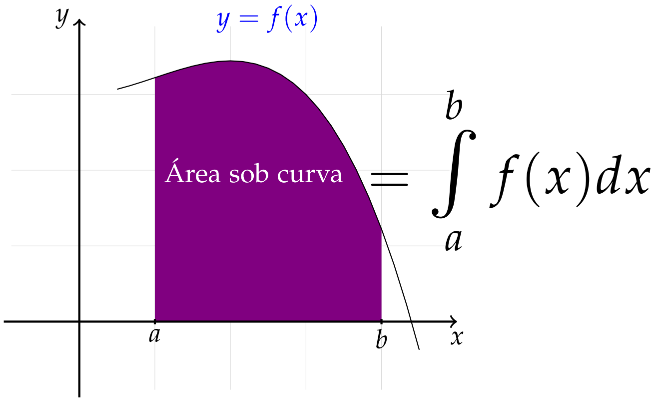
Aula 2. Volume da revolução

Lembrete

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ com $f(x) \geq 0$ para todos $x \in [a,b]$. Assim:

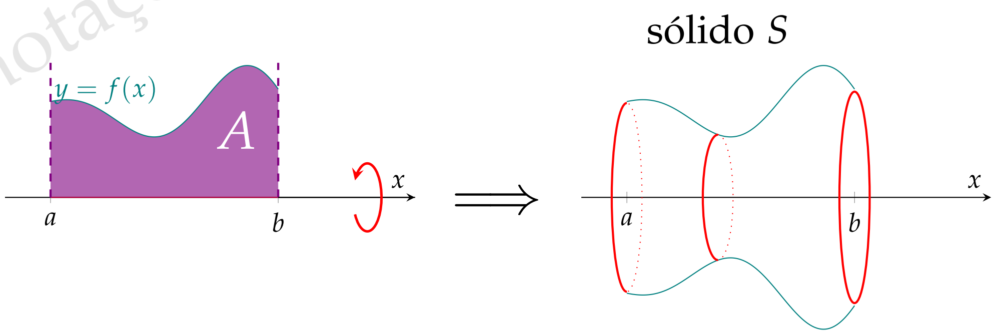


Lembrete. Uma função $f(x)$ é *contínua* em $[a,b]$ se para todo $x_0 \in [a,b]$ temos que

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

2.1 Volume de sólido obtido pela rotação em torno de eixo-x.

Seja S o sólido obtido pela rotação em torno de eixo x do conjunto A limitado pelas retas: $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico $y = f(x)$.



Pergunta: Como calcular o **volume** $V(S)$ do sólido S?

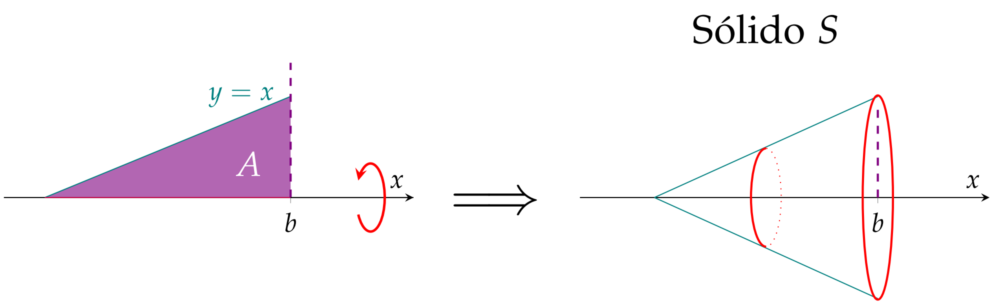
Vale a fórmula:

$$\boxed{V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.1

Vamos calcular o volume do sólido S obtido pela rotação, em torno de eixo-x, do conjunto A limitado pelas retas:

$$x = 0, \qquad x = b, \qquad y = x.$$



Assim o sólido obtido é um cone com o raio $r = b$ e altura $h = b$. Sabemos que o volume do cone pode ser calculado como $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot b^3$. Por outro lado, aplicando a fórmula acima (2.1), o volume do sólido obtido pode ser calculado como

