^{-1}\{v\}$  é denso em  $\tilde{V}$ .
2. a restrição de  $\sigma$  é um isomorfismo entre  $\tilde{V} \setminus \sigma^{-1}\{v\}$  e  $V \setminus \{v\}$
3. todo ponto de  $\tilde{V}$  é regular.

Se o último item não for, necessariamente, satisfeito chamaremos  $\tilde{V}$  e  $\sigma$  simplesmente de uma *modificação de  $V$  em  $v$* . Além disso,  $\sigma^{-1}\{v\}$  é chamado de *conjunto excepcional de  $\tilde{V}$*

<sup>5</sup>Para uma prova mais detalhada, consulte o teorema de [10, p.63], no qual é utilizado o conceito de grau de transcendência.

Com o intuito de estudarmos os pontos de singularidade das variedades de órbitas  $\mathbb{C}^2/\Gamma$ , temos que algumas contas nos mostram que  $SU_2(\mathbb{C})$  age livremente em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , isto é, o único elemento de  $SU_2(\mathbb{C})$  que fixa algum elemento não-nulo de  $\mathbb{C}^2$  é a identidade  $\text{Id} \in SU_2(\mathbb{C})$ . Então, todo subgrupo  $\Gamma$  age livremente em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  e, com isso, pode-se provar<sup>6</sup> que todos os pontos diferentes de zero em  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  são regulares. Desse modo, a única singularidade possível da variedades de órbitas é o ponto  $0 \in \mathbb{C}^2/\Gamma$ , e isso, de fato, ocorre. Chamaremos as singularidades  $(V(R), 0)$  de *Kleinianas*, mas elas também são conhecidas como singularidades quocientes, singularidades simples ou singularidades de Du Val.

Agora, começaremos com a construção da resolução da singularidade no caso em que  $\Gamma = C_n$ . Esse caso também será necessário para resolvermos o problema quando  $\Gamma$  não é cíclico.

## 8.1 Resolução das singularidades cíclicas

Seguiremos o procedimento de [10, Chapter IV §4-6]. Inicialmente, provemos um resultado preliminar essencial, enunciado de forma mais geral: denotando por  $\zeta_i$  uma raiz  $i$ -ésima primitiva da unidade, considere o subgrupo cíclico de  $GL_2(\mathbb{C})$

$$H = \left\langle \begin{bmatrix} \zeta_p & 0 \\ 0 & \zeta_q \end{bmatrix} \right\rangle$$

e, sendo  $m = \text{mmc}(p, q)$  e  $r = m/p$ , considere o grupo, de ordem  $p$ , a seguir:

$$\hat{H} = \left\langle \begin{bmatrix} \zeta_p & 0 \\ 0 & \zeta_q^r \end{bmatrix} \right\rangle.$$

**Lema 8.2.** *A função  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  definida por  $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2^r)$  induz isomorfismo  $\mathbb{C}^2/H \cong \mathbb{C}^2/\hat{H}$ .*

*Demonstração.* O isomorfismo  $\tilde{f}$  é induzido ao fazer o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ \mathbb{C}^2/H & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}^2/\hat{H} \end{array}$$

Sobrejetividade de  $\tilde{f}$  segue diretamente da sobrejetividade de  $f$ . Vejamos a injetividade: se  $\tilde{f}(\pi(z_1, z_2)) = \tilde{f}(\pi(w_1, w_2))$ , então  $\hat{\pi}(f(z_1, z_2)) = \hat{\pi}(f(w_1, w_2))$ , ou seja,  $(z_1, z_2^r)$  e  $(w_1, w_2^r)$  estão na mesma órbita de  $\hat{H}$ . Assim, existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que

$$z_1 = \zeta_p^s w_1 \quad \text{e} \quad z_2^r = \zeta_q^{rs} w_2^r$$

e, portanto, para alguma  $\zeta_r$ , temos que  $z_2 = \zeta_r \zeta_q^s w_2$ . Além disso, como  $rp = m$ , temos que  $\zeta_q^p$  é uma raiz  $r$ -ésima primitiva da unidade e, então,  $\zeta_r = \zeta_q^{pl}$  para algum  $l \in \mathbb{N}$ . Tomando  $t = pl + s$ , temos que

$$z_1 = \zeta_p^s w_1 = \zeta_p^t w_1 \quad \text{e} \quad z_2 = \zeta_q^{pl} \zeta_q^s w_2 = \zeta_q^t w_2.$$

Ou seja, chegamos que  $\pi(z_1, z_2) = \pi(w_1, w_2)$ . □

Lembre que o nosso foco é encontrar uma resolução da singularidades  $(\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$ , onde podemos fixar

$$\Gamma = \left\langle \begin{bmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{n-1} \end{bmatrix} \right\rangle \subset SU_2(\mathbb{C}).$$

Dessa forma, já podemos utilizar o lema acima escrevendo

$$H = \Gamma^* = \left\langle \begin{bmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n \zeta_n^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle$$

e, portanto,  $\hat{H} = \Gamma$ , para concluir que  $\mathbb{C}^2/\Gamma \cong \mathbb{C}^2/\Gamma^*$ .

