Agenda 01 de Álgebra Linear
Sistemas Lineares e Matrizes. Soluções de Sistemas e Aplicações

Prof. Jean Cerqueira Berni

1 Sistemas Lineares

Recorde que dados dois conjuntos, A, B não-vazios, o **produto cartesiano de** A **por** B é:

$$A \times B = \{(a_1, a_2) \mid (a_1 \in A)\&(a_2 \in B)\}$$

Assim, temos, por exemplo:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 \in \mathbb{R})\&(x_2 \in \mathbb{R})\}$$

Escrevemos $\mathbb{R}^2$ em vez de $\mathbb{R}^2$. Definimos "potências cartesianas" de um conjunto A (não-vazio) como:

$$A^2 = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 \in A)\&(x_2 \in A)\}$$
$$A^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1 \in A)\&(x_2 \in A)\&(x_3 \in A)\}$$
$$\vdots$$
$$A^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid (\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})(x_i \in A)\}$$

Definição 1. *Sejam $n \geq 1$ e $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Uma expressão da forma:*

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = \beta$$

*onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ representam variáveis, é uma **equação linear sobre** $\mathbb{R}$ **nas incógnitas** $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$*

Observe que de acordo com a definição formal dada acima, uma equação da forma:

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n - \beta = 0$$

não é uma equação linear com n incógnitas. Para que tenhamos uma equação *linear* é necessários termos constante em um dos membros e uma soma de monômios da forma $\alpha_i \cdot x_i$ no outro.

Definição 2. *Dada uma equação linear sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas $x_1, \cdots, x_n$:*

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = \beta$$

*uma **solução** é uma $n-$upla de números reais, não necessariamente distintos entre si, indicada por $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que:*

$$\alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \cdots + \alpha_n \cdot b_n = \beta$$

Exemplo 3. *Determinar uma solução da sequinte equação linear:*

$$2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

Qualquer terna ordenada da forma $(a, b, 1 - 2 \cdot a + b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação acima. Por exemplo, tomando $a = 1$ e $b = 2$, tem-se a terna $(1, 2, 2)$ satisfazendo:

$$2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1$$

Definição 4 (sistema linear). *Sejam m e n números naturais maiores ou iguais a 1 ($m, n \geq 1$). Um **sistema linear** S**, de** m **equações com** n **incógnitas** (ou simplesmente **sistema linear** $m \times n$) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Denotamos um tal sistema linear como segue:*

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

Vamos denotar a $i-$ésima dessas equações $(1 \leq i \leq m)$ por $\mathrm{eq}\,(i)$.

Exemplo 5.

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$$

é um sistema linear de 2 equações com 3 incógnitas.

Exemplo 6.

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 8x_1 & -7x_2 & +12x_3 & = 15 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 12 \end{cases}$$

é um sistema linear de 4 equações com 3 incógnitas.

Se na definição acima tivermos $m = n$, denominamos o sistema simplesmente por **sistema linear de ordem** n (ou $n \times n$).

Exemplo 7.

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & = 5 \\ 3x_1 & -x_2 & = -1 \end{cases}$$

é um sistema linear 2×2.

Observação 8. *Quando tivermos duas incógnitas, é comum escrevermos* x *em vez de* x_1 *e* y *em vez de* x_2. *Se tivermos, três, escrevemos* x *em vez de* x_1, y *em vez de* x_2 *e* z *em vez de* x_3. *Se há quatro incógnitas, é comum escrevermos* x *em vez de* x_1, y *em vez de* x_2, z *em vez de* x_3 *e* t *ou* w *em vez de* x_4. *A enumeração das variáveis por índices, embora pareça complexa no caso de "poucas" variáveis, é essencial para generalizarmos nosso estudo para sistemas mais gerais, com (muito mais de) quatro variáveis. Por exemplo, é comum escrevermos:*

$$\begin{cases} x & +2y & = 5 \\ 3x & -y & = -1 \end{cases} \quad \text{em vez de} \quad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & = 5 \\ 3x_1 & -x_2 & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -y & +z & = 1 \\ 2x & +y & +2z & = 0 \end{cases} \quad \text{em vez de} \quad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$$

e:

$$S : \begin{cases} 2x & -y & +z & -t & = 4 \\ 3x & +2y & -z & 2t & = 1 \\ 2x & -y & -z & -t & = 0 \\ 5x & & & +2t & = 1 \end{cases} \quad \text{em vez de} \quad \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 4 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ 5x_1 & & & +2x_4 & = 1 \end{cases}$$

Definição 9. *Uma **solução** do sistema linear:*

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

é uma $n-$upla de números reais, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ que é solução de cada uma *das equações do sistema, ou seja, tal que valem as seguintem m igualdades:*

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot b_1 + \alpha_{22} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot b_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$$

O conjunto de todas as $n-$uplas de números reais que são solução do sistema S é definido e denotado por:

$$\mathrm{Sol}\,.(S) = \left\{ (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R} \mid \bigwedge_{i=1}^{m} (\alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i) \right\},$$

onde:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} (\alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i) :=$$
$$:= (\alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1) \wedge (\alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (\alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m)$$

Exemplo 10. *Determinar uma solução para o sistema de 2 equações com 3 incógnitas dado a seguir:*

$$S : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y \qquad = 6 \end{cases}$$

Neste caso, podemos isolar uma das variáveis da segunda equação:

$$x = 6 - 2y$$

e substituir na primeira equação:

$$2 \cdot (6 - 2y) - y + z = 1 \iff$$
$$\iff 12 - 4y - y + z = 1 \iff$$

$$\iff 12 - 5y + z = 1 \iff$$
$$\iff z = 5y - 11$$

de modo que qualquer terna da forma $(6 - 2y, y, 5y - 11)$, com $y \in \mathbb{R}$, é solução do sistema dado. Assim, temos:

$$\text{Sol}\,.(S) = \{(6 - 2y, y, 5y - 11) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Por exemplo, para $y = 1$, tem-se que $(4, 1, -6)$ é solução do sistema dado, pois:

$$\begin{cases} 2 \cdot 4 - 1 + -6 = 1 \\ 4 + 2 \cdot 1 \qquad = 6 \end{cases}$$

logo $(4, 1, -6) \in \text{Sol}\,.(S)$.

Por outro lado, tomando $y = 0$, obtemos que $(6, 0, -11)$ também é solução, pois:

$$\begin{cases} 2 \cdot 6 - 0 + -11 = 1 \\ 6 + 2 \cdot 0 \qquad = 6 \end{cases}$$

de modo que $(6, 0, -11) \in \text{Sol}\,.(S)$.

Definição 11. *Um sistema linear de m equações com n incógnitas é* ***homogêneo*** *se tiver a forma:*

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = 0 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Observe que dado um sistema linear de m equações com n incógnitas, a $n-$upla $(0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ é sempre uma solução do sistema, denominada **solução trivial** do sistema homogêneo.