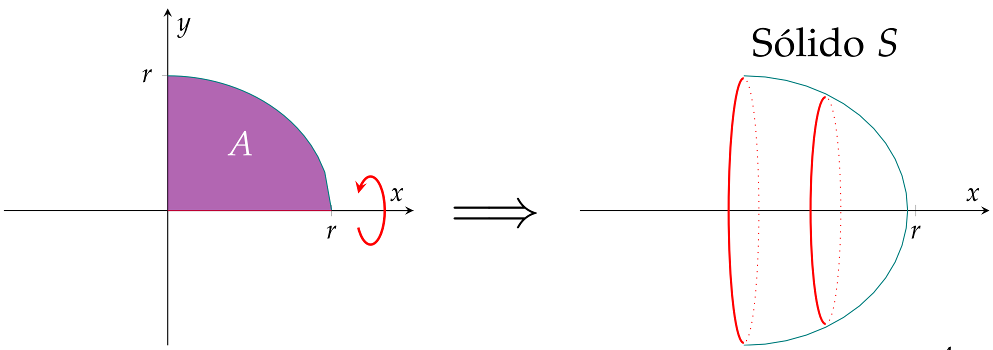
$$V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^b = \frac{1}{3}\pi \cdot b^3.$$

Exemplo 2.2

Vamos calcular o volume do sólido S obtido pela rotação, em torno de eixo-x, do conjunto A dado por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$

com um raio $r > 0$ fixo.



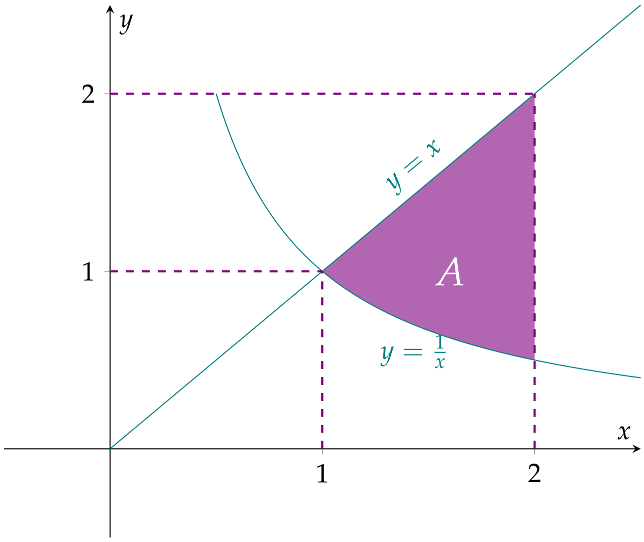
Assim o sólido obtido é semi-esfera raio r. Sabemos que o volume dela é $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$. Por outro lado, aplicando a fórmula acima (2.1), o volume do sólido obtido pode ser calculado como

$$V(S) = \pi \int_0^r y^2 dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^r = \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

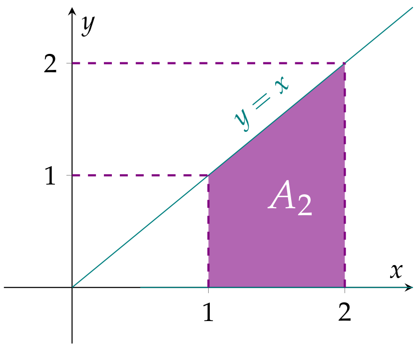
Exemplo 2.3

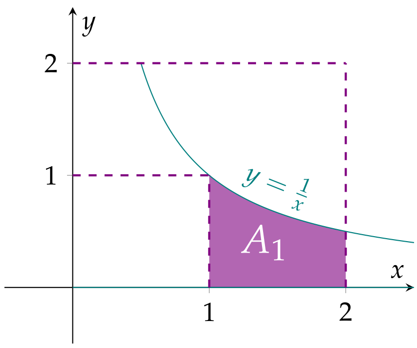
Suponha que o sólido S obtido pela rotação, em torno de eixo-x, do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que

$$\frac{1}{x} \leq y \leq x, \qquad 1 \leq x \leq 2.$$



Temos que o volume do sólido $V(S)$ pode ser obtido como $V(S_2) - V(S_1)$, onde S_1, e S_2 são os sólidos de rotação dos conjuntos A_1 e A_2 (respectivamente) abaixo.





