Topologia Algébrica 1 – Projeto 2

Considere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. O espaço tangente de S^n em x é

$$T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : x \perp v\}.$$

O espaço vetorial $T_x S^n$ herda de $\mathbb{R}^{n+1}$ uma orientação canônica: uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $T_x M$ é positiva se a base $\{v_1, \ldots, v_n, x\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tem a mesma orientação da base canônica.

Seja agora $f : S^n \to S^n$ uma aplicação suave, e seja $y \in \mathbb{R}^n$ um valor regular de f, ou seja, tal que $d_x f : TxS^n \to T_y S^n$ é sobrejetor (e portanto um isomorfismo) para todo $x \in f^{-1}(y)$. Neste caso, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots x_m\}$. O objetivo deste projeto é apresentar um roteiro para vocês demonstrarem o seguinte teorema:

Teorema: O grau de f pode ser calculado como

$$\deg f = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i,$$

onde $\varepsilon_i = +1$ se $d_{x_i} f$ preserva orientação, e $\varepsilon_i = -1$ se $d_{x_i} f$ inverte orientação.

1. Mostre que existem vizinhanças U_i de x_i, e V de y em S^n tais que
   (a) U_i e V são difeomorfos a $\mathbb{R}^n$ para todo i,
   (b) $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
   (c) $f : U_i \to V$ é um difeomorfismo para todo i.

   Conclua que para calcular o grau de f é preciso entender como calcular

   $$f_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$$

   onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo que preserva a origem. As próximas questões respondem a seguinte pergunta:

   Pergunta: Como calcular

   $$f_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$$

   onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo que preserva a origem?

2. Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo que preserva a origem, então

   $$f_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$$

   é local, i.e., se f e g coincidem numa vizinhança da origem então

   $$f_* = g_* H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0).$$

   Agora note que $d_0 f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Logo, faz sentido comparar f_* e $(d_0 f)_*$.

3. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que as restrições de f e $d_0 f$ a $B_\epsilon(0)$ são homotópicas por uma homotopia que fixa a origem.

4. Conclua que $f_* = (d_0 f)_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$.

   Pergunta: Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo linear. Como calcular

$$A_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)?$$

5. Mostre que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ é um retrato pro deformação de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}^n)$.

6. Se $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, mostre que existe $\tilde{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tal que $A, \tilde{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são homotópticos.

7. Se $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, mostre que $A_*(1) = \deg A|_{S^{n-1}}$. OBS: Note que $A(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$.

8. Conclua que se $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear, então $A_*(1)$ é igual a $+1$ se $\det A > 0$ e -1 se $\det A < 0$.

9. Demonstre o teorema enunciado no começo.