1.1 Classificação de Sistemas Lineares Quanto às Suas Soluções

Considere o seguinte sistema linear de m equações com n incógnitas:

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

Há exatamente três possibilidades quanto à existência de soluções para este sistema: pode ocorrer do sistema não ter nenhuma solução, ter exatamente uma solução ou mais de uma solução. Assim, elaboramos a seguinte:

Definição 12. *Seja S o sistema dado acima.*

- *Se S* não admite solução *(isto é, se $\text{Sol}.(S) = \varnothing$), dizemos que o sistema S é* ***incompatível****;*

Se S admite solução (ou seja, se $\text{Sol}.(S) \neq \varnothing$), dizemos que o sitema S é ***compatível****. Distinguimos dois subcasos desta situação:*

- *Se S* admite uma única solução*, dizemos que o sistema S é* ***compatível determinado****;*
- *Se S* admite mais de uma solução*, dizemos que o sistema S é* ***compatível indeterminado****;*

Analisemos alguns exemplos:

Exemplo 13. *Um sistema do tipo:*

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

com $\beta_i \neq 0$ é necessariamente ***incompatível****, uma vez que a $i-$ésima equação é equivalente à fórmula $0 = \beta_i \neq 0$, que é falsa para qualquer que seja a $n-$upla de números reais $(b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 14. *Um sistema do tipo:*

$$\begin{cases} x_1 & & & = \beta_1 \\ & x_2 & & = \beta_2 \\ & & \vdots & \\ & & & x_n = \beta_n \end{cases}$$

é compatível determinado, e $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ *é a sua solução única.*

Exemplo 15. *O sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y \quad\quad = 6 \end{cases}$$

é compatível e indeterminado, pois $(0, 3, 4)$ *e* $\left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0\right)$ *são soluções deste sistema.*

2 Sistemas Equivalentes

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Buscaremos considerar, daqui em diante, sistemas que possam ser obtidos de S de uma das seguintes maneiras:

(P) **Permutar** duas equações de S;

Se temos, originalmente, o sistema:

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

com $1 \leq i < j \leq m$, então ao aplicar uma **permutação** de linhas, obtemos o sistema:

$$S_{(P)} = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

(M) **Multiplicar** ambos os membros de uma das equações de S por um mesmo número real $\lambda \neq 0$; Se temos, originalmente, o sistema:

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

com $1 \leq i < j \leq m$, então ao aplicar uma **multiplicação** de ambos os membros da $i-$ésima equação por um número $\lambda \neq 0$, obtemos o sistema:

$$S_{(M)} = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \alpha_{i1} \cdot x_1 + \lambda \cdot \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{in} \cdot x_n = \lambda \cdot \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

(S) **Somar** aos dois membros de uma equação deste sistema uma *outra* equação desse mesmo sistema cujos dois membros foram multiplicados pelo mesmo número real não-nulo; Se temos, originalmente, o sistema:

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

com $1 \leq i < j \leq m$, então ao aplicar uma **soma** aos dois membros da $i-$ésima equação pelo produto dos dois membros da $j-$ésima equação por $\lambda \neq 0$, obtemos o sistema:

$$S_{(S)} = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n + \lambda \cdot (\alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n) = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

ou, equivalentemente:

$$S_{(S)} = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1}) \cdot x_1 + (\alpha_{i2} + \lambda \cdot \alpha_{j2}) \cdot x_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \lambda \cdot \alpha_{jn}) \cdot x_n = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

Teorema 16. *Seja:*

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

um sistema linear compatível (determinado ou indeterminado). Denotando por $S_{(P)}$ o sistema obtido de S por uma permutando duas de suas equações, por $S_{(M)}$ o sistema obtido de S multiplicando ambos os membros de uma de suas equações por um número $\lambda \neq 0$, e por $S_{(S)}$ o sistema obtido de S somando ambos os membros de uma de suas equações por um múltiplo não-nulo de uma outra *equação, tem-se:*

$$\mathrm{Sol}\,.\,(S) = \mathrm{Sol}\,.\,(S_{(P)}) = \mathrm{Sol}\,.\,(S_{(M)}) = \mathrm{Sol}\,.\,(S_{(S)})$$

Demonstração. Vamos analisar cada caso individualmente. Vamos considerar, em todos os casos, o sistema:

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ {\color{red}\alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i} \\ \vdots \\ {\color{blue}\alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

com $1 \leq i < j \leq m$.

Suponhamos, por hipótese, que $(b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_j, \cdots, b_n) \in \mathrm{Sol}\,.\,(S)$, ou seja, que tenhamos:

Hipótese: são verdadeiras as equações: $\begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot b_1 + \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$

Caso 1: O novo sistema foi obtido por (P), e temos:

$$S_{(P)} = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

Uma vez que, por hipótese, tem-se, em particular:

$$\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i$$

e

$$\alpha_{j1} \cdot b_1 + \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n = \beta_j$$

de modo que valem, naturalmente:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot b_1 + \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$$

ou seja, $(b_1, \cdots, b_n)$ também é solução de $S_{(P)}$. Fica, assim, estabelecido que toda solução de S é também uma solução de $S_{(P)}$, ou seja, que $\mathrm{Sol}.(S) \subseteq \mathrm{Sol}.(S_{(P)})$. A inclusão recíproca, isto é, $\text{Sol}\,.\,(S_{(P)}) \subseteq \text{Sol}\,.\,(S)$ é demonstrada simplesmente permutando i e j na argumentação acima. Assim, $\text{Sol}\,.\,(S) = \text{Sol}\,.\,(S_{(P)})$.

Caso 2: O novo sistema foi obtido por (M), e temos:

$$S_{(M)} = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \alpha_{i1} \cdot x_1 + \lambda \cdot \alpha_{i2} \cdot x_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{in} \cdot x_n = \lambda \cdot \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

Por hipótese, temos em particular:

$$\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i \tag{1}$$

Ao multiplicar ambos os membros de (1) por λ, obtemos que vale:

$$\lambda \cdot \alpha_{i1} \cdot b_1 + \lambda \cdot \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{in} \cdot b_n = \lambda \cdot \beta_i$$

Assim, valem as seguintes equações:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \alpha_{i1} \cdot b_1 + \lambda \cdot \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{in} \cdot b_n = \lambda \cdot \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$$

ou seja, $(b_1, \cdots, b_n)$ é solução de $S_{(M)}$. Fica, assim, estabelecido que $\text{Sol}\,.\,(S) \subseteq \text{Sol}\,.\,(S_{(M)})$. Vamos, agora, demonstrar que $\text{Sol}\,.\,(S_{(M)}) \subseteq \text{Sol}\,.\,(S)$, ou seja, que toda $n-$upla $(b_1, \cdots, b_n)$ que satisfaz simultaneamente:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \alpha_{i1} \cdot b_1 + \lambda \cdot \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{in} \cdot b_n = \lambda \cdot \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$$

também satisfaz o sistema S.

Uma vez que vale, em particular:

$$\lambda \cdot \alpha_{i1} \cdot b_1 + \lambda \cdot \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{in} \cdot b_n = \lambda \cdot \beta_i \tag{2}$$

e como $\lambda \neq 0$, ao multiplicar ambos os membros de (2) por $\frac{1}{\lambda}$, obtemos a validade da seguinte equação:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \alpha_{i1} \cdot b_1 + \lambda \cdot \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{in} \cdot b_n) = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \beta_i)$$

ou seja, vale:

$$\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot \alpha_{i1} \cdot b_1 + \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot \alpha_{in} \cdot b_n = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot \beta_i$$

$$\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i$$

Como todas as demais equações são satisfeitas, segue que $(b_1, \cdots, b_n)$ é solução do sistema original, S. Desta forma, $\mathrm{Sol}.(S_{(M)}) \subseteq \mathrm{Sol}.(S)$. Logo, $\mathrm{Sol}.(S) = \mathrm{Sol}.(S_{(M)})$.