Aplicando a fórmula acima (2.1), temos

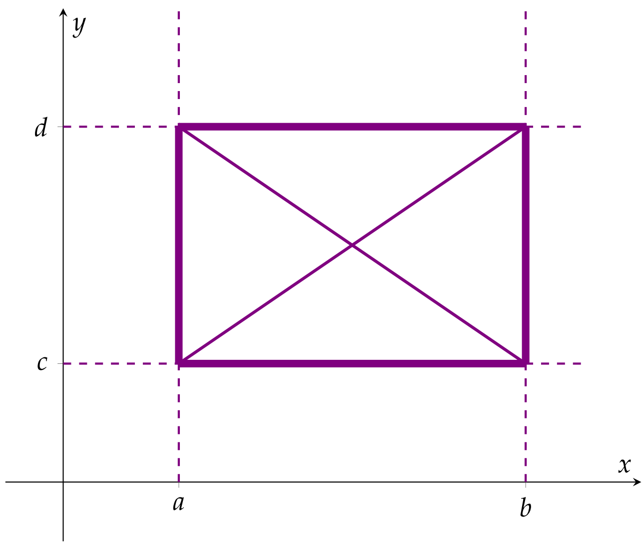
$$V(S_2) = \pi \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}\pi, \qquad V(S_1) = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Assim

$$V(S) = V(S_2) - V(S_1) = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}.$$

Exemplo 2.4

Considere o retângulo abaixo. Suponha que ponto P é a interseção das diagonais do retângulo.



Vamos mostrar que o volume do sólido obtido pela rotação igual a

$$(b-a)\cdot(d-c)\cdot\pi\cdot(d+c),$$

Observe que $(b-a)\cdot(d-c)$ é areá do retângulo e $\pi\cdot(d+c)$ é comprimento da circunferência gerada pela rotação do ponto P. De fato, temos que

$$V=\pi\int_a^b d^2dx-\pi\int_a^b c^2dx=\pi\cdot(d^2-c^2)(b-a)=\pi\cdot(d+c)\cdot(d-c)\cdot(b-a).$$

Exercício 2.1

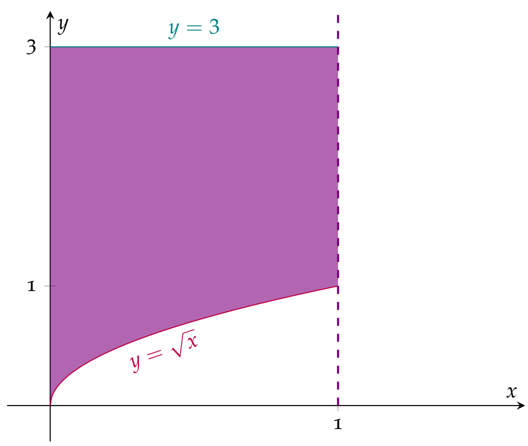
Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo-x do conjunto A de todos os pares (x,y) tais que

$$0\le x\le 1,\qquad \sqrt{x}\le y\le 3.$$

Solução 2.1

Proseguindo na mesma maneira como no Exemplo 2.2 temos

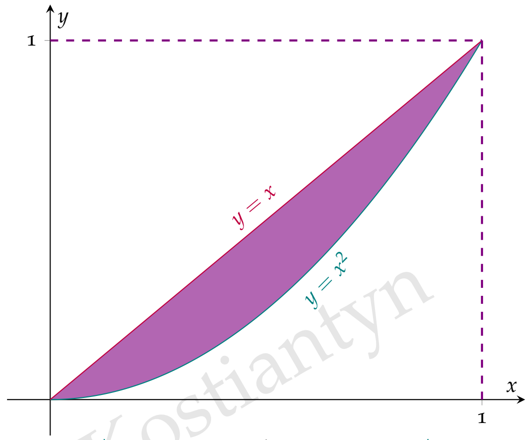
$$V=\pi\int_0^1[3^2-(\sqrt{x})^2]dx=\pi\int_0^1[9-x]dx$$
$$=\pi\left(9x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\pi\left(9-\frac{1}{2}\right)=\frac{17\pi}{2}.$$



