1. Vamos mostrar que $S = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R})\ ;\ p(-3) = 0\}$ é um subespaço de $P_2(\mathbb{R})$. Para isso, temos que verificar que:

(i) $0_V = 0 + 0t + 0t^2 \in S$

(ii) Dados $p(t), q(t) \in S$, $(p+q)(t) \in S$

(iii) Dado $p(t) \in S$, $(\lambda p)(t) \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$

OBS: Note que verificar se um dado polinômio pertence a S é verificar se admite -3 como raiz

(i) Perceba que $0 + 0.(-3) + 0.(-3)^2 = 0$, ou seja, $0_V(-3) = 0$ (o polinômio nulo admite -3 como raiz);

(ii) $p(t), q(t) \in S \Rightarrow p(-3) = q(-3) = 0$

Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

$p(-3) = 0 \Rightarrow a_0 - 3a_1 + 9a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 3a_1 - 9a_2$ (I)

$q(-3) = 0 \Rightarrow b_0 - 3b_1 + 9b_2 = 0 \Rightarrow b_0 = 3b_1 - 9b_2$ (II)

$(p+q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2$

$\therefore (p+q)(-3) = (a_0 + b_0) - 3(a_1 + b_1) + 9(a_2 + b_2)$

Substituindo (I) e (II) temos:

$$(p+q)(-3) = 3a_1 - 9a_2 + 3b_1 - 9b_2 - 3a_1 - 3b_1 + 9a_2 + 9b_2$$
$$= 0 \quad \therefore \quad p+q \in S$$

(iii) Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in S$ (ou seja, $p(-3) = a_0 - 3a_1 + 9a_2 = 0$ $\circledast$)

Queremos verificar se $(\lambda p)(t) \in S$ (ou seja, se $(\lambda p)(-3) = 0$)

$$(\lambda p)(t) = \lambda a_0 + \lambda a_1 t + \lambda a_2 t^2$$

$$\Rightarrow (\lambda p)(-3) = \lambda(a_0 - 3a_1 + 9a_2) \overset{\circledast}{=} 0 \Rightarrow \lambda p \in S$$

② Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2(\mathbb{R})$.

Vimos que: $p(-3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 3a_1 - 9a_2}$

Portanto, um polinômio de S é da forma:

$$p(t) = 3a_1 - 9a_2 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\Rightarrow p(t) = a_1(3+t) + a_2(t^2 - 9)$$

Portanto, podemos tomar os seguintes geradores p/ S:

$$S = [(3+t), (t^2-9)]$$

③ Note que:

(I) Podemos considerar o seguinte isomorfismo:

$$P_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$$

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \longmapsto (a_0, a_1, a_2)$$

(II) A equação $\circledast$ representa a eq. de um plano

plano: $a_0 - 3a_1 + 9a_2 = 0$

Podemos considerar o vetor normal em $\mathbb{R}^3$ $(1,-3,9)$ e pensar no correspondente dele sob o isomorfismo: $1 - 3t + 9t^2 = q(t)$

SOMA DIRETA

AFIRMAÇÃO: $P_2(\mathbb{R}) = S \oplus [q(t)]$

Dem:

OBS: Dado qualquer polinômio $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$, $p(t)$ pode ser escrito como combinação linear dos geradores encontrados, pois:

$$\alpha(3+t) + \beta(t^2-9) + \gamma(1-3t+9t^2)$$
$$= \underbrace{(\beta+9\gamma)}_{a_2} t^2 + \underbrace{(\alpha-3\gamma)}_{a_1} t + \underbrace{(3\alpha-9\beta+\gamma)}_{a_0}$$

Note que em qualquer tentativa de relacionar a_0, a_1 e a_2, sobra um parâmetro livre. Ou seja, a_0, a_1 e a_2 são arbitrários.

---

(2) $S \cap [q(x)] = \emptyset$

Suponha que $\exists\, p(t)$ t.q. $p(t) = \alpha(3+t) + \beta(t^2-9)$ e $p(t) = \gamma(1-3t+9t^2)$, por absurdo. (c/ $\alpha \cdot \beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$)

Dessa forma, $\alpha(3+t) + \beta(t^2 - 9) = \gamma(1 - 3t + 9t^2)$

$$\Rightarrow \beta t^2 + \alpha t + (3\alpha - 9\beta) = 9\gamma t^2 - 3\gamma t + \gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 9\gamma & \text{(I)} \\ \alpha = -3\gamma & \text{(II)} \\ 3\alpha - 9\beta = \gamma & \text{(III)} \end{cases} \Rightarrow$$ Substituindo (I) e (II) em (III):

$$-9\gamma + 81\gamma = \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = \alpha = \beta$$

Absurdo, logo, $S \cap [q(t)] = \emptyset$

Portanto, $P_2(\mathbb{R}) = S \oplus [q(t)]$

$\blacksquare$