Caso 3: O novo sistema foi obtido por (S), e temos:

$$S_{(S)} = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \qquad \vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1}) \cdot x_1 + (\alpha_{i2} + \lambda \cdot \alpha_{j2}) \cdot x_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \lambda \cdot \alpha_{jn}) \cdot x_n = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot x_n = \beta_j \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

Como, por hipótese, valem em particular:

$$\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i \tag{3}$$

e

$$\alpha_{j1} \cdot b_1 + \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n = \beta_j \tag{4}$$

ao multiplicar os dois membros de (4) por $\lambda \neq 0$ obtemos a validade da equação:

$$\lambda \cdot \alpha_{j1} \cdot b_1 + \lambda \cdot \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \lambda \cdot \alpha_{jn} \cdot b_n = \lambda \cdot \beta_j \tag{5}$$

Agora, somando o membro direito de (3) ao membro direito de (5), obtemos $\beta_i + \lambda \cdot \beta_j$, ou seja:

$$\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n + \lambda \cdot (\alpha_{j1} \cdot b_1 + \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n) = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j$$

que pode ser reescrito como:

$$(\alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1}) \cdot b_1 + (\alpha_{i2} + \lambda \cdot \alpha_{j2}) \cdot b_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \lambda \cdot \alpha_{jn}) \cdot b_n = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j$$

ou seja, valem:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1}) \cdot b_1 + (\alpha_{i2} + \lambda \cdot \alpha_{j2}) \cdot b_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \lambda \cdot \alpha_{jn}) \cdot b_n = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n = \beta_j \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$$

o que significa que $(b_1, \cdots, b_n)$ é solução de $S_{(S)}$. Fica, assim, estabelecido que $\operatorname{Sol.}(S) \subseteq \operatorname{Sol.}(S_{(M)})$. Resta demonstrarmos a inclusão reversa, ou seja, que $\operatorname{Sol.}(S_{(S)}) \subseteq \operatorname{Sol.}(S)$.

Seja $(b_1, \cdots, b_n) \in \operatorname{Sol.}(S_{(S)})$, ou seja, suponha que valham:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1}) \cdot b_1 + (\alpha_{i2} + \lambda \cdot \alpha_{j2}) \cdot b_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \lambda \cdot \alpha_{jn}) \cdot b_n = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_{j1} \cdot x_1 + \alpha_{j2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n = \beta_j \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$$

Uma vez que:

$$\begin{aligned} \beta_i + \lambda \cdot \beta_j &= (\alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1}) \cdot b_1 + (\alpha_{i2} + \lambda \cdot \alpha_{j2}) \cdot b_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \lambda \cdot \alpha_{jn}) \cdot b_n = \\ &= (\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n) + \lambda \cdot (\alpha_{j1} \cdot b_1 + \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n) = \\ &= (\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n) + \lambda \cdot \beta_j \end{aligned}$$

concluímos que:

$$\beta_i + \cancel{\lambda \cdot \beta_j} = (\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n) + \cancel{\lambda \cdot \beta_j}$$

ou seja:

$$\alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i$$

Desta forma, como valem:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{12} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot b_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \cdot b_1 + \alpha_{i2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot b_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{j1} \cdot b_1 + \alpha_{j2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot b_n = \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot b_1 + \alpha_{m2} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot b_n = \beta_m \end{cases}$$

fica estabelecido que $(b_1, \cdots, b_n) \in \text{Sol}.(S)$. Assim, demonstramos que $\text{Sol}.(S_{(S)}) \subseteq \text{Sol}.(S)$, e tem-se $\text{Sol}.(S) = \text{Sol}.(S_{(S)})$.

Pelos três casos analisados acima, concluímos que $\text{Sol}.(S) = \text{Sol}.(S_{(P)}) = \text{Sol}.(S_{(M)}) = \text{Sol}.(S_{(S)})$. $\square$

Proposição 17. *Toda operação elementar é reversível, ou seja, se e é uma operação elementar sobre um sistema linear $m \times n$ S, então existe uma operação elementar f tal que $(S_{(e)})_{(f)} = S$.*

Demonstração. Vamos fazer um estudo de cada caso.

Caso 1: $e = P$, uma permutação que troca a $i-$ésima equação pela $j-$ésima equação ($1 \leq i \neq j \leq m$). Neste caso, basta tomarmos f como sendo a permutação que troca a $j-$ésima equação pela $i-$ésima equação, e ao aplicar a operação elementar f ao sistema $S_{(e)}$, obtemos novamente o sistema original, S.

Caso 2: $e = M$, ou seja, a $i-$ésima equação de $S_{(e)}$, que denotamos por $\text{eq}\,(i)'$, é $\lambda \cdot \text{eq}\,(i)$, onde $\lambda \neq 0$ e $\text{eq}\,(i)$ é a $i-$ésima equação do sistema S (a única que foi alterada pela operação elementar). Neste caso, basta considerarmos f como a operação que substitui a $i-$ésima equação de $S_{(e)}$, $\text{eq}\,(i)'$, por $\frac{1}{\lambda} \cdot \text{eq}\,(i)'$, e teremos a $i-$ésima equação do sistema $(S_{(e)})_{(f)}$ igual a $\frac{1}{\lambda} \cdot \text{eq}\,(i)' = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \text{eq}\,(i)) = \text{eq}\,(i)$, e assim, retornamos ao sistema original.

Caso 3: $e = S$, ou seja, existe $\lambda \neq 0$ tal que a i-ésima equação de $S_{(e)}$, que denotaremos por eq $(i)'$, é eq $(i) + \lambda \cdot$ eq (j), onde $\lambda \neq 0$, eq (j) é $j-$ésima equação do sistema S e eq (i) é a $i-$ésima equação do sistema S (a única que foi alterada pela operação elementar). Para obter o sistema original a partir de $S_{(e)}$, é suficiente considerar a operação elementar f que substitui a $i-$ésima equação de $S_{(e)}$, eq $(i)'$ por eq $(i)' + (-\lambda \cdot \text{eq}\,(j))$. Assim, teremos a $i-$ésima equação do sistema $(S_{(e)})_{(f)}$ igual a eq $(i)' + (-\lambda \cdot \text{eq}\,(j)) = \text{eq}\,(i) + \lambda \cdot \text{eq}\,(j) - \lambda \cdot \text{eq}\,(j) = \text{eq}\,(i)$. Assim, retornamos ao sistema original. □

A proposição acima nos permite definir a **inversa da operação elementar** e, e^{-1}, como sendo a operação elementar f tal que $(S_{(e)})_{(f)} = S$.

