Aula 24. Multiplicadores de Lagrange

Nas aulas anteriores, otimizamos (ou seja, encontramos os extremos absolutos) uma função em uma região que continha sua fronteira. Encontrar potenciais pontos ótimos no interior da região não é tão ruim em geral, tudo que precisávamos fazer era encontrar os pontos críticos e conectá-los à função. No entanto, como vimos nos exemplos, encontrar os pontos candidatos na fronteira costumava ser um processo bastante longo e confuso.

Nessa aula, daremos uma olhada em outra maneira de otimizar uma função sujeita a determinadas restrições. A(s) restrição(ões) pode(m) ser a(s) equação(ões) que descrevem a fronteira de uma região, embora nessa aula não nos concentremos nesses tipos de problemas, uma vez que este método requer apenas uma restrição geral e realmente não importa de onde a restrição veio.

Então, vamos configurar as coisas. Queremos otimizar (ou seja, encontrar o valor mínimo e máximo de) uma função, $f(x,y)$, sujeito à restrição $g(x,y) = k$. Novamente, a restrição pode ser a equação que descreve o limite de uma região ou não. O processo é bastante simples, embora às vezes o trabalho ainda possa ser um pouco complicado.

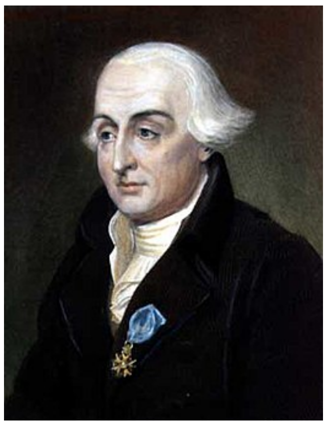
Método de multiplicadores de Lagrange:

(a) Resolva o seguinte sistema de equações.

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y),$$
$$g(x,y) = k.$$

(b) Calcule os valores de $f(x,y)$ para todas as soluções (x,y) de (a), e identificar os valores mínimo e máximo, desde que existam.

A constante, λ, é chamado de **Multiplicador de Lagrange**.



Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

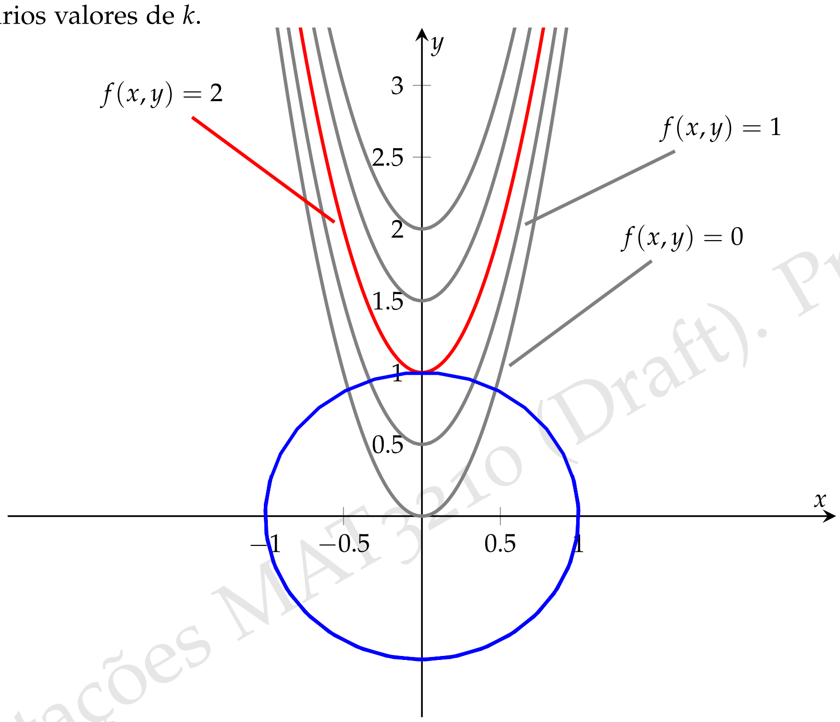
Observe que o sistema de equações do método na verdade tem três equações, acabamos de escrever o sistema de uma forma mais simples. Para ver isso, vamos pegar a primeira equação e inserir a definição do vetor gradiente para ver o que temos.

$$\langle f_x, f_y \rangle = \lambda \langle g_x, g_y \rangle = \langle \lambda g_x, \lambda g_y \rangle$$

Para que esses dois vetores sejam iguais, os componentes individuais também devem ser iguais. Então, na verdade temos duas equações aqui.

