Gabarito
MAT2352 — Lista 4
Monitor: Juan Sebastián Herrera Carmona

1. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes, percorrida uma vez no senitdo horario. Dê todos os valores possiveis para

$$(a) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}. \quad (b) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}.$$

Demonstração. (a) primeiro lembremos da lista 3 item (12. a) que o campo de vectores

$$F(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

é um campo conservativo, com função potencial $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, isso é

$$\nabla \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

sempre que a função estiver bem definida. $(\{(x,y)\,|\,x>0\})$. Por tanto para qualquer curva fechada simples tal que a região limitada por esta fique contida em $\{(x,y)\,|\,x>0\})$, vamos ter que a função potencial fica bem definida e por tanto a integral é independente da curva, por tanto para uma curva com estas características

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

com $\gamma(a) = \gamma(b)$ temos que

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_\gamma \nabla \operatorname{arctg}\frac{y}{x}d\vec{\gamma} = \operatorname{arctg}\frac{\gamma_2(b)}{\gamma_1(b)} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma_2(a)}{\gamma_1(a)} = 0.$$

Agora notemos que para qualquer curva simples fechada tal que a região limitada por esta contenha a origem, sempre podemos deformar esta *homotopicamente* para a circulo de radio 1, i.e.,

$$\gamma(t) = (\cos(-t), \sin(-t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

(note que temos parametrizado o circo em sentido horário). Logo o valor da integral de linha do campo $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ para qualquer destas curva é igual ao valor da integral ao longo da curva γ, assim por calculo direito temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t)\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt + \frac{(-\cos t)\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 1 dt \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

□

3. Considere o campo $\vec{F}(x, y) = cxy\vec{i} + x^6y^2\vec{j}$, $c > 0$, atuando sobre uma partícula que se move do ponto $(0, 0)$ até a reta $x = 1$ sobre a curva γ, gráfico da função $y = ax^b$, com $a > 0, b > 0$. Determine um valor de c em termos de a e b para que o trabalho realizado por $\vec{F}$ seja nulo.

Demonstração. Uma parametrização para a curva descrita no exercício esta dada por

$$\vec{\gamma}(t) = (t, at^b), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

e

$$d\vec{\gamma} = (dt, abt^{b-1}dt).$$

logo para que o trabalho da partícula seja nulo devemos ter que a integral de linha da campo de forças sobre a curva γ seja nulo. Assim por calculo direito temos que

$$
\begin{aligned}
0 = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} &= \int_0^1 (ct)(at^b)dt + (t^6)(a^2t^{2b})abt^{b-1}dt \\
&= \int_0^1 cat^{b+1}dt + a^3bt^{6+2b+b-1}dt \\
&= \left.\frac{cat^{b+2}}{b+2}\right|_{t=0}^{t=1} + \left.\frac{a^3bt^{6+3b}}{6+3b}\right|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{ca}{b+2} + \frac{a^3b}{6+3b} \\
&= \frac{ca(6+3b)+a^3b(b+2)}{(b+2)(6+3b)} \\
0 &= ca(6+3b)+a^3b(b+2) \\
\frac{-a^3b(b+2)}{6+3b} &= ca \\
\frac{-a^3b(b+2)}{3(b+2)} &= ca \\
\frac{-a^3b}{3} &= c.
\end{aligned}
$$

$\square$

5. Em cada item abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado D. Em caso afirmativo, determine um potencial de $\vec{F}$.

- (a)$\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}, \quad D = \mathbb{R}^2$. Note que o campo no é conservativo pois

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq 0.$$

- (b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}. \quad D = \mathbb{R}^2$ Note que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2xe^y + y)}{\partial x} = 2xe^y + 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^2e^y + x - 2y)}{\partial y} = 2xe^y + 1,$$

Logo como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo então temos que $\vec{F}$ é conservativo. Agora vamos supor conhecida a função potencial e vamos caraterizar esta. Seja φ a função potencial, logo

$$\nabla\varphi = \vec{F},$$

isso é mesmo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xe^y + y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y$$

da primeira equação temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} =& 2xe^y + y, \\
\varphi(x,y) =& \int_0^x (2te^y + y)dt + f(y) \\
=& (2\frac{t^2}{2}e^y + yt)\Big|_0^x + f(y) \\
=& x^2e^y + yx + f(y)
\end{aligned}$$

assim $\varphi(x,y) = x^2e^y + yx + f(y)$ para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Além disso

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial(x^2e^y + yx + f(y))}{\partial y} = x^2e^y + x + \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por outro lado da segunda equação temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y$$

Por tanto

$$x^2e^y + x - 2y = x^2e^y + x + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

assim $f(y) = -y^2 + c$, com c uma constante. Em conclução temos que função potencial é

$$\varphi(x,y) = x^2e^y + yx - y^2 + c.$$

- (c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2+8xy^2)\vec{i}+(3x^3y-3xy)\vec{j}-(4z^2y^2+2x^3z)\vec{k}, \quad D = \mathbb{R}^2.$
Dica: o campo não é conservativo pois o $\mathrm{rot}\vec{F} \neq 0$.

- (f)$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath}}{x^2+y^2}, \quad D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ Dica: ver exercício 1.

- (g)$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath}}{x^2+y^2}, \quad D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0)\,|\,x \leqslant 0\}$ Dica: ver exercício 1.

6. Prove que o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{\imath} + xy\vec{\jmath}$ é nulo ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das abscissas. Pode-se concluir que $\vec{F}$ é conservativo.

Demonstração. Dica: Pode-se provar por calculo direito que de fato para qualquer circunferência de centro na abscissa $(a,0)$ e raio $r > 0$, parametrizada por exemplo como:

$$\gamma(t) = (a + r\cos t, r\sin t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a \in \mathbb{R}, r > 0$$

a integral do campo é nulo. além disso dado que o campo esta definido em $\mathbb{R}^2$ que é simplemente conexo, e todo caminho fechado simples pode ser deformado homotopicamente para um circunferência na origem, onde temos que a integral é nulo, então podemos concluir que o campo de fato é conservativo. Verifique que a função potencial esta dado por $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + x\frac{y^2}{2} + c, \quad c > 0$

□

10. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

- (a)$\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$,

- (b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y\,dx + x\cos y\,dy$

Demonstração. Dica: Dado que ambas funções são definidas em todo $\mathbb{R}^2$ e este é simplemente conexo, para provar que as integrais são independe do caminho é suficiente mostrar que sobre qualquer curva fechada simples C^1 a integral é nula. Para provar esto podemos usar o Teorema de Green

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Para $\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{\imath} + (x^2 - y^2)\vec{\jmath}$ temos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x,$$

Logo

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

Para $\vec{F}(x, y) = \sin y\vec{\imath} + x\cos y\vec{\jmath}$ temos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x\cos y)}{\partial x} = \cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \sin y}{\partial y} = \cos y$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = \cos y - \cos y = 0$$

assim

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_K 0 dx dy = 0$$

Por tanto $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy$ e $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y\,dx + x\cos y\,dy$ independe do caminho. Agora para calcular a integral é suficientes tomar qualquer curva em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos $(1, 1)$ e (a, b), por exemplo uma linha reta

$$\gamma(t) = (1, 1) + t(a, b), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

$\square$