Exercício 2.2

Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo-x do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que

$$0 \leq x \leq 1, \qquad x^2 \leq y \leq x.$$



Solução 2.2

Proseguindo na mesma maneira como no Exemplo 2.2 temos

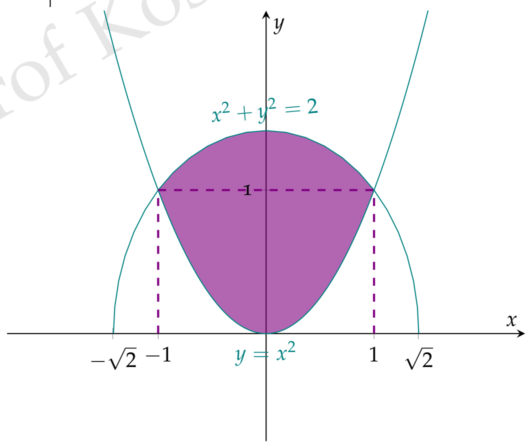
$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - x^4] dx =$$
$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}.$$

Exercício 2.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo-x do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que

$$y \geq x^2, \qquad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Resposta: $\dfrac{44\pi}{15}$.

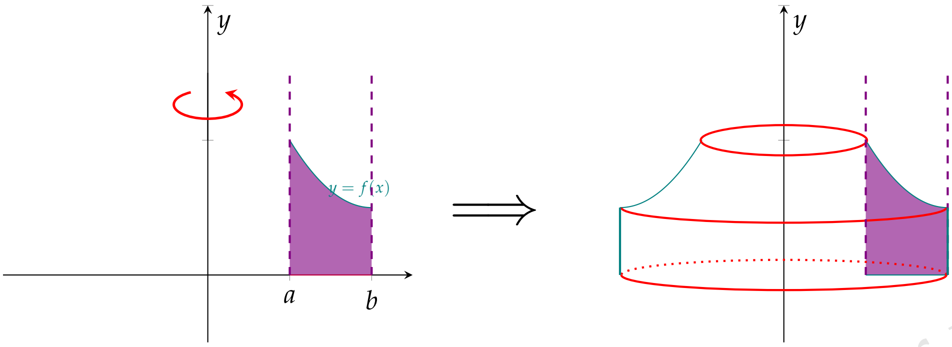


2.2 Volume do sólido obtido pela rotação em torno de eixo-y.

Suponha que $f(x) \geq 0$ é uma função contínua em $[a,b]$ com $a > 0$. Seja A o conjunto do plano de todos os pares (x,y) tais que

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq f(x).$$

Seja S o conjunto obtido pela rotação em torno do eixo-y, do conjunto S.



Assim o volume do S pode ser obtido como:

$$\boxed{V(S) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx.} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.5

Suponha que o sólido obtido pela rotação em torno do eixo-y do conjunto A de todos (x,y) tais que

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq x - x^3.$$

Assim, aplicando a fórmula (2.2) o volume $V(S)$ é

$$V(S) = 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot (x - x^3) = 2\pi \cdot \int_0^1 (x^2 - x^4) = 2\pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{15}.$$

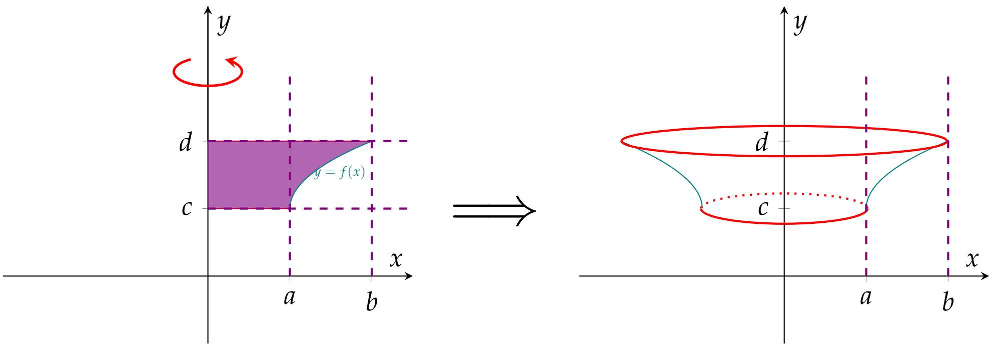
Seja agora B o seguinte conjunto

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} 0 \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \\ y \geq f(x) \end{array} \right\},$$

