Trabalhos

MAT0554 — 2° SEMESTRE DE 2017

O aluno pode decidir fazer o Trabalho A ou Trabalho B. Entregar até 30.09.2017!

Trabalho A

Lembrete:

Teorema 1. *Seja* Q *uma aljava conectada. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) Q *tem tipo finito;*

(2) q_Q *é positivamente definida;*

(3) O grafo de Q *é um dos grafos de Dynkin:* A_n, D_n, E_6, E_7 *ou* E_8.

Teorema 2. *Seja* A *uma* k*-álgebra de dimensão finita. Existe uma álgebra básica* B *Morita equivalente a* A*, isto é*

$$\mathit{rep}(A) \cong \mathit{rep}(B).$$

Trabalho A: Mostre as implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$, no Teorema 1, e explique como construir uma álgebra B no Teorema 2.

Trabalho B

Resolva 10 dos exercícios abaixo (k um corpo algebricamente fechado, kQ álgebra de caminhos de Q).

Exercício 1.
Mostre que a forma q_Q é positivamente definida para aljava Q de baixo.

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & 0 & 3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Exercício 2.
Se $Q = A_n$. Descreva todos representações indecomponíveis do Q.

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots n-1 \longrightarrow n$$

Exercício 3.
Mostre que as raízes positivos da forma $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ são os números do Fibonacci consecutivos em lugares ímpares (i.e. $(0, 1), (1, 0), (1, 3), (3, 1), (3, 8), (8, 3), \ldots$).

Exercício 4.
Se $Q = A_n$. Mostre que todos raizes positivos da forma quadrática q_Q são

$$e_i + e_{i+1} + \cdots + e_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$$

onde e_i formam base canónica em $\mathbb{Z}^n$. Assim Q tem $\frac{n(n-1)}{2}$ raízes positivos.

Exercício 5.
Se $Q = D_n$. Mostre que todos raízes da forma quadrática q_Q são:

$$e_i + e_{i+1} + \cdots + e_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n,$$

$$e_1 + e_3 + \cdots + e_j, \qquad j \geqslant 3,$$

e

$$e_1 + e_2 + 2(e_3 + \cdots + e_i) + e_{i+1} + \cdots + e_j, \qquad 3 \leqslant i \leqslant j \leqslant n,$$

onde e_i formam base canónica em $\mathbb{Z}^n$. Assim $Q = D_n$ tem $n(n-1)$ raízes positivos.

Exercício 6.
Saja A álgebra dos polinómios $A = k[x_1, x_2]$. Mostre que

(a) a álgebra A não é local;

(b) os elementos 0 and 1 são os únicos idempotentes de A;

(c) $J(A) = 0$.

Exercício 7.
Seja A uma k-álgebra de dimensão finita. Mostre que $a \in J(A)$ se e somente se $1 - ab$ é unidade em A para todo $b \in A$.

Exercício 8.
Seja G um grupo finito, e kG álgebra do grupo G. Mostre que $J(kG) = 0$.

Exercício 9.
Seja $f : A \to B$ um homomorfismo das álgebras. Mostre que se f é sobrejetora assim $f(J(A)) \subseteq J(B)$. Construir o contra-exemplo para f não é sobrejetora.

Exercício 10.
Saja Q uma aljava finita. Mostre que:

(a) kQ é semisimple s.e.s $|Q_1| = 0$;

(b) kQ is simple if and only if $|Q_0| = 1$ and $|Q_1| = 0$.

Se Q é conectado mostre que:

(c) kQ é local se $|Q_0| = 1$ and $|Q_1| = 0$;

(d) kQ é comutativo s.e.s $|Q_0| = 1$ and $|Q_1| \leqslant 1$.

Exercício 11.
Saja Q uma aljava acíclica. Mostre que $J(kQ)$ é gerado pelas flechas em Q.

Exercício 12.
Construir a aljava do Gabriel da uma álgebra semisimples.

Exercício 13.
Construir a aljava do Gabriel da álgebra $A = \mathbb{U}_n(k)$ (matrizes triangulares superiores).

Exercício 14.
Seja $A = \begin{bmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$. Construir a aljava do Gabriel da A.

Exercício 15.
Seja $A = \mathbb{U}_3(k)$, and C uma sub-álgebra de A consistindo de todas as matrizes

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

tais que $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33}$. Mostre que C é isomorfa a kQ/I, onde $I = \langle \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta \rangle$ é o ideal em kQ, and Q é aljava

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$