Lista 5. Gabatitos

Transformações lineares

1. (a) Não, pois $T(\lambda x) = |\lambda| \cdot |x| \neq \lambda |x|$ para $\lambda < 0$.
   (b) Sim, pelo definição.
   (c) Sim.
   (d) Sim.
   (e) Não, pois $\operatorname{posto}(-1+1) = 0 \neq \operatorname{posto}(-1) + \operatorname{posto}(1) = 2$.
   (f) Não.

2. (a) Não, pois para $T(x, y, z, t) = T(x, y, z)$ nucleo tem forma Ker$(T) = \{(0, 0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$, assim T não é injetora.
   (b) Sim, pois $\dim(V) = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T)$. Assim $\dim \mathrm{Im}(T) = 4 - \dim \mathrm{Ker}(T) \leq= 2$
   (c) Sim. Pois $0 = \dim \mathrm{Ker}(T) = \dim(V) - \dim \mathrm{Im}(T) \geq \dim(V) - \dim(W)$.
   (d) Não. Por exemplo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $T(x, y) = 0$.
   (e) Sim, veja (b).

3. (a) Desde que Ker$(T) = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$, o vetor $(0, 0, 1)$ é base do Ker(T). Então vetores $T(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$ e $T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ formam base do $\mathrm{Im}(T)$.
   (b) Veja (a).
   (c) Desde que Ker$(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ x & y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, base do nucleo consiste dos vetores $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então $\mathrm{Im}(T) = \left[T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$.
   (d) Veja (e).
   (e) Desde que Ker$(T) = \{at + b, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(T) = [T(t^2) = 2t]$.
   (f) Veja (c).

4. Usando linearidade do T, obtemos $T(0, 1, 0) = (5, 2, 7) - (2, 3, 1) = (3, -1, 6)$ e $T(0, 0, 1) = (-2, 0, 7) - (5, 2, 7) = (-7, -2, 0)$. Então $T(x, y, z) = x(2, 3, 1) + y(3, -1, 6) + z(-7, -2, 0) = (2x + 3y - 7z, 3x - y - 2z, x + 6y)$. Ker$(T) = \{0\}$ assim T é bijetora.

5. Definimos o operador $T : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p(t)) = p(t) + p(-t)$. Então Ker$(T) = [t, t^3, \ldots, t^{2k+1}], k \leq n$ e $\mathrm{Im}(T) = [T(1), T(t^2), \ldots, T(t^{2k})], k \leq n$. Enfim Ker$(T) = O$ e $\mathrm{Im}(T) = E$. Por teorema da dimenção, $\dim O + \dim E = n + 1$.

6. Por linearidade do T, $T(t) = (T(t+t^2) + T(t-t^2))/2 = (1+t+t^3)/2$ e $T(t^2) = (1-t-t^3)/2$. Então $T(a + bt + ct^2) = at + b(1 + t + t^3)/2 + c(1 - t - t^3)/2 = (b + c) + (a + b/2 - c/2)t + (b/2 - c/2)t^3$.

7. Complementamos o base do nucleo com elementos $(1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0)$. Sejam $T(1, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0), T(1, 1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0), T(1, 1, 1, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Assim obtemos $T(x, y, z, t, w) = (x - y + z - t, y - t, z - t)$.

8. A matriz da transformação tem forma $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Veja que $\det(F) \neq 0$, então Ker$(F) = \{0\} = \mathrm{Im}(F) \cap \mathrm{Ker}(F)$ e $\mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Im}(F)$.

9. (a) È facil ver que $T(x,y) = (x,y,0)$ é isomorfismo.
   (b) Os espaços não são isomorfos por que $\dim(U) = 6$ e $\dim(V) = 3$.
   (c) È facil ver que $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ é isomorfismo.
   (d) Os espaços são isomorfos por que $\dim(U) = \dim(V) = 1$.