Definição 18. *Dado um sistema linear de m equações com n incógnitas, S, qualquer uma das modificações explicadas acima, (P), (M) ou (S) que se faça com esse sistema recebe o nome de **operação elementar com** S. Se um sistema S_1 for obtido de um sistema linear S por um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é **equivalente** a S.* ***Notação:*** *$S_1 \sim S$.*

É fácil verificar que a relação $\sim$, definida acima, satisfaz as seguintes propriedades:

(a) **Reflexividade:** para qualquer sistema linear de m equações com n incógnitas, S, tem-se:

$$S \sim S$$

uma vez que S é obtido de S pela permutação identidade;

(b) **Simetria:** Dados sistemas lineares de m equações com n incógnitas S, S_1, tem-se

$$S_1 \sim S \Rightarrow S \sim S_1$$

Suponhamos que $S_1 \sim S$, de modo que existem $e_1, \cdots, e_k$ operações elementares tais que:

$$S_1 = ((((S_{(e_1)})_{(e_2)}) \cdots)_{(e_{k-1})})_{(e_k)}$$

Aplicando as operações $e_k^{-1}, e_{k-1}^{-1}, \cdots, e_2^{-1}, e_1^{-1}$ a S_1, obtemos:

$$(((((S_1)_{(e_k^{-1})})_{(e_{k-1}^{-1})}) \cdots)_{(e_2^{-1})})_{(e_1^{-1})} =$$
$$= (((((((((S_{(e_1)})_{(e_2)}) \cdots)_{(e_{k-1})})_{(e_k)})_{(e_k^{-1})})_{(e_{k-1}^{-1})}) \cdots)_{(e_2^{-1})})_{(e_1^{-1})} = S$$

logo $S \sim S_1$.

(c) **Transitividade:** Dados sistemas lineares de m equações com n incógnitas S, S_1, S_2, tem-se:

$$(S_1 \sim S)\&(S_2 \sim S_1) \Rightarrow (S_2 \sim S)$$

De fato, como $S_1 \sim S$, existem operações elementares $e_1, \cdots, e_k$ tais que:

$$S_1 = (((((S)_{(e_1)})_{(e_2)}) \cdots)_{(e_{k-1})})_{(e_k)}$$

e como $S_2 \sim S_1$, existem operações elementares $f_1, \cdots, f_\ell$ tais que:

$$S_2 = (((((S_1)_{(f_1)})_{(f_2)}) \cdots)_{(f_{\ell-1})})_{(f_\ell)}$$

Desta forma, tem-se:

$$S_2 = ((((((((((S)_{(e_1)})_{(e_2)}) \cdots)_{(e_{k-1})})_{(e_k)})_{(f_1)})_{(f_2)}) \cdots)_{(f_{\ell-1})})_{(f_\ell)}$$

de modo que S_2 pode ser obtido de S pela sequência finita de operações elementares: $e_1, \cdots, e_k, f_1, \cdots, f_\ell$, e portanto $S_2 \sim S$.

Observe que pelo **Teorema 16**, se $S_1 \sim S$, então toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa. Em particular, se S é incompatível e $S_1 \sim S$, então S_1 também é incompatível.

Desta forma, podemos engendrar um mecanismo muito útil para a procura de soluções de um sistema linear S.

A ideia é, dado um sistema linear $m \times n$, através das operações elementares, obter um sistema equivalente porém "mais simples de resolver". Vamos analisar o que queremos dizer sobre "sistema mais simples de resolver".

Definição 19 (sistema linear escalonado). *Um sistema linear $m \times n$ é chamado de **sistema linear escalonado** quando na primeira linha do sistema ocorrem* somente *as incógnitas $x_{j_1}, \cdots, x_n$, onde $1 \leq j_1$, na segunda linha ocorrem* somente *as incógnitas $x_{j_2}, \cdots, x_n$, onde $1 \leq j_1 < j_2$, na terceira linha ocorrem* somente *as incógnitas $x_{j_3}, \cdots, x_n$, com $1 \leq j_1 < j_2 < j_3$ e assim por diante, de modo que na $k-$ésima equação ($k \in \{1, \cdots, m-1\}$) ocorram* somente *as incógnitas $x_{j_k}, \cdots, x_n$, com $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} < j_k < m$ e $k+1 \leq m$.*

Um modo alternativo (e talvez mais fácil de compreender) de dizer que um sistema de m equações lineares com n incógnitas é um **sistema linear escalonado** é o seguinte: em cada equação as incógnitas aparecem pela ordem determinada por seus índices (ou seja, se $i < j$ então x_i ocorre antes de x_j) e em cada equação, a partir da segunda, o índice da primeira variável que ocorre na $k-$ésima equação é estritamente maior do que o índice da primeira variável que ocorre na $(k-1)-$ésima linha.

O sistema estará escalonado quando $\ell < m \Rightarrow j_\ell < j_m$
Um sistema linear escalonado $m \times n$, portanto, é um sistema linear da seguinte forma:

$$S : \begin{cases} \alpha_{1j_1} \cdot x_{j_1} + & \cdots & \cdots & \cdots & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = \beta_1 \\ & \alpha_{2j_2} \cdot x_{j_2} + & \cdots & \cdots & +\alpha_{2n} \cdot x_n & = \beta_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \alpha_{kj_k} \cdot x_{j_k} + & \cdots & +\alpha_{kn} \cdot x_n & = \beta_k \\ & & & & 0 \cdot x_n & = \beta_{k+1} \end{cases}$$

onde $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq m$ e $\alpha_{1j_1} \neq 0, \alpha_{2j_2} \neq 0, \cdots, \alpha_{kj_k} \neq 0$. Eliminamos outras equações do tipo $0 = 0$.

Exemplo 20. *O sistema:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ - 1x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

está escalonado, pois $j_1 = 1 < j_2 = 2 < j_3 = 3$.

Exemplo 21. *O sitema:*

$$S : \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & -3x_4 & = 0 \\ & & x_3 & -x_4 & = 1 \\ & & & 2x_4 & = 2 \end{cases}$$

é um ***sistema linear escalonado****, pois tem-se:* $j_1 = 1 < j_2 = 3 < j_3 = 4$.

Exemplo 22. *O sitema:*

$$S : \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & -3x_4 & = 0 \\ & & x_3 & -x_4 & = 1 \\ & & 2x_3 & & = 2 \end{cases}$$

não é um sistema linear escalonado*, pois* $j_1 = 1 < j_2 = 3 \not< j_3 = 3$.

Exemplo 23. *O sistema:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - + x_3 = 4 \\ - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

não *está escalonado, pois* $j_1 = 1 \not< 1 = j_2 < j_3 = 2$.

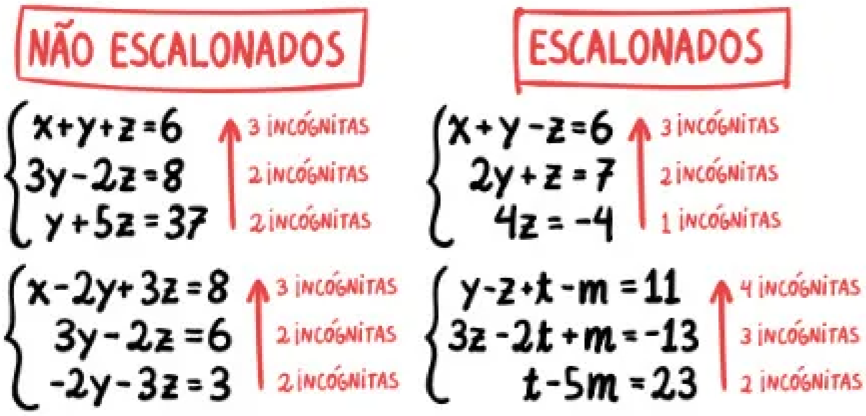


Figura 1: Exemplos de sistemas escalonados e não escalonados. Extraído de https://resumos.mesalva.com/escalonamento/

Exemplo 24. *O sistema:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 1x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

não *está escalonado, pois* $j_1 = 1 \not< j_2 = 1 < j_3$.