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y.$$

Essas duas equações junto com a restrição $g(x,y) = k$ fornecem três equações com três incógnitas x, y e λ. Como nota final, também precisamos ter cuidado com o fato de que, em alguns casos, os mínimos e os máximos não existem, embora o método pareça implicar que sim. Em todo problema, precisaremos ter certeza de que os mínimos e os máximos existirão antes de começarmos o problema. Para ver uma justificativa física para as fórmulas acima vamos considerar os valores mínimo e máximo de $f(x,y) = 8x^2 - 2y$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Nos exercícios para casa dessa aula (Exercicio 24.6 para ser exato) vocês vão mostrar que o valor mínimo de $f(x,y)$ é -2, que ele ocorre em $(0,1)$, e o valor máximo de $f(x,y)$ é $8,125$, que ocorre em $\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ e $\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}, -\frac{1}{8}\right)$. Aqui está um esboço da restrição, bem como as curvas de níveis $f(x,y) = k$ para vários valores de k.



Primeiro, lembre-se de que as soluções para o sistema devem estar em algum lugar no gráfico da restrição, $x^2 + y^2 = 1$ neste caso. Como estamos procurando o valor mínimo / máximo de $f(x,y)$, isso, por sua vez, significa que a localização do valor mínimo / máximo de $f(x,y)$, i.e. o ponto (x,y), deve ocorrer onde o gráfico de $f(x,y) = k$ cruza o gráfico da restrição quando k é o valor mínimo ou máximo de $f(x,y)$.

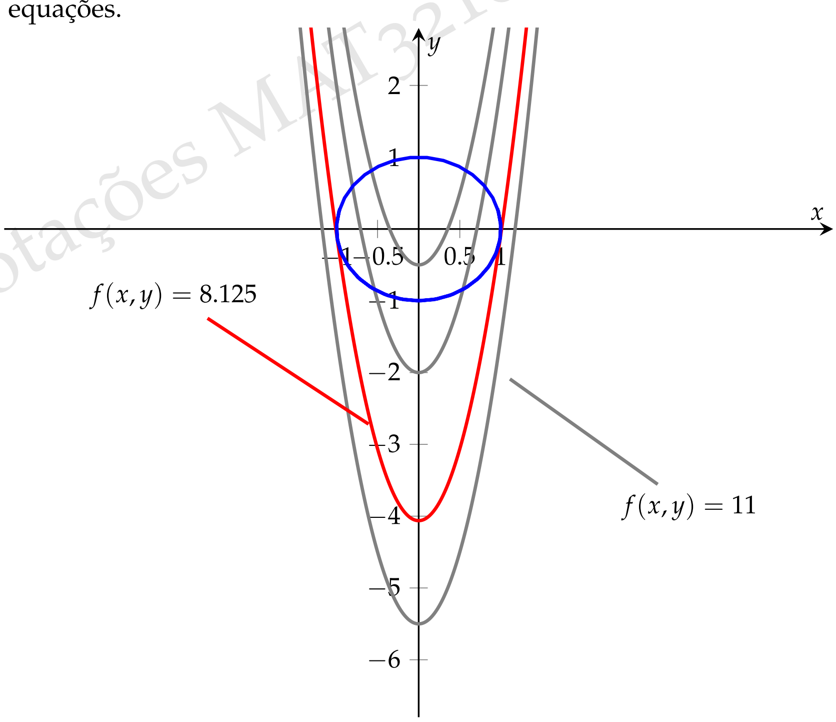
Agora, podemos ver que o gráfico de $f(x,y) = -2$, i.e. o gráfico do valor mínimo de $f(x,y)$, apenas toca o gráfico no ponto $(0,1)$. Na verdade, os dois gráficos naquele ponto são tangentes. Se os dois gráficos forem tangentes nesse ponto, seus vetores normais devem ser paralelos, ou seja, os dois vetores normais devem ser múltiplos escalares um do outro. Matematicamente, isso significa,