<sup>6</sup>Veja [10, Chapter IV §3, Proposition 3].

Agora, introduziremos os espaços que serão as bases para nossas modificações, chamados de *fibrados de linhas*:

$$\Sigma(b) = \{((z_1, z_2), [w_1 : w_2]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid z_1 w_2^b = z_2 w_1^b\}$$

Repare que, se pensarmos em  $\mathbb{P}^1$  como o conjunto das retas de  $\mathbb{C}^2$  que cruzam a origem, o fibrado para  $b = 1$  é simplesmente o conjunto dos pontos da forma  $(z, \vec{z})$ , onde  $\vec{z}$  denota uma reta (única quando  $z \neq 0$ ) que passa pela origem. Este e o fibrado para  $b = 2$  serão usados especialmente.

A projeção da 1ª coordenada  $\sigma: \Sigma(1) \rightarrow \mathbb{C}^2$  é uma modificação de  $\mathbb{C}^2$  em 0 e  $\sigma^{-1}[0] \cong \mathbb{P}^1$ . Assim, chamamos o fibrado  $\Sigma(1)$  de *blow-up* de  $\mathbb{C}^2$  em 0 e  $\sigma$  de *blowing-down*. Além disso, sendo  $A$  o elemento gerador de  $\Gamma^*$ , temos a seguinte ação de  $\Gamma^*$  em  $\Sigma(1)$ :

$$A \cdot ((z_1, z_2), [w_1 : w_2]) = ((\zeta_n z_1, \zeta_n \zeta_{n-1} z_2), [w_1 : \zeta_{n-1} w_2])$$

E, usando que  $A \cdot \sigma = \sigma \cdot A$ , note que a função  $\tilde{\sigma}$ , induzida pelo diagrama comutativo abaixo, é uma modificação de  $\mathbb{C}^2/\Gamma^*$  em 0:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(1) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma(1)/\Gamma^* & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \mathbb{C}^2/\Gamma^* \end{array}$$

Para podermos aplicar o lema novamente, vamos separar nosso fibrado em duas partes isomorfas a  $\mathbb{C}^2$ : definindo  $\Sigma_i := \{(z, [w_1 : w_2]) \in \Sigma(1) : w_i \neq 0\}$ , temos que  $\Sigma(1) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  e valem os seguintes isomorfismos:

$$\begin{array}{ll} \Sigma_1 \cong \mathbb{C}^2 & \Sigma_2 \cong \mathbb{C}^2 \\ ((z_1, z_2), [1 : w_2]) \mapsto (z_1, w_2) & ((z_1, z_2), [w_1 : 1]) \mapsto (z_2, w_1) \end{array}$$

Repare que cada uma dessas componentes são  $\Gamma^*$ -invariantes, isto é,  $\Gamma^* \cdot \Sigma_i = \Sigma_i$ . Assim, podemos analisar, separadamente, os espaços de órbita de cada componente:

1. Através do isomorfismo, temos que a ação de  $A$  em  $\Sigma_1$  é dada por:  $A \cdot (z_1, w_2) = (\zeta_n z_1, \zeta_{n-1} w_2)$ . Assim,  $\Sigma_1/\Gamma^* \cong \mathbb{C}^2/H_1$ , onde  $H_1$  é o grupo gerado por  $\begin{bmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_{n-1} \end{bmatrix}$ . Utilizando o lema duas vezes, sendo que, na segunda vez, trocamos a ordem de  $\zeta_p$  e  $\zeta_q$ , obtém-se que

$$\Sigma_1/\Gamma^* \cong \mathbb{C}^2/H_1 \cong \mathbb{C}^2/\{\text{Id}\} \cong \mathbb{C}^2.$$

Desse modo,  $\Sigma_1/\Gamma^*$  só possui pontos regulares.

2. A ação de  $A$  em  $\Sigma_2$  é dada por:  $A \cdot (z_2, w_1) = (\zeta_n \zeta_{n-1} z_2, \zeta_{n-1}^{-1} w_1)$ . Assim,  $\Sigma_2/\Gamma^* \cong \mathbb{C}^2/H_2$ , onde  $H_2$  é o grupo gerado por  $\begin{bmatrix} \zeta_n \zeta_{n-1} & 0 \\ 0 & \zeta_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}$ . Com uma troca da ordem das coordenadas e utilizando o lema uma vez (com  $p = n - 1, q = n(n - 1) \Rightarrow r = n$ ), concluímos que

$$\Sigma_2/\Gamma^* \cong \mathbb{C}^2 / \left\langle \begin{bmatrix} \zeta_{n-1} & 0 \\ 0 & \zeta_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Ou seja,  $\Sigma_2/\Gamma^*$  tem uma singularidade cíclica de ordem 1 a menos,  $n - 1$ .