Através de sucessivas operações elementares podemos obter, para qualquer sistema linear $m \times n$, um sistema escalonado equivalente. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 25. *Obter um sistema escalonado equivalente ao sistema:*

$$S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Para isto, vamos aplicar a S uma sequência de operações elementares visando fazer com que o número de coeficientes iniciais nulos seja maior em cada equação, a partir da segunda, do que na imediatamente superior. Veja abaixo como fazemos isto.

Primeiramente vamos substituir a segunda equação, eq (2), por eq $(2)' = \text{eq}\,(2) - 2 \cdot \text{eq}\,(1)$ (efetuando uma operação elementar do tipo (S)), obtendo:

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ 2x - \ \ y + \ \ z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \overset{\text{eq}\,(2)'=\text{eq}\,(2)-1\cdot\text{eq}\,(1)}{\sim} \begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ \qquad y - \ \ z = 2 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Nosso próximo passo é substituir a terceira equação, $\text{eq}\,(3)'$, por $\text{eq}\,(3)' - \text{eq}\,(2)'$ (novamente efetuando uma operação elementar do tipo (S)):

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ \qquad y - \ \ z = 2 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \overset{\text{eq}\,(3)''=\text{eq}\,(3)'-\text{eq}\,(2)'}{\sim} \begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ \qquad y - \ \ z = 2 \\ \quad -y + z = -1 \end{cases}$$

Note que, por transitividade da relação de equivalência elementar, tem-se o sistema S elementarmente equivalente ao sistema linear dado acima:

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ 2x - \ \ y + \ \ z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ \qquad y - \ \ z = 2 \\ \quad -y + z = -1 \end{cases}$$

Vamos aplicar mais a operação elementar (S) a este último sistema, substituindo $\text{eq}\,(3)''$ por $\text{eq}\,(3)'' + \text{eq}\,(2)''$, obtendo:

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ \qquad y - \ \ z = 2 \\ \qquad\quad 0 \ \ = 1 \end{cases}$$

Novamente, pela transitividade da relação de equivalência elementar, tem-se:

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ 2x - \ \ y + \ \ z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ \qquad y - \ \ z = 2 \\ \qquad\quad 0 \ \ = 1 \end{cases}$$

Em virtude da ocorrência da igualdade (falsa) $0 = 1$, este sistema é incompatível; Sendo o sistema S equivalente a um sistema incompatível, S é, por si mesmo, incompatível.

3 Sistemas Escalonados

Consideremos um sistema linear de m equações com n incógnitas, que tem o seguinte aspecto:

$$S: \begin{cases} \alpha_{1j_1} \cdot x_{j_1} + & \cdots & \cdots & \cdots & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = \beta_1 \\ & \alpha_{2j_2} \cdot x_{j_2} + & \cdots & \cdots & +\alpha_{2n} \cdot x_n & = \beta_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \alpha_{kj_k} \cdot x_{j_k} + \cdots & +\alpha_{kn} \cdot x_n & = \beta_k \\ & & & & 0 \cdot x_n & = \beta_{k+1} \end{cases}$$

onde $\alpha_{1j_1} \neq 0, \alpha_{2j_2} \neq 0, \cdots, \alpha_{kj_k} \neq 0$ e cada $j_i \geq 1$.

Como já vimos, se tivermos $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, diremos que S é um **sistema linear escalonado**. É claro que $\beta_{k+1} = 0$, a última equação de S pode ser eliminada do sistema. Logo, num sistema. Logo, num sistema escalonado, o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na precedente, sendo que as incógnitas sempre permanecem na mesma ordem em todas as equações.

Exemplo 26. *O sitema:*

$$S: \begin{cases} 2x & -y & -z & -3t & = 0 \\ & & z & -t & = 1 \\ & & & 2t & = 2 \end{cases}$$

*é um **sistema linear escalonado**. Embora não tenhamos enumerado as incógnitas, consideramos $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ e $x_4 = t$.*

Proposição 27. *Todo sistema linear S é equivalente a um sistema linear escalonado.*

Demonstração. Consideremos o sistema:

$$S: \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 & +\alpha_{12} \cdot x_2 & + \cdots & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 & +\alpha_{22} \cdot x_2 & + \cdots & +\alpha_{2n} \cdot x_n & = \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 & +\alpha_{m2} \cdot x_2 & + \cdots & +\alpha_{mn} \cdot x_n & = \beta_m \end{cases}$$

Para escalonar este sistema, primeiramente vamos "eliminar" a incógnita x_1 de todas as equações a partir da segunda. Para isto, verificamos se $\alpha_{11} = 0$ – sendo este o caso, permutamos a primeira equação com a primeira das seguintes que tenha $\alpha_{i1} \neq 0$. Sem perda de generalidade, vamos supor que o sistema já seja tal que $\alpha_{11} \neq 0$. Em seguida, consideramos o escalar:

- $r_{21} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq (2) por eq $(2) - r_{21} \cdot$ eq (1)
- $r_{31} = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq (3) por eq $(3) - r_{31} \cdot$ eq (1)
- $r_{i1} = \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq (i) por eq $(i) - r_{i1} \cdot$ eq (1)

- $r_{m1} = \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq (m) por eq $(m) - r_{m1} \cdot$ eq (1)

Desta forma, através dessas $(m-1)$ operações elementares, obtemos um sistema da forma abaixo:

$$S_1 : \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 & +\alpha_{12} \cdot x_2 & + \cdots & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = \beta_1 \\ & +\gamma_{22} \cdot x_2 & + \cdots & +\gamma_{2n} \cdot x_n & = \beta_2' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \gamma_{m2} \cdot x_2 & + \cdots & +\alpha_{mn} \cdot x_n & = \beta_m' \end{cases}$$

Na sequência, buscamos eliminar a terceira incógnita de todas as equações a partir da terceira, considerando o escalar:

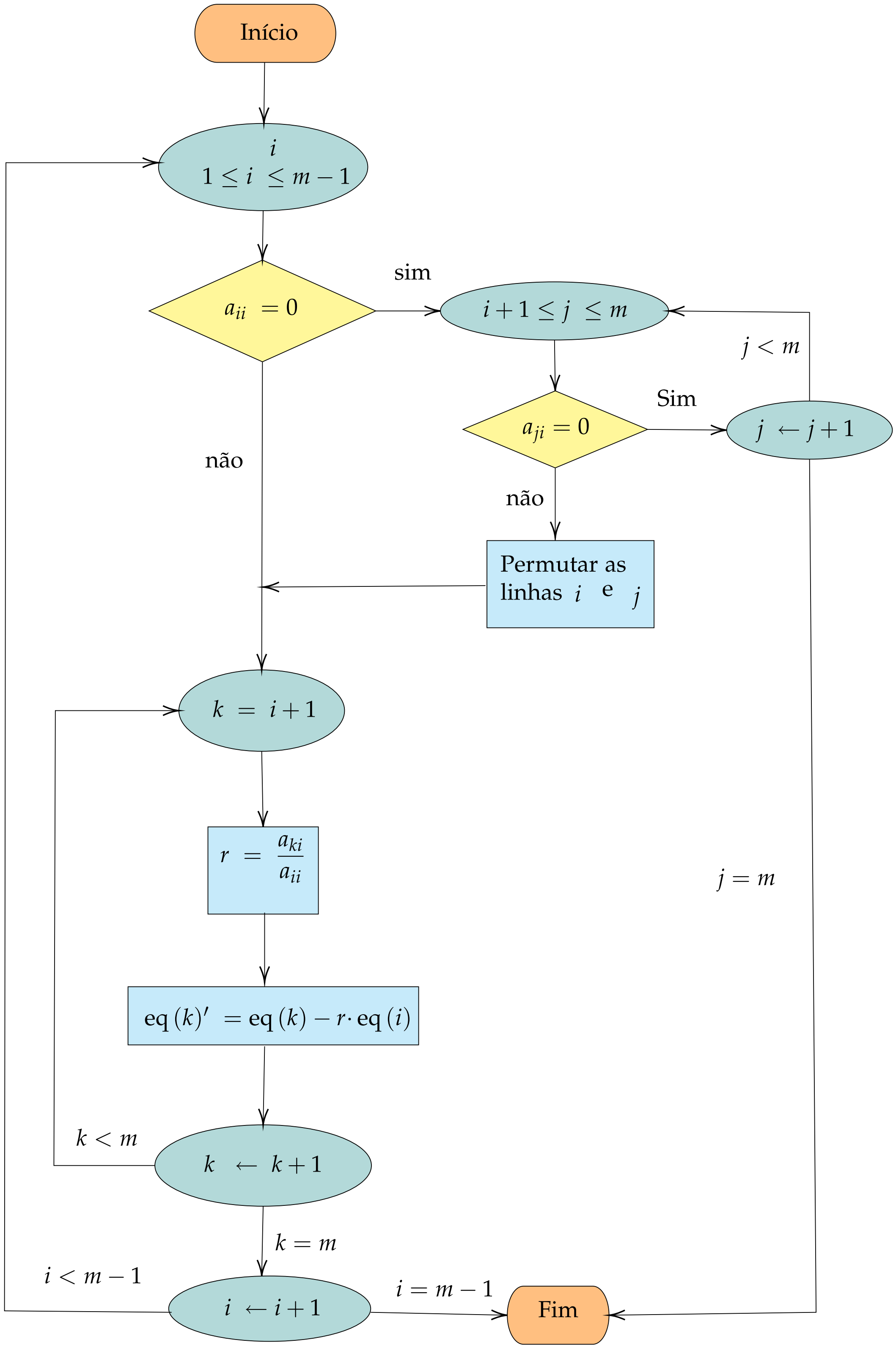
- $r_{31} = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq $(3)'$ por eq $(3)' - r_{31} \cdot$ eq $(1)'$
- $r_{41} = \frac{\alpha_{41}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq $(4)'$ por eq $(4) - r_{41} \cdot$ eq $(1)'$
- $r_{i1} = \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq $(i)'$ por eq $(i)' - r_{i1} \cdot$ eq $(1)'$
- $r_{m1} = \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}$ e substituímos a equação eq $(m)'$ por eq $(m)' - r_{m1} \cdot$ eq $(1)'$

Prosseguimos assim sucessivamente até que na $m-$ésima equação somente ocorram variáveis com índice estritamente maior do que o menor índice da primeira variável não-nula que ocorre na $(m-1)-$ésima linha. $\square$

Vejamos como podemos sistematizar o processo de escalonamento de um sistema de n equações lineares com n incógnitas:

- Para cada $i \in \{1, \cdots, m-1\}$, iniciando por $i = 1$ e incrementando uma unidade de cada vez, verificamos se $a_{ii} \neq 0$. Se for este o caso, consideramos o escalar $r = \frac{a_{ki}}{a_{ii}}$, fazemos $k = i+1$ e efetuamos uma operação elementar do tipo (S), substituindo a $k-$ésima equação por ela mesma somada a $-r$ multiplicado pela $i-$ésima equação; Isto fará com que todos os coeficientes do sistema da forma a_{k1}, $i+1 \leq k \leq n$, do novo sistema equivalente obtido se anulem;
- Se $a_{ii} = 0$, nós permutamos a $i-$ésima linha com a $(i+1)-$ésima linha; Se a $(i+1)-$ésima equação for tal que $a_{i+1i+1} = 0$, vamos permutando a $i-$ésima equação com a primeira equação (digamos a $\ell-$ésima) satisfazendo $a_{\ell\ell} \neq 0$, $\ell \in \{i+2, \cdots, n\}$. Repetimos este processo para $k \in \{i+1, i+2, \cdots, n-1\}$
- Ao terminarmos as substituições, se $i < n-1$, incrementamos i em uma unidade e repetimos o procedimento;

Podemos converter o processo de escalonamento descrito acima em um fluxograma, como segue:


Início
i
$1 \leq i \leq m-1$
$a_{ii} = 0$
sim
$i+1 \leq j \leq m$
$j < m$
$a_{ji} = 0$
Sim
$j \leftarrow j+1$
não
não
Permutar as linhas i e j
$k = i+1$
$r = \frac{a_{ki}}{a_{ii}}$
$j = m$
$\text{eq}(k)' = \text{eq}(k) - r \cdot \text{eq}(i)$
$k < m$
$k \leftarrow k+1$
$k = m$
$i < m-1$
$i \leftarrow i+1$
$i = m-1$
Fim

A importância dos sistemas escalonados reside na **Proposição 27**. Sendo todo sistema equivalente a a um sistema escalonado, bastará que saibamos lidar com sistemas escalonados e saibamos reduzir um sistema qualquer a um escalonado.

Exemplo 28. *Obter, mediante operações elementares, um sistema escalonado que seja equivalente ao sistema dado a seguir:*

$$S:\left\{\begin{array}{lllll} 2x & -y & +z & -t & =4 \\ 3x & +2y & -z & +2t & =1 \\ 2x & -y & -z & -t & =0 \\ 5x & & & +2t & =1 \end{array}\right.$$

Temos:

$$S=\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & +z & -t & =4 & \text{eq}\,(1) \\ 3x & +2y & -z & +2t & =1 & \text{eq}\,(2) \\ 2x & -y & -z & -t & =0 & \text{eq}\,(3) \\ 5x & & & +2t & =1 & \text{eq}\,(4) \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\text{eq}\,(2)'=\tfrac{2}{3}\cdot\text{eq}\,(2)}\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & +z & -t & =4 & \text{eq}\,(1)' \\ 2x & +\frac{4}{3}y & -\frac{2}{3}z & +\frac{4}{3}t & =\frac{2}{3} & \text{eq}\,(2)' \\ 2x & -y & -z & -t & =0 & \text{eq}\,(3)' \\ 5x & & & +2t & =1 & \text{eq}\,(4)' \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\text{eq}\,(4)''=\tfrac{2}{5}\cdot\text{eq}\,(4)'}\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & +z & -t & =4 & \text{eq}\,(1)'' \\ 2x & +\frac{4}{3}y & -\frac{2}{3}z & +\frac{4}{3}t & =\frac{2}{3} & \text{eq}\,(2)'' \\ 2x & -y & -z & -t & =0 & \text{eq}\,(3)'' \\ 2x & & & +\frac{4}{5}t & =\frac{2}{5} & \text{eq}\,(4)'' \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\text{eq}\,(2)'''=\text{eq}\,(2)''-\text{eq}\,(1)''}\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & +z & -t & =4 & \text{eq}\,(1)''' \\ & +\frac{7}{3}y & -\frac{5}{3}z & +\frac{7}{3}t & =-\frac{10}{3} & \text{eq}\,(2)''' \\ 2x & -y & -z & -t & =0 & \text{eq}\,(3)''' \\ 2x & & & +\frac{4}{5}t & =\frac{2}{5} & \text{eq}\,(4)''' \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\text{eq}\,(3)^{(IV)}=\text{eq}\,(3)'''-\text{eq}\,(1)'''}\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & +z & -t & =4 & \text{eq}\,(1)^{(IV)} \\ & +\frac{7}{3}y & -\frac{5}{3}z & +\frac{7}{3}t & =-\frac{10}{3} & \text{eq}\,(2)^{(IV)} \\ & & -2z & & =-4 & \text{eq}\,(3)^{(IV)} \\ 2x & & & +\frac{4}{5}t & =\frac{2}{5} & \text{eq}\,(4)^{(IV)} \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\text{eq}\,(4)^{(V)}=\text{eq}\,(4)^{(IV)}-\text{eq}\,(1)^{(IV)}}\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & +z & -t & =4 & \text{eq}\,(1)^{(V)} \\ & +\frac{7}{3}y & -\frac{5}{3}z & +\frac{7}{3}t & =-\frac{10}{3} & \text{eq}\,(2)^{(V)} \\ & & -2z & & =-4 & \text{eq}\,(3)^{(V)} \\ & y & -z & +\frac{9}{5}t & =-\frac{18}{5} & \text{eq}\,(4)^{(V)} \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\text{eq}\,(4)^{(VI)}=\text{eq}\,(4)^{(V)}-\frac{3}{7}\,\text{eq}\,(2)^{(V)}} \left\{\begin{array}{rrrrrl} 2x & -y & +z & -t & = 4 & \text{eq}\,(1)^{(VI)} \\ & +\frac{7}{3}y & -\frac{5}{3}z & +\frac{7}{3}t & = -\frac{10}{3} & \text{eq}\,(2)^{(VI)} \\ & & -2z & & = -4 & \text{eq}\,(3)^{(VI)} \\ & & -\frac{2}{7}z & +\frac{4}{5}t & = -\frac{76}{35} & \text{eq}\,(4)^{(VI)} \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\text{eq}\,(3)^{(VII)}=\text{eq}\,(3)^{(VII)}-7\,\text{eq}\,(4)^{(V)}} \left\{\begin{array}{rrrrrl} 2x & -y & +z & -t & = 4 & \text{eq}\,(1)^{(VII)} \\ & +\frac{7}{3}y & -\frac{5}{3}z & +\frac{7}{3}t & = -\frac{10}{3} & \text{eq}\,(2)^{(VII)} \\ & & & -\frac{28}{5}t & = \frac{56}{5} & \text{eq}\,(3)^{(VII)} \\ & & -\frac{2}{7}z & +\frac{4}{5}t & = -\frac{76}{35} & \text{eq}\,(4)^{(VII)} \end{array}\right.$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{c}\text{eq}\,(3)^{(VIII)}=\text{eq}\,(4)^{(VII)} \\ \text{eq}\,(4)^{(VIII)}=\text{eq}\,(3)^{(VII)}\end{array}} \left\{\begin{array}{rrrrrl} 2x & -y & +z & -t & = 4 & \text{eq}\,(1)^{(VIII)} \\ & +\frac{7}{3}y & -\frac{5}{3}z & +\frac{7}{3}t & = -\frac{10}{3} & \text{eq}\,(2)^{(VIII)} \\ & & -\frac{2}{7}z & +\frac{4}{5}t & = -\frac{76}{35} & \text{eq}\,(3)^{(VIII)} \\ & & & -\frac{28}{5}t & = \frac{56}{5} & \text{eq}\,(4)^{(VIII)} \end{array}\right.$$

que é um sistema escalonado. Podemos resolver as equações retroativamente, ou seja, resolvendo a última para, em seguida, substituir o valor encontrado na penúltima e assim por diante.

De $\text{eq}\,(4)^{(VIII)}$, concluímos que:

$$-\frac{28}{5}t = \frac{56}{5} \iff t = t = -2$$

Substituindo $t = -2$ em $\text{eq}\,(3)^{(VIII)}$, obtemos:

$$-\frac{2}{7}z = -\frac{76}{35} + \frac{8}{5} = -\frac{20}{35} \iff z = 2$$

Substituindo $z = 2$ e $t = -2$ em $\text{eq}\,(2)^{(VIII)}$, obtemos $y = 2$, e substituindo estes valores em $\text{eq}\,(1)^{(VIII)}$, obtém-se, finalmente $x = 1$. Assim, concluímos que $x = 1, y = 2, z = 2$ e $t = -2$, de modo que a única solução so sistema é $(1, 2, 2, -2)$.

4 Discussão e Resolução de Um Sistema Linear

Discutir um sistema linear S significa efetuar um estudo de S visando a classificá-lo segundo a **Definição 12**. *Resolver* um sistema linear significa determinar todas as soluções. O conjunto dessas soluções recebe o nome de **conjunto solução** do sistema.

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Procedendo ao escalonamento de S, chegaremos a uma das três seguintes situações:

(I) No processo de escalonamento, numa certa etapa, obtém-se um sistema:

$$S' : \begin{cases} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdot x_1 & + \cdots & +0 \cdot x_n & = \beta_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

com $\beta_i \neq 0$. Como S' é incompatível, então o mesmo se pode dizer de S.

(II) Obtém-se um sistema escalonado so seguinte tipo:

$$S' : \begin{cases} x_1 & +\alpha_{12} \cdot x_2 & + \cdots & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = \beta_1 \\ & x_2 & + \cdots & +\alpha_{2n} \cdot x_n & = \beta_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & x_n & = \beta_n \end{cases}$$

Neste caso S' poderá ser transformado, por equivalências, no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 & & & & = \gamma_1 \\ & x_2 & & & = \gamma_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & x_n & = \gamma_n \end{cases}$$

Assim, S é compatível determinado e $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ é sua solução.

(III) Obtém-se um sistema escalonado do tipo abaixo:

$$S' : \begin{cases} x_1 & + \cdots & +\alpha_{1j_2} \cdot x_{j_2} & + \cdots & +\alpha_{1j_3} \cdot x_{j_3} & + \cdots & +\alpha_{1j_p} \cdot x_{j_p} & + \cdots & +\alpha_{1n} \cdot x_n & = \beta_1 \\ & & x_{j_2} & + \cdots & +\alpha_{2j_3} \cdot x_{j_3} & + \cdots & +\alpha_{2j_p} \cdot x_{j_p} & + \cdots & +\alpha_{2n} \cdot x_n & = \beta_2 \\ & & & & x_{j_3} & + \cdots & +\alpha_{3j_p} \cdot x_{j_p} & + \cdots & +\alpha_{3n} \cdot x_n & = \beta_3 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & & & & x_{j_p} & + \cdots & +\alpha_{pn} \cdot x_n & = \beta_p \end{cases}$$

onde $p < n$.

É fácil, então, ir eliminando, por meio de operações elementares, o termo em x_{j_2} na primeira equação, os termos em x_{j_3} da primeira e segunda equações, $\cdots$, os termos em x_{j_p} da primeira à $(p-1)-$ésima equação. Por exemplo, multiplicando a segunda equação por $(-\alpha_{1j_2})$ e somando o resultado com a primeira, eliminando o termo $\alpha_{1j_2} \cdot x_{j_2}$.