onde $f(x)$ uma função estritamente crescente em $[a,b]$ com $f(a) = c$ e $f(b) = d$. Suponha que o sólido S é obtido pela rotação do B em torno do eixo-y, como na figura de baixo:

Lembrete. Uma função $f(x)$ é *estritamente crescente* em $[a,b]$ se para todos $x_1, x_2 \in [a,b]$ com $x_1 < x_2$ temos que

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Assim o volume $V(S)$ do sólido S obtido pode ser calculado como:

$$\boxed{V(S) = \pi \int_c^d x^2 dy,} \tag{2.3}$$

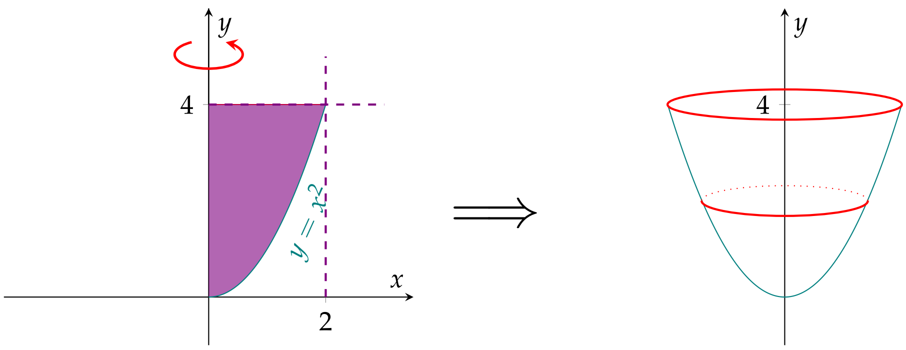
onde $x = g(y)$ e g é função inversa da função f (isto é $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$).

Exemplo 2.6

Suponha que

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 4, \quad x \geq 0\}.$$

Neste caso temos



Temos que $f(x) = x^2$ (ou $y = x^2$) assim a função inversa é $g(y) = \sqrt{y}$ (ou $x = \sqrt{y}$). Portanto o volume é calculado (através da fórmula (2.3)) como

$$V(S) = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = 8\pi.$$

Observação 2.1

Observe que o volume acima poderia ter sido calculado usando a fórmula (2.2). Neste caso temos que

$$V(S) = V(S_1) - V(S_2),$$

onde

- S_1 é sólido obtido pela rotação do retângulo 2×4 em torno do eixo y
- S_2 é sólido obtido pela rotação do conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 4\}.$$

em torno do eixo y.

Obviamente o volume do S_1 é $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$. Assim, aplicando a fórmula (2.2) temos

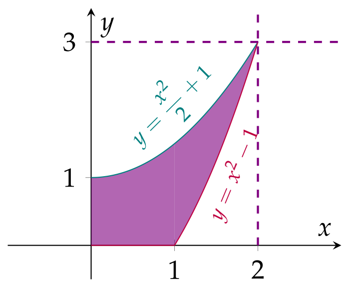
$$V(S) = 16\pi - 2\pi \int_0^2 x \cdot f(x)^2 dx = 16\pi - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx = 16\pi - 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 8\pi.$$

Exemplo 2.7

Suponha que

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \qquad 0 \leq y \leq \frac{x^2}{2} + 1, \quad y \geq x^2 - 1\}.$$

Podemos calcular o volume aplicando a fórmula (2.2) ou a fórmula (2.3).