Juntando esses dois resultados, chegamos que a modificação  $\Sigma(1)/\Gamma^* \cong \mathbb{C}^2 \cup \Sigma_2/\Gamma^*$  da singularidade cíclica  $(\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$ , de ordem  $n$ , tem apenas uma singularidade cíclica de ordem  $n - 1$ . Com isso, repetindo esse processo mais  $n - 2$  vezes, poderemos chegar no seguinte resultado:

**Teorema 8.3.** *A variedade  $\tilde{V}$  que nos fornece uma resolução da singularidade  $(\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$ , onde  $\Gamma = C_n \subset SU_2(\mathbb{C})$ , é dada por  $n$  cópias de  $\mathbb{C}^2$ :  $\tilde{V} = \mathbb{C}^2_{(1)} \cup \dots \cup \mathbb{C}^2_{(n)}$ , de modo que  $\mathbb{C}^2_{(i)} \cup \mathbb{C}^2_{(i+1)} \cong \Sigma(2)$ . Assim, também temos que  $\tilde{V}$  é a união de  $n - 1$  cópias de  $\Sigma(2)$  e que o conjunto excepcional  $E$  da resolução  $\sigma: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$  é dado como a união das seções de zeros  $E_i$  de cada cópia de  $\Sigma(2)$ :*

$$E = E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}, \quad E_i \cong \mathbb{P}^1,$$

satisfazendo que  $E_{i-1}$  e  $E_i$  se intersectam em um ponto e que  $E_i \cap E_j = \emptyset$  quando  $|i - j| > 1$ .

*Demonstração.* Daremos um panorama da demonstração. Denote por  $V_j$  a variedade que tenha uma singularidade cíclica de ordem  $j$ , isto é,  $V_j = \mathbb{C}^2/C_j$ . Com a construção acima, obtivemos uma modificação da forma  $\sigma_1: \mathbb{C}_{(1)}^2 \cup V_{n-1} \rightarrow V_n$ , onde a união é dada com as seguintes colagens (ou identificações):

$$\mathbb{C}_{(1)}^2 \ni (x_1, y_1) \sim [z, w] \in V_{n-1} \iff z^n w = x_1, \quad z^{n-1} y_1 = 1. \quad (4)$$

Do mesmo modo, também encontramos uma resolução  $\sigma_2: \mathbb{C}_{(2)}^2 \cup V_{n-2} \rightarrow V_{n-1}$ , a qual podemos estender para

$$\sigma_2: \mathbb{C}_{(1)}^2 \cup \mathbb{C}_{(2)}^2 \cup V_{n-2} \rightarrow \mathbb{C}_{(1)}^2 \cup V_{n-1}$$

definindo  $\sigma_2|_{\mathbb{C}_{(1)}^2} = \text{Id}$  e, para que  $\sigma_2$  esteja definida de fato, precisamos identificar os pontos  $(x_1, y_1) \in \mathbb{C}_{(1)}^2$  com  $(x_2, y_2) \in \mathbb{C}_{(2)}^2$  se, e só se,  $(x_1, y_1)$  e  $\sigma_2(x_2, y_2)$  estão identificados por meio de (4). Como  $\sigma_2(x_2, y_2) = [\xi_2, \xi_2^{n-2} y_2]$ , onde  $\xi_2^{n-1} = x_2$ , segue que:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(1)}^2 \ni (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \in \mathbb{C}_{(2)}^2 &\iff (x_1, y_1) \sim [\xi_2, \xi_2^{n-2} y_2] \\ &\iff \xi_2^n \xi_2^{n-2} y_2 = x_1, \quad \xi_2^{n-1} y_1 = 1 \\ &\iff x_2^2 y_2 = x_1, \quad x_2 y_1 = 1 \end{aligned}$$

Essa relação nos garante o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \Sigma(2) &\cong \mathbb{C}_{(1)}^2 \cup \mathbb{C}_{(2)}^2 = \mathbb{C}_{(1)}^2 \amalg \mathbb{C}_{(2)}^2 / \sim \\ (z_1, z_2), [1 : w_2] &\mapsto (x_1, y_1) = (z_1, w_2) \\ (z_1, z_2), [w_1 : 1] &\mapsto (x_2, y_2) = (w_1, z_2) \end{aligned}$$

Agora, se repertirmos esse processo recursivamente, obteremos uma seqüência de modificações que irá estabilizar em mais  $n-3$  passos, pois  $V_1 = \mathbb{C}^2$ , e, assim, a composição delas, que denotaremos por  $\sigma$ , será uma resolução:

$$\mathbb{C}_{(1)}^2 \cup \dots \cup \mathbb{C}_{(n)}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{C}_{(1)}^2 \cup \mathbb{C}_{(2)}^2 \cup V_{n-2} \rightarrow \mathbb{C}_{(1)}^2 \cup V_{n-1} \rightarrow V_n$$

A afirmação de que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$   $\mathbb{C}_{(i)}^2 \cup \mathbb{C}_{(i+1)}^2 \cong \Sigma(2)$  segue de modo análogo ao feito para  $i=1$ .