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

para algum λ escalar e esta é exatamente a primeira equação do sistema que precisamos resolver no método. Observe também que se k é menor que o valor mínimo de $f(x,y)$ o gráfico de $f(x,y) = k$ não cruza o gráfico da restrição e, portanto, não é possível para a função assumir esse valor de k em um ponto que satisfaça a restrição. Da mesma forma, se k é maior que o valor mínimo de $f(x,y)$, o gráfico de $f(x,y) = k$ cruzará o gráfico da restrição, mas os dois gráficos não são tangentes no ponto (s) de interseção. Isso significa que o método não encontrará esses pontos de interseção conforme resolvemos o sistema de equações. A seguir, o gráfico abaixo mostra um conjunto diferente de valores de k. Nesse caso, os valores de k incluem o valor máximo de $f(x,y)$, bem como alguns valores em cada lado do valor máximo. Novamente, podemos ver que o gráfico de $f(x,y) = 8,125$ apenas tocará o gráfico da restrição em dois pontos. Isso é bom, pois sabemos que a solução diz que isso deve ocorrer em dois pontos. Observe também que nesses pontos novamente o gráfico de $f(x,y) = 8,125$ e a restrição são tangentes e, portanto, assim como com os valores mínimos, os vetores normais devem ser paralelos nesses pontos.

Da mesma forma, para um valor de k maior que 8,125, o gráfico de $f(x,y) = k$ não intercepta o gráfico da restrição e, portanto, não será possível para $f(x,y)$ nesses valores maiores em pontos que estão na restrição.

Além disso, para valores de k menores que 8,125, o gráfico de $f(x,y) = k$ cruza o gráfico da restrição, mas não será tangente nos pontos de interseção e, portanto, novamente o método não produzirá essas interseções pontos enquanto resolvemos o sistema de equações.



Então, com esses gráficos vimos que os valores mínimo / máximo de $f(x,y)$ virão de onde o gráfico de $f(x,y) = k$ e o gráfico da restrição são tangentes e assim seus vetores normais são paralelos.

Além disso, porque o ponto deve ocorrer na própria restrição. Em outras palavras, o sistema de equações que precisamos resolver para determinar o valor mínimo / máximo de $f(x, y)$ são exatamente aqueles dados acima quando introduzimos o método.

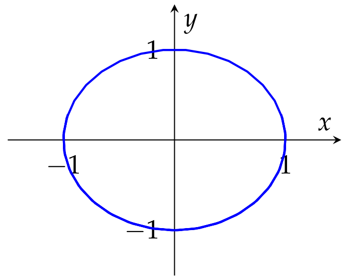
Observe que a justificativa física acima foi feita para um sistema bidimensional, mas a mesma justificativa pode ser feita em dimensões superiores. A diferença é que em dimensões superiores não trabalharemos com curvas. Por exemplo, em três dimensões estaríamos trabalhando com superfícies. No entanto, as mesmas ideias ainda serão válidas. Nos pontos que fornecem o (s) valor (es) mínimo e máximo (s), as superfícies seriam paralelas e, portanto, os vetores normais também seriam paralelos.

Agora vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 24.1

Seja dada função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Vamos encontrar o máximo e mínimo da $f(x,y)$ com a restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Temos que $g(x,y) = 0$ implica que

$$x^2 + y^2 = 1$$



ou seja $x^2 = 1 - y^2$. Observem que $x^2 + y^2 = 1$ é circunferência de raio 1 e centro no origem, logo máximo e mínimo da $f(x,y)$ devem existir devido do Teorema de Weierstrass (vejam Aula 22).
Como $x^2 = 1 - y^2$, assim $f(x,y)$ com restrição $g(x,y) = 0$ tem forma

$$f(x,y) = 1 - y^2 + 2y^2 = 1 + y^2,$$

com $-1 \leq y \leq 1$. Logo, nesse intervalo o valor **min** acontece quando y^2 é minimal. Assim quando $y = 0$ e $x = \pm 1$. Nesse caso

$$f(\pm 1, 0) = 1 + 0 = 1.$$

Por outro lado, o valor **min** acontece quando y^2 é maximal, ou seja $y^2 = 1$. Assim $y = \pm 1$, e $x = 0$. Nesse caso

$$f(0, \pm 1) = 1 + 1^2 = 2.$$

Mesmo resultado podemos obter aplicando o Método de multiplicadores de Lagrange. Temos que $\nabla f(x,y) = (2x, 4y)$, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$. Assim montando o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \\ \quad g(x,y) = 0, \end{cases}$$

temos

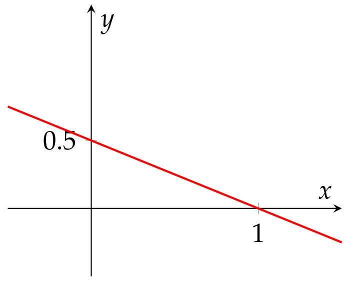
$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 4y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