Método 1 (aplicando (2.2)):
Temos

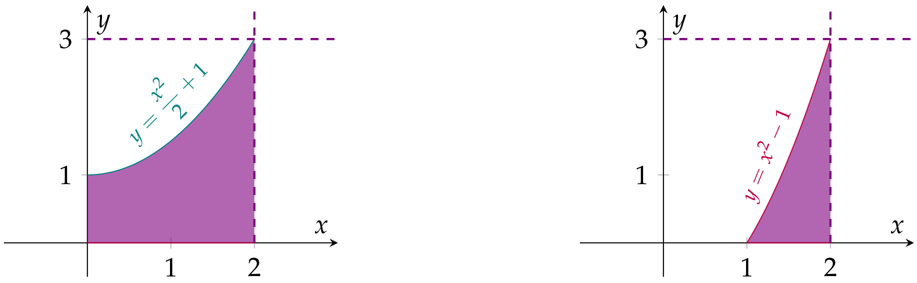
$$V(S) = 2 \cdot \pi \int_0^2 x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx - 2 \cdot \pi \int_0^2 x \cdot (x^2 - 1) dx = \frac{7\pi}{2}.$$

Método 2 (aplicando (2.3)):
Se $y = \frac{x^2}{2} + 1$ assim $x = \sqrt{2y - 2}$ e se $y = x^2 - 1$, assim $x = \sqrt{y + 1}$. Portanto, temos

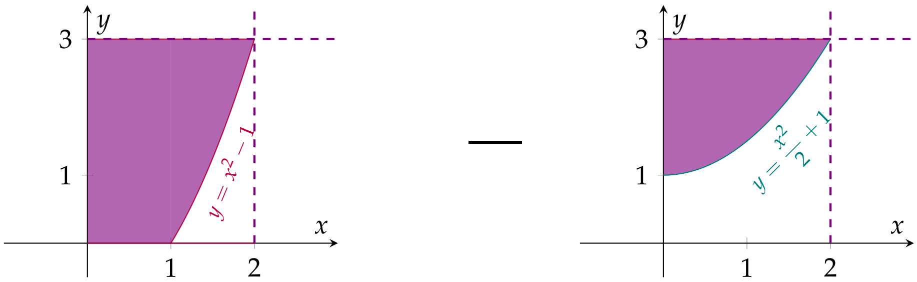
$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_0^3 x \cdot (y + 1) dy - \pi \int_1^3 x \cdot (2y - 2) dy \\ &= \pi \left[\left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^3 - \left(y^2 - 2y\right)\Big|_1^2 \right] \\ &= \pi \left[\frac{9}{2} + 3 - (9 - 6 - 1 + 2)\right] = \frac{7}{2}\pi. \end{aligned}$$

Observação 2.2

Graficamente os métodos do último exemplo podem ser apresentados como:
Método 1:



Método 2:



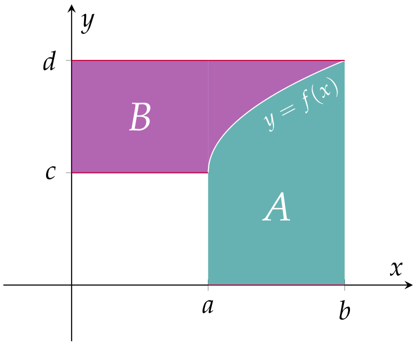
2.3 *Resumo da aula:*

Resumindo o conteúdo dessa aula temos, se

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\},$$

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\},$$

como na figura do lado.



Assim:

- $\pi \int_a^b y^2 dx$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto A em torno do eixo-x;
- $\pi \int_c^d x^2 dx$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto B em torno do eixo-y;
- $2\pi \int_a^b xy dx$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto A em torno do eixo-y;

- $2\pi \int\limits_c^d yx dx$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto B em torno do eixo-x,

onde $y = f(x)$ e $x = g(y)$ é função inversa da $f(x)$.

Exercício 2.4: (Trabalho p/ casa)

Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo-y para cada conjunto A de baixo:

(a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \operatorname{sen} x \end{array} \right\}$, **Resposta:** $2\pi^2$.

(b) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y^2 \le x \le \sqrt{y} \ \right\}$, **Resposta:** $\frac{3}{10}\pi$.

(c) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le x^2+1 \end{array} \right\}$, **Resposta:** $\frac{\pi}{3}$.