10. Sejam $b_1 = (0,1,0)$, $b_2 = (1,1,0)$, $b_3 = (0,0,1)$ os vetores em base B Escrevemos F em base B. Temos $F(b_1) = (0,2,1) = 2b_1 + b_3$, $F(b_2) = (1,2,1) = b_1 + b_2 + b_3$, $F(b_3) = (0,0,1) = b_3$. Assim $(F)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e temos que $(G)_B = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    Vetor $(x,y,z) = x(b_2 - b_1) + yb_1 + zb_3 = (y-x)b_1 + xb_2 + zb + 3$ em base B. Assim temos $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-2x \\ x \\ y-x+z \end{pmatrix}_B$.
    Assim $G(x,y,z) = (x, 3y-x, y-x+z)$ e $G^2(x,y,z) = (x, 9y-4x, 4y-3x+z)$.
    Também temos que $F^2(x,y,z) = (x, 4y, y+z)$. Então $(F^2+G^2)(x,y,z) = (2x, 13y-4x, 5y-3x+2z)$. Temos agora que $(F^2+G^2)(b_1) = (0,13,5) = 8c_2 + c_3$, $(F^2+G^2)(b_2) = (2,9,2) = 2c_1 + 9c_2$, $(F^2+G^2)(b_3) = (0,0,2) = -2c_2 + 2c_3$.
    Assim temos nos $(F^2+G^2)^B_C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Temos que $T(1) = 1 \cdot (1,1) + 2 \cdot (1,0) = (3,1)$, $T(t) = -1 \cdot (1,1) + 0 \cdot (1,0) = (-1,-1)$ $T(t^2) = 0 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,0) = (1,0)$ Assim $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 T(1) + a_1 T(t) + a_2 T(t^2) = a_0(3,1) + a_1(-1,-1) + a_2(1,0) = (3a_0 - a_1 + a_2, a_0 - a_1)$.

12. Temos que $p(t)at + b \in \mathrm{Ker}(T)$ se $b - a = 0$ e $a = 0$ ou seja se e só se $p(t) = 0$. Assim T é isomorphismo.
    Se $T^{-1}(at+b) = xt + y$. Assim $T(xt+y) = (at+b) = -xt + (y-x)$. Temos
    $$\begin{cases} a = -x \\ b = y - x \end{cases}$$
    ou seja $x = -a$ e $y = b - a$. Assim $T^{-1}(at+b) = -at + (b-a)$.

13. Temos $T(1) = 1$, $T(t) = 2t, \ldots, T(t^i) = t^i + t \cdot i \cdot t^{i-1} = t^i(1+i), \ldots, T(t^n) = t^n(n+1)$. Assim temos que
    $$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & n+1 \end{pmatrix}$$
    Temos que $\det(T) = (n+1)! \neq 0$ assim T é invertivel, ou seja T é um isomorphismo.

14. a) Temos que $T(1) = \int_{-1}^{1} 1dt = 2$, $T(t) = \int_{-1}^{1} tdt = 0$, $T(t^2) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = frac23$. Assim obtemos
    $$(T)^B_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) Temos que $T(1) = \int_{-1}^{1} 1dt = 2$, $T(1+t) = \int_{-1}^{1}(t+1)dt = 2$, $T(1+t+t^2) = \int_{-1}^{1} 1+t+t^2dt = 2+\frac{2}{3}$. Assim obtemos

$$(T)_C^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

15. Se $\lambda_1 T + \lambda_2 R + \lambda_3 S = 0$ assim temos que

$$\lambda_1 T(x,y) + \lambda_2 R(x,y) + \lambda_3 S(x,y) = 0$$

ou

$$\lambda_1(x, 2y) + \lambda_2(x, x+y) + \lambda_3(0, x) = 0$$

para todos vetores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Assim tomando $(x,y) = (1,0)$ temos

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,1) + \lambda_3(0,1) = 0$$

ou $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3$. Agora tomando $(x,y) = (1,1)$ obtemos

$$\lambda_1(1,2) - \lambda_1(1,2) + \lambda_1(1,1) = 0$$

ou seja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, assim T, R, S são l.i.