As primeiras duas equações são equivalentes às equações $\begin{cases} x = 0, \text{ou } \lambda = 1 \\ y = 0, \text{ou } \lambda = 2 \end{cases}$. Se $x = 0$ assim usando $x^2 + y^2 = 1$ temos que $y = \pm 1$, e se $y = 0$ assim temos que $x = \pm 1$, ou seja temos 4 pontos candidatos para ser **max** e **min**. Analizando os valores da $f(x,y)$ em $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$, temos que $(0, \pm 1)$ é **max** e $(\pm 1, 0)$ é **min**.

Exemplo 24.2

Vamos encontra um ponto na reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máximo.
Para fazer isso, considere funções

$$f(x,y) = x \cdot y, \qquad g(x,y) = x + 2y - 1.$$



Assim o problema é equivalente a encontrar o máximo da função $f(x,y)$ sob restrição $g(x,y) = 0$. Usando o Método de multiplicadores de Lagrange, temos que $\nabla f(x,y) = (y,x)$, $\nabla g(x,y) = (1,2)$. Assim montando o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 1, \quad x = \lambda \cdot 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Assim, temos

$$1 = x + 2y = 2\lambda + 2\lambda = 4\lambda,$$

ou seja $\lambda = \frac{1}{4}$. Assim

$$x = \lambda \cdot 2 = \frac{1}{2}, \qquad y = \lambda \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Agora

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8},$$

e muito fácil confirmar que esse valor é maximal. Para fazer isso podemos pegar qualquer outro ponto na reta $x + 2y = 1$, por exemplo $P = (1,0)$ e calcular $f(P)$. Temos

$$f(1,0) = 0 < f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Exercício 24.1

Encontre o mínimo da função $f(x,y) = x^2 + y$ no conjunto

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

Solução 24.1

Primeiramente, observem que B não é limitado (de fato B é uma hipérbole no plano $\mathbb{R}^2$), assim não podemos aplicar o Teorema de Weierstrass. Temos que conjunto B é conjunto de todos os pontos onde $g(x,y) = 0$, para $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1$. Usando o Método de multiplicadores de Lagrange, temos que $\nabla f(x,y) = (2x, 1)$,

$\nabla g(x,y) = (2x, -2y)$. Assim montando o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x, \\ 1 = \lambda \cdot (-2y), \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

A primeira equação implica que $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Vamos analizar ambos os casos separadamente. Se $x = 0$, então usando $x^2 - y^2 = 1$ temos que $-y^2 = 1$, o que é um absurdo. Assim $\lambda = 1$, e a segunda equação implica que $y = -\frac{1}{2}$. Usando a terceira equação, temos

$$x^2 = y^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4},$$

assim $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Logo os pontos

$$\Big(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\Big),$$

são candidatos para mínimo. De fato temos que

$$f\Big(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\Big) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

E é fácil confirmar que esse valor é mínimo, pois no conjunto B função $f(x,y)$ escreva-se como

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y = y^2 + 1 + y \\ &= \Big(y + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} = f\Big(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\Big). \end{aligned}$$

Exercício 24.2

Uma empresa produz uma mercadoria em duas fábricas diferentes. O custo total da produção depende de quantidades q_1 e q_2 (de produção da cada fábrica) e é dado por

$$f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500.$$

A empresa quer produzir 200 unidades minimizando o custo. Quantas unidades deve produzir cada fábrica?