Para a última sentença do teorema, pode-se provar que o conjunto excepcional de  $\sigma_1$  é  $\sigma_1^{-1}[0] = \{(0, y_1) \in \mathbb{C}_{(1)}^2\} \cup \{[z, 0] \in V_{n-1}\}$  e, portanto, o conjunto excepcional da composição  $\tilde{E} = (\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}[0]$ , por exemplo, satisfaz:

$$E_1 := \tilde{E} \cap (\mathbb{C}_{(1)}^2 \cup \mathbb{C}_{(2)}^2) = \{(0, y_1) \in \mathbb{C}_{(1)}^2\} \cup \{(x_2, 0) \in \mathbb{C}_{(2)}^2\} \cong \{(0, [w_1 : w_2]) \in \Sigma(2)\} \cong \mathbb{P}^1.$$

Avançando passo-a-passo, teremos que

$$E = \sigma^{-1}[0] = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i, \quad \text{onde } E_i = \{(0, y_i) \in \mathbb{C}_{(i)}^2\} \cup \{(x_{i+1}, 0) \in \mathbb{C}_{(i+1)}^2\} \cong \mathbb{P}^1.$$

Além disso, quando  $|i-j| > 1$ , não temos identificações entre elementos de  $\mathbb{C}_{(i)}^2$  e  $\mathbb{C}_{(j)}^2$ , então  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ; já para o caso em que  $|i-j| = 1$ , vale que  $E_{i-1} \cap E_i = \{(0, 0) \in \mathbb{C}_{(i)}^2\}$ . □

Com esse resultado, temos já estabelecida a conexão desejada entre os subgrupos cíclicos  $C_n \subset \text{SU}_2(\mathbb{C})$  e os diagrama de Dynkin  $A_{n-1}$ , ilustrado abaixo. Apenas nos resta definir exatamente o que queremos dizer por obter um grafo a partir de uma resolução de singularidades.



**Definição 8.3.** Tome  $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$  uma resolução de singularidade com um conjunto excepcional  $E$  dado por uma união de linhas projetivas:  $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ ,  $E_i \cong \mathbb{P}^1$ . Definimos o *grafo da resolução* como sendo aquele que possui um vértice para cada componente  $E_i$  e uma aresta entre  $E_i$  e  $E_j$  ( $i \neq j$ ) se, e só se,  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ .

Podemos dar uma visualização razoável da resolução obtida para o caso mais simples, o do grupo  $C_2$ . É difícil de pensar numa ilustração, pois essas singularidades estão contidas em  $\mathbb{C}^3$ , mas podemos pensar na sua projeção em  $\mathbb{R}^3$ , como na figura 10. Repare que  $\mathbb{C}^2/C_2$  é dada pela equação  $X^2 + YZ = 0$  e, portanto, forma uma singularidade similar à do cone duplo e sua resolução pode ser dada pelo cilindro. Note que o conjunto excepcional é uma circunferência, pois ele é dado, em  $\mathbb{C}^3$ , por  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e, portanto, obtemos a esfera  $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

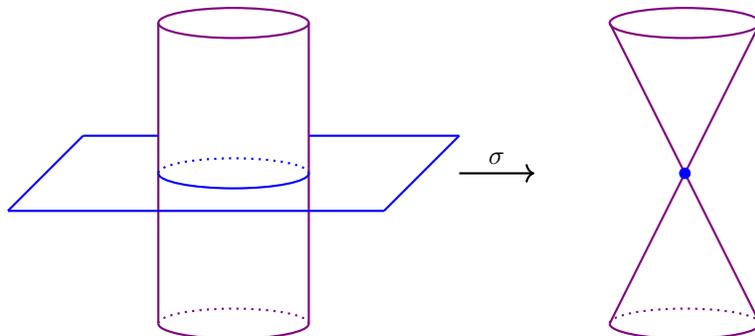


Figura 10: Resolução da singularidade cíclica de ordem 2.

## 8.2 Resolução das singularidades não-cíclicas

Seguiremos o procedimento de [10, Chapter IV §7-9] e, para fixarmos a notação,  $\Gamma$  representará um dos subgrupos poliedrais binários e  $G$  será sua imagem em  $SO_3(\mathbb{R})$ , isto é,  $G = \phi[\Gamma]$ .

Novamente, começaremos com o processo de blow-up de  $\mathbb{C}^2$  em 0 para acharmos uma modificação de  $\mathbb{C}^2/\Gamma$ . Isto é, tomando  $\sigma: \Sigma(1) \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $(z, w) \mapsto z$  e a ação de  $\Gamma$  em  $\Sigma(1)$  dada por  $\gamma \cdot (z, w) = (\gamma z, \gamma w)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , temos que a função induzida  $\tilde{\sigma}: \Sigma(1)/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$  é uma modificação em  $0 \in \mathbb{C}^2/\Gamma$ . A seguinte proposição nos dá uma nova cara para essa modificação.

**Proposição 8.4.** *A função sobrejetora  $p: \Sigma(1) \rightarrow \Sigma(2)$  dada por  $((z_1, z_2), w) \mapsto ((z_1^2, z_2^2), w)$  induz uma ação de  $G$  em  $\Sigma(2)$  e o isomorfismo  $\Sigma(1)/\Gamma \cong \Sigma(2)/G$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, vejamos que o seguinte define uma ação de  $G$  em  $\Sigma(2)$ :

$$\phi(\gamma) \cdot p(z, w) := p(\gamma \cdot (z, w)), \quad \gamma \in \Gamma, (z, w) \in \Sigma(1)$$

Basta notar que a ação independe da escolha de  $\gamma$ ,  $z$  e  $w$ : temos que  $\phi(\gamma) = \phi(\gamma') \Leftrightarrow \gamma' = \pm\gamma$  e  $p((z_1, z_2), w) = p((z'_1, z'_2), w') \Leftrightarrow z_1 = \pm z'_1, z_2 = \pm z'_2, w = w'$ . Além disso, da definição de  $\Sigma(1)$ ,  $w, w' \in \mathbb{P}^1$  são as retas que passam por  $z = (z_1, z_2)$  e por  $z' = (z'_1, z'_2)$ , então temos, necessariamente, que  $z' = \pm z$ . Logo,

$$\phi(\gamma) \cdot p(z, w) = p(\gamma z, \gamma w) = p(\pm\gamma z, \pm\gamma w) = p(\pm\gamma \cdot (\pm z, w)) = \phi(\gamma') \cdot p(z', w')$$

Para o isomorfismo, temos que  $p$  induz a função  $\tilde{p}$  que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(1) & \xrightarrow{p} & \Sigma(2) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Sigma(1)/\Gamma & \xrightarrow{\tilde{p}} & \Sigma(2)/G \end{array}$$

Assim, a sobrejetividade de  $\tilde{p}$  decorre da sobrejetividade de  $p$ . Para a injetividade, temos que  $\tilde{p}(\pi(z, w)) = \tilde{p}(\pi(z', w'))$  implica que  $\pi(p(z, w)) = \pi(p(z', w'))$ , isto é, existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que

$$\phi(\gamma) \cdot p(z, w) = p(z', w') \Rightarrow p(\gamma \cdot (z, w)) = p(z', w') \Rightarrow \pm\gamma \cdot (z, w) = (z', w')$$

Como assumimos que  $\Gamma$  é binário, temos que  $\pm\gamma \in \Gamma$  e, portanto,  $\pi(z, w) = \pi(z', w')$ . □

Focaremos, agora, em encontrar uma resolução da modificação  $\Sigma(2)/G$ . O seguinte resultado nos permite reduzir o nosso problema ao caso da resolução de singularidades cíclicas.

**Teorema 8.5.**  $\Sigma(2)/G$  é obtido de  $\Sigma(2)$  através da inserção de três singularidades cíclicas. As ordens  $n_i$  de cada uma das singularidades é dada pela tabela 1 para cada grupo correspondente.

*Esboço da demonstração.*  $\Sigma(2)/G$  está no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(2) & \xrightarrow{\pi^*} & \Sigma(2)/G \\ r \downarrow & & \downarrow \tilde{r} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^1/G \end{array}$$

onde  $r$  é a projeção  $\Sigma(2) \ni (z, w) \mapsto w$ ,  $\pi$  é a projeção das órbitas pela ação de  $G$  em  $\mathbb{P}^1 \cong S^2$  (veja 6.1),  $\pi_*$  é a projeção das órbitas pela ação de  $G$  construída acima e  $\tilde{r}$  é a função induzida para o diagrama comutar. Repare que as fibras de  $r$  são retas em  $\mathbb{C}$ , isto é,  $r^{-1}\{w\} \cong \mathbb{C} \forall w \in \mathbb{P}^1$ .

Visualize o poliedro  $P$  associado a  $G$  projetado radialmente na esfera  $S^2 \cong \mathbb{P}^1$ , de modo que as três órbitas excepcionais de  $\mathbb{P}^1$  pela ação de  $G$ , isto é, aquelas em que seus elementos são fixados por algum  $\text{Id} \neq g \in G$ , são:  $O_1 = \{\text{vértices de } P\}$ ,  $O_2 = \{\text{ponto médio das arestas de } P\}$  e  $O_3 = \{\text{centro das faces de } P\}$ . Denote por  $y_1, y_2, y_3$  os pontos  $\pi[O_1], \pi[O_2], \pi[O_3]$  de  $\mathbb{P}^1/G$ . Com isso,  $G$  age livremente em  $\mathbb{P}^1 \setminus (O_1 \cup O_2 \cup O_3)$  e prova-se que as duas funções abaixo são isomorfismos localmente:

$$\pi: \mathbb{P}^1 \setminus (O_1 \cup O_2 \cup O_3) \rightarrow (\mathbb{P}^1/G) \setminus \{y_1, y_2, y_3\} \quad (5)$$

$$\pi^*: \Sigma(2) \setminus r^{-1}[O_1 \cup O_2 \cup O_3] \rightarrow (\Sigma(2)/G) \setminus \tilde{r}^{-1}\{y_1, y_2, y_3\} \quad (6)$$

Com isso, a modificação  $\Sigma(2)/G$  não possui singularidades fora de  $\{y_1, y_2, y_3\}$ .