Solução 24.2

Temos

$$f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500,$$

$$g(q_1, q_2) = q_1 + q_2 - 200.$$

Assim usando o Método de multiplicadores de Lagrange, temos que $\nabla f(x,y) = (4q_1 + q_2, q_1 + 2q_2)$, $\nabla g(x,y) = (1,1)$. Montando o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} 4q_1 + q_2 = \lambda, \\ q_1 + 2q_2 = \lambda, \\ q_1 + q_2 = 200. \end{cases}$$

Primeiras duas equações implicam que $4q_1 + q_2 = q_1 + 2q_2$ ou seja $3q_1 = q_2$. Colocando isso na terceira equação, temos que $q_1 = 50$, assim $q_2 = 150$. Agora

$$f(50,150) = 2 \cdot 50^2 + 50 \cdot 150 + 150^2 + 500 = 35500.$$

Por exemplo

$$f(0,200) = 2 \cdot 0^2 + 0 \cdot 200 + 200^2 + 500 = 40500,$$

assim $(50,150)$ é realmente mínimo. Ou seja empresa deve produzir 50 unidades na primeira fábrica e 150 unidades na segunda.

Observação 24.1

Observem que se dada função uma $f(x,y,z)$ de 3 variáveis sob a restrição $g(x,y,z) = k$ assim o mesmo método é aplicável para encontrar os pontos extremidade da função $f(x,y,z)$. Ou seja podemos montar o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

e encontrar suas soluções. Observem que o sistema acima de fato tem 4 equações:

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z,$$

$$g(x,y,z) = 0.$$

Exemplo 24.3

Vamos encontrar os pontos na esfera $x^2+y^2+z^2=4$ mais próximos e mais distantes do ponto $P=(3,1,-1)$.
A distancia entre qualquer ponto (x,y,z) e ponto $P=(3,1,-1)$ é dado por

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}.$$

Em vez de encontrar max e min da função $d(x,y,z)$, podemos considerar a função $f = d^2$ (para simplificar as contas), ou seja

$$f(x,y,z)=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2,$$

e aplicar o método de multiplicadores de Lagrange para encontrar o min e max da f na esfera.
Temos que

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4,$$

e

$$\nabla f(x,y,z)=(2(x-3),2(y-1),2(z+1)), \quad \nabla g(x,y,z)=(2x,2y,2z).$$

Montando o sistema, vamos receber

$$\begin{cases} 2(x-3)=\lambda\cdot 2x \\ 2(y-1)=\lambda\cdot 2y \\ 2(z+1)=\lambda\cdot 2z \\ x^2+y^2+z^2=y \end{cases}.$$

Portanto

$$x=\frac{3}{1-\lambda}, \quad y=\frac{1}{1-\lambda}, \quad z=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Colocando estes valores na última equação, temos que

$$4=x^2+y^2+z^2=\left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2,$$

ou seja

$$4=\frac{11}{(1-\lambda)^2}, \quad \Longrightarrow \quad (1-\lambda)=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Assim temos 2 pontos

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right), \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Agora temos que

$$f\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\approx 1.73$$

e

$$f\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\approx 28.3$$

Assim $\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ é ponto mais próximo e $\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ é mais distante de P que estão na esfera.

Exercício 24.3: (Trabalho p/ casa)

Encontre as dimensões da caixa com maior volume se a área total da superfície for 64 cm^2.

Resposta: $x = y = z \approx 3.266$

Exercício 24.4: (Trabalho p/ casa)

Encontre o mínimo e máximo da função $f(x,y) = 5x - 3y$ com condição $x^2 + y^2 = 136$.

Resposta:

$$f(-10,6) = -68 \quad \text{Miníma em } (-10,6)$$
$$f(10,-6) = 68 \quad \text{Máxima em } (10,-6)$$

Exercício 24.5: (Trabalho p/ casa)

No plano $x + y + z = 1$ encontre o ponto cujo produto das coordenadas seja máximo (resp. mínimo). Suponha que $x, y, z \geq 0$.

Resposta:

$$f(0,0,1) = 0 \quad f(0,1,0) = 0 \quad f(1,0,0) = 0 \quad \text{Todos Mínimos}$$
$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} \qquad \text{Máxima}$$

Exercício 24.6: (Trabalho p/ casa)

Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x,y) = 8x^2 - 2y$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Resposta: O máximo absoluto é $\dfrac{65}{8} = 8,125$ que ocorre em

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}, -\frac{1}{8}\right).$$

O mínimo absoluto é -2 que ocorre em $(0,1)$.