Analisemos, agora, as fibras  $\tilde{r}^{-1}\{y_i\}$ : sendo  $c_i \in O_i \subset \mathbb{P}^1$  um vértice ( $i = 1$ ), um ponto médio de aresta ( $i = 2$ ) ou o centro de uma face ( $i = 3$ ), seu grupo estabilizador  $G_{c_i}$  é o gerado pelas rotações de ângulo  $2\pi n_i$  com eixo em  $c_i$ , onde  $n_i$  está indicado na tabela 1. Tome uma vizinhança  $U \subset \mathbb{P}^1$  de  $c_i$  biholomorfa a um disco  $D \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  e de modo que não haja outros elementos excepcionais<sup>7</sup> em  $D$ , então  $r^{-1}[U] \cong \mathbb{C} \times U \cong \mathbb{C}^2$ . Além disso, temos que  $c_i$  é o único elemento fixado por elementos de  $G$  e, mais detalhadamente, fixado apenas por elementos de  $G_{c_i}$ , então temos o seguinte isomorfismo:

$$\tilde{r}^{-1}[\pi[U]] = \pi^*[r^{-1}[U]] = r^{-1}[U]/G \cong r^{-1}[U]/G_{c_i} \cong \mathbb{C}^2/G_{c_i}$$

Como  $\pi[U]$  é uma vizinhança de  $y_i$ , isso significa que cada uma das fibras  $\tilde{r}^{-1}\{y_i\} \subset \Sigma(2)/G$  representa uma singularidade cíclica de ordem  $n_i$ .

Com isso e através do isomorfismo (6), temos que  $\Sigma(2)/G$  é obtido de  $\Sigma(2)$  retirando as três fibras  $r^{-1}[O_1 \cup O_2 \cup O_3]$  e inserindo<sup>8</sup> três singularidades cíclicas  $\tilde{r}^{-1}\{y_1, y_2, y_3\}$  de ordens  $(n_1, n_2, n_3)$ , uma em cada fibra retirada. □

Desse modo, a fim de achar uma resolução de  $\Sigma(2)/G$ , basta encontrar uma resolução em uma vizinhança de cada uma de suas singularidades cíclicas usando o resultado da seção anterior e juntá-las todas. O seguinte lema nos diz, um pouco mais tecnicamente, como realizamos isso.

**Lema 8.6.** Uma resolução  $\tau: X \rightarrow \Sigma(2)/G$  de uma singularidade cíclica  $y_i$  é dada pelo espaço  $X = \Sigma(2) \cup \widetilde{X}_i$ , uma colagem entre  $\Sigma(2)$  e a resolução  $\widetilde{X}_i$  de uma vizinhança  $X_i \subset \Sigma(2)/G$  da singularidade cíclica de ordem  $n_i$  e a função  $\tau$ , que é dada por:

$$\begin{aligned} x \in \Sigma(2) \setminus r^{-1}[O_i] &\mapsto \tau(x) = \pi^*(x) \in (\Sigma(2)/G) \setminus \{y_i\} \\ x \in \widetilde{X}_i &\mapsto \tau(x) = \sigma(x) \in X_i \end{aligned}$$

onde  $\pi^*$  é o isomorfismo (6) renomeando  $\tilde{r}^{-1}\{y_i\}$  por  $y_i$  e  $\sigma: \widetilde{X}_i \rightarrow X_i$  denota a resolução obtida em 8.3.

<sup>7</sup>Isto é, elementos pertencentes a uma órbita excepcional

<sup>8</sup>Para uma definição mais meticulosa de "inserir uma singularidade cíclica em um fibrado vetorial", veja [10, p.146]

Utilizando o lema três vezes, podemos resolver todas as singularidades de  $\Sigma(2)/G$  e, com os resultados acima, obtemos a desejada resolução de  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  através da seguinte composição:

$$X = \Sigma(2) \cup \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2 \cup \widetilde{X}_3 \xrightarrow{\tau} \Sigma(2)/G \xrightarrow{\cong} \Sigma(1)/\Gamma \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \mathbb{C}^2/\Gamma$$

Denotando-a por  $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$ , basta analisarmos o conjunto excepcional para construirmos o seu grafo:

$$E = \psi^{-1}\{0\} = \tau^{-1}[(\{0\} \times \mathbb{P}^1)/G] = E_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3,$$

onde  $E_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^1 \subset \Sigma(2)$  e  $F_i$  é o conjunto excepcional de  $\widetilde{X}_i$ , obtido em 8.3:

$$F_i = E_{i,1} \cup \dots \cup E_{i,n_i-1}, \quad E_{i,j} \cong \mathbb{P}^1$$

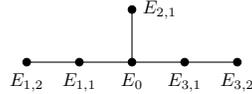
Além disso, vale que, para cada  $i \neq j$ ,  $F_i \cap F_j = \emptyset$  e  $E_0$  tem intersecção não-vazia com cada componente  $F_i$  contida em  $E_{i,1}$ , isto é,  $E_0$  não intersecta  $E_{i,j}$  para  $j \geq 2$ .

Desse modo, o grafo obtido a partir da resolução  $\psi$  tem um vértice central, o qual é conectado a 3 grafos de tipos  $A_{n_1-1}$ ,  $A_{n_2-1}$  e  $A_{n_3-1}$ . Para visualizarmos melhor, olhando novamente a tabela 1, temos que  $n_2 = 2$  em todos os casos, ou seja, o grafo é dado por um vértice ( $E_0$ ) conectado a um outro vértice,  $F_2 = E_{2,1}$ , e a mais duas "correntes",  $F_1$  e  $F_3$ , de tamanhos  $n_1 - 1$  e  $n_3 - 1$ .

**Exemplo 8.2.** Ilustremos o caso em que  $\Gamma = \mathcal{T}^*$ , isto é,  $G = A_4$ ,  $n_1 = 3 = n_3$  e  $n_2 = 2$ . Assim, o conjunto excepcional  $E$  é dado por

$$E = E_0 \cup E_{1,1} \cup E_{1,2} \cup E_{2,1} \cup E_{3,1} \cup E_{3,2}.$$

Ou seja, obtemos o diagrama de Dynkin  $E_6$ :



Desse modo, os mesmos diagramas de Dynkin que obtivemos a partir de cada subgrupo  $\Gamma$  na seção anterior obtemos novamente aqui. Uma diferença é que, nessa seção, obtivemos os diagramas não-estendidos, sem o vértice adicional, que anteriormente era dado pela representação trivial  $\rho_0$ .

Grupo	Grafo	Tipo do grafo
$C_n$		$A_{n-1}$
$D_n^*$		$D_{n+2}$
$\mathcal{T}^*$		$E_6$
$\mathcal{O}^*$		$E_7$
$\mathcal{I}^*$		$E_8$

Tabela 8: Grafos das resoluções das singularidades Kleinianas.

Na figura 11, podemos visualizar, de certa forma, como é dada a resolução da singularidade  $\mathbb{C}^2/D_2^* \subset \mathbb{C}^3$  projetada em  $\mathbb{R}^3$ . Repare que o conjunto excepcional é dado por uma circunferência central e três circunferências que a intersectam, formando o diagrama de Dynkin  $D_4$ .

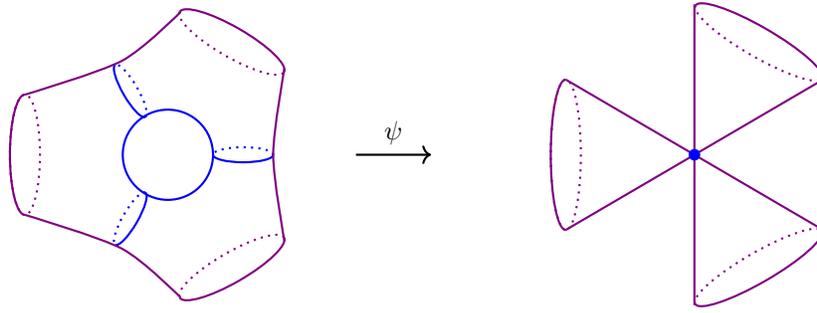


Figura 11: Resolução da singularidade  $\mathbb{C}^2/D_2^*$ .

## Conclusões e Extensões

*Would not the Greeks appreciate the result that the simple Lie algebras may be derived from the Platonic solids?*

John McKay

Resumidamente, trilhamos o seguinte caminho entre os sólidos platônicos e as álgebras de Lie. Dos sólidos platônicos obtivemos os grupos poliedrais binários e abriram-se duas estradas: a das representações irreduzíveis desse grupos, que nos leva para os diagramas de Dynkin estendidos, e a das singularidades Kleinianas, nos levando ao diagramas de Dynkin (não-estendidos); estes, por sua vez, estão conectados às álgebras de Lie simples por meio do seu sistema de raízes.

Com isso, podemos pensar nos vértices e arestas dos diagramas de Dynkin homogêneos à luz de diferentes teorias, como sintetizado na tabela abaixo:

Teoria	Vértices	Existência de Arestas entre $i$ e $j$
Álgebras de Lie	raízes simples	$(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$
Representações de grupos	representações irreduzíveis	$\rho_j$ faz parte da decomposição de $\rho_i \otimes \rho$
Resolução de singularidades	componentes $E_i \cong \mathbb{P}^1$	$E_i \cap E_j \neq \emptyset$

Tabela 9: A classificação ADE.

Desse modo, todos esses diferentes objetos podem ser classificados através de mesmas estruturas: os diagramas de Dynkin do tipo A, D ou E. Dizemos, assim, que eles fazem parte da classificação ADE, que contém outros objetos que não os estudados aqui.

Feito isso, uma pergunta natural que podemos fazer é: e os outros diagramas de Dynkin,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $F_4$  e  $G_2$ ? Eles possuem uma conexão com estruturas similares às feitas aqui? Essa questão foi considerada por Slodowy no livro [23], onde ele realiza um estudo mais amplo, utilizando conceitos como deformações e quocientes adjuntos, e consegue estender a teoria para esses outros diagramas de Dynkin.

Em um outro ponto de vista, note que introduzimos as singularidades Kleinianas a partir dos invariantes da álgebra de polinômios. O artigo de A. Mellit [24] analisa a extensão dessa teoria para álgebras não-comutativas.

## Referências

- [1] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*. New York: Springer-Verlag, first ed., 1977.
- [2] P. Etingof, [et al.], and S. Gerovitch, *Introduction to Representation Theory*. AMS, 2011.
- [3] J. Gordon and M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press, first ed., 1993.
- [4] H. Maschke, "Beweis des satzes, dass diejenigen endlichen linearen substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende coefficienten auftreten, intransitiv sind [prova do teorema de que certos grupos de substituição linear finitas, nos quais alguns coeficientes que sempre somem aparecem, são intrasitivos]," *Mathematische Annalen*, vol. 52, pp. 363–368, 1899. Disponível em: [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684\\_0052?tify&tify](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0052?tify&tify). Acesso em: 11/11/2020.
- [5] J. v. Hoboken, "Platonic solids, binary polyhedral groups, kleinian singularities and lie algebras of type a, d, e," Master's thesis, University of Amsterdam, 2002.
- [6] I. V. Dolgachev, "McKay correspondence." Lecture Notes, Winter 2006/07.
- [7] R. Stekolshchik, *Notes on Coxeter Transformations and the McKay Correspondence*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [8] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag New York, 1972.
- [9] J. McKay, "Graphs singularities and finite groups," *AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 37, pp. 183–186, 1980.
- [10] K. Lamotke, *Regular Solids and Isolated Singularities*. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1986.
- [11] T. Marar, *Topologia Geométrica para Inquietos*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2019.
- [12] Euclides, *Os Elementos*. Editora UNESP, 2009. Tradução: Irineu Bicudo.
- [13] N. J. Wildberger, "Universal hyperbolic geometry 47-51." Videoaulas disponíveis em: <https://www.youtube.com/watch?v=SjBYs20S8wk&list=PLI1jB45xT85DZby7Ju-SupKHxErzdRvgI&index=19>, 2015. Acesso em: 20/05/2020.
- [14] J. Baez, "Dodecahedron with 5 tetrahedra." AMS Blogs: Virtual Insights. Disponível em: <https://blogs.ams.org/visualinsight/2015/05/15/dodecahedron-with-5-tetrahedra/>, 2015. Acesso em: 20/05/2020.
- [15] R. W. Gray, "What's in this polyhedron? (part 2)." Disponível em: <http://www.rwgrayprojects.com/Lynn/NCH/whatpoly2.html>, 2000. Acesso em: 20/05/2020.
- [16] P. Du Val, "On isolated singularities which do not affect the condition of adjunction," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 30, p. 453–465, 1934.
- [17] E. Tengan and H. Borges, *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos*. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 2015.
- [18] K. E. Smith and [et al.], *An Invitation to Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, 2000.
- [19] F. Klein, *Lectures on the ikosahedron and the solution of equations of the fifth degree*. London: Trubner & Co., 1888. Tradução: George G. Morrice. Disponível em: <https://archive.org/details/cu31924059413439/page/n9/mode/2up>. Acesso em 07/09/2020.
- [20] C. McLarty, "The finiteness theorem for invariants of a finite group (translation of Emmy Noether's "Der Endlichkeitsatz der Invarianten endlicher Gruppen")." Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1503.07849>, 2015. Acesso em 09/09/2020.

- [21] E. Whitten, "Resolution of singularities in algebraic varieties." Disponível em: <https://www.math.utah.edu/~boocher/writings/emma.pdf>, Summer 2008. Acesso em 07/09/2020.
- [22] E. W. Weisstein, "Singular point." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/SingularPoint.html>. Acesso em 07/09/2020.
- [23] P. Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*. Lecture Notes in Mathematics 815, Springer-Verlag, 1980.
- [24] A. Mellit, "Algebras generated by elements with given spectrum and scalar sum and kleinian singularities." Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0406119v1.pdf>. Acesso em 07/10/2020.