Feito isto, passamos para o segundo membro de cada equação todas as parcelas, exceção feita à primeira. Teremos, então, um sistema da forma:

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \\ x_{j_2} = f_2 \\ \vdots \\ x_{j_p} = f_p \end{cases}$$

onde cada f_i é uma expressão linear nas variáveis x_j com $j \neq 1, j \neq j_2, \cdots, j \neq j_p$. A cada sequência de valores que dermos então a estas $(n - p)$ variáveis (**variáveis livres**) obteremos valores para $x_1, x_{j_2}, \cdots, x_{j_p}$, e consequentemente uma solução do sistema. Como $p < n$, teremos mais do que uma solução (infinitas, na verdade) e o sistema é **compatível e indeterminado** neste caso.

Exercício: Discutir e resolver os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x & -y & +z & = 1 \\ 2x & +y & +2z & = 0 \\ 3x & -y & +z & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -2y & -z & = 1 \\ 2x & +y & -3z & = 0 \\ x & -7y & & = 3 \end{cases}$$

efetuando o processo de escalonamento, justificando cada equivalência.

5 Resumo da Discussão

A discussão feita acima pode ser resumida como segue: suponhamos que um sistema tenha sido escalonado e, retiradas as equações do tipo $0 = 0$, restem p equações com n incógnitas.

(I) Se a última das equações restantes é:

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = \beta_p, \text{ com } \beta_p \neq 0$$

então o sistema é **incompatível;**

Caso contrário, restam duas alternativas:

(II) Se $p = n$, o sistema é **compatível determinado**;

(III) Se $p < n$, então o sitema é **compatível indeterminado**.

6 Matrizes

Definição 29. *Sejam $m, n \geq 1$ dois números inteiros. Uma **matriz** $m \times n$ **real** é uma função:*

$$\begin{array}{rccc} a: & \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\} & \to & \mathbb{R} \\ & (i, j) & \mapsto & a_{ij} \end{array}$$

que representamos como sendo o conjunto $\{a_{ij} \mid (1 \leq i \leq m) \& (1 \leq j \leq n)\}$ com os elementos estejam distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela como a seguinte:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, ou apenas por (a_{ij}), se não houver possibilidade de confusão sobre aos conjuntos aos quais pertencem i e j.

Cada um dos números que compõem uma matriz é denominado *termo* desta matriz. Dada a matriz $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, ao símbolo a_{ij}, que representa indistintamente todos os seus termos, daremos o nome de **termo geral** dessa matriz.

Notações: Indicaremos por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $m \times n$. Se $m = n$, em vez de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, usa-se a notação $M_n(\mathbb{R})$. Cada matriz de $M_n(\mathbb{R})$ chama-se **matriz quadrada de ordem** n. Em contraposição, quando $m \neq n$, a matriz $m \times n$ diz-se **matriz retangular**. Uma matriz 1×1, (a_{11}) se identifica com o número real a_{11}.

Cada matriz costuma ser denotada por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

Exemplo 30. *A matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 3×2. *Logo,* $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

6.1 Linhas e Colunas

Dada uma matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

as m $n-$uplas horizontais:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{array} \right),$$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{array} \right),$$

$$\vdots$$

$$A^{(m)} = \left(\begin{array}{cccc} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right)$$

são chamadas **linhas** de A, enquanto que as n $m-$uplas "verticais":

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad A_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

são as **colunas** de A. Observe que para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$, tem-se $A^{(i)} \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, e para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$ tem-se $A_{(j)} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Exemplo 31. *Na matriz* 2×3*:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix},$$

as linhas são:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e:

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 6 & -5 \end{array} \right)$$

enquanto que as colunas são:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad e \quad A_{(n)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

6.1.1 Igualdade de Matrizes

Consideremos duas matrizes reais $m \times n$: $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Dizemos que $A = B$ se, e somente se,

$$(\forall (i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\})(a_{ij} = b_{ij})$$

Exemplo 32. *Tem-se:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 2 & z \\ t & -1 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ t = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

6.1.2 Operações com Matrizes

Considere o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Adição de matrizes: A **adição** de matrizes é a função dada por:

$$\begin{array}{cccc} + & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) & \to & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ & ((a_{ij}),(b_{ij})) & \mapsto & (a_{ij}+b_{ij}) \end{array}$$

Observe que a adição de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:

(i) **Associatividade:** Dados $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, tem-se:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

De fato, para cada par $(i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}$, pela associatividade de que goza a soma de números reais, tem-se:

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

de modo que:

$$A + (B + C) = (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})] = [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) = (A + B) + C$$

(ii) **Comutatividade:** Dadas $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, tem-se $A + B = B + A$. De fato, para cada par $(i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}$, pela comutatividade de que goza a soma de números reais, tem-se:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

e portanto:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$$

(iii) Existe uma matriz $m \times n$ que é o elemento neutro da soma de matrizes, qual seja, a matriz identicamente nula:

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, a matriz $0_{m\times n}$ tem termo ij idêntico a zero, de modo que para qualquer $A = (a_{ij})$, vale:

$$0_{m\times n} + A = (0) + (a_{ij}) = (0 + a_{ij}) = (a_{ij}) = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) + (0) = A + 0_{m\times n}$$

Esta matriz é denominada por **matriz identicamente nula**.

(iv) Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, existe uma matriz, $-A = (-a_{ij})$ tal que $A + (-A) = 0_{m\times n}$. De fato, tem-se:

$$A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = 0_{m\times n}$$

Multiplicação de uma matriz $m \times n$ por um número: Dados uma matriz (a_{ij}) e um número real $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \cdot_{\mathbb{R}}: & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) & \to & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ & (\lambda, (a_{ij})) & \mapsto & (\lambda \cdot a_{ij}) \end{array}$$

Assim, tem-se:

$$\lambda \cdot_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observe que a função $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz as seguintes propriedades:

(v) Para quaisquer $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$$\mu \cdot_{\mathbb{R}} (\lambda \cdot_{\mathbb{R}} A) = \mu \cdot_{\mathbb{R}} (\lambda \cdot a_{ij}) = (\mu \cdot (\lambda \cdot a_{ij})) \overset{\substack{\text{assoc.}\mathbb{R} \\ \uparrow}}{=} ((\mu \cdot \lambda) \cdot a_{ij}) = (\mu \cdot \lambda) \cdot_{\mathbb{R}} (a_{ij}) =$$

$$= (\mu \cdot \lambda) \cdot_{\mathbb{R}} A$$

(vi) Para quaisquer $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tem-se:

$$(\mu + \lambda) \cdot_{\mathbb{R}} A = \mu \cdot_{\mathbb{R}} A + \lambda \cdot_{\mathbb{R}} A$$

$$\begin{aligned}(\mu+\lambda) \cdot_{\mathbb{R}} A = (\mu+\lambda) \cdot_{\mathbb{R}} (a_{ij}) = ((\mu+\lambda) \cdot a_{ij}) = (\mu \cdot a_{ij} + \lambda \cdot a_{ij}) = \mu \cdot_{\mathbb{R}} (a_{ij}) + \lambda \cdot_{\mathbb{R}} (a_{ij}) = \\ = \mu \cdot_{\mathbb{R}} A + \lambda \cdot_{\mathbb{R}} A\end{aligned}$$

(vii) Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\lambda \cdot_{\mathbb{R}} (A + B) = \lambda \cdot_{\mathbb{R}} A + \lambda \cdot_{\mathbb{R}} B$$

De fato, tem-se, por definição e pela distributividade da multiplicação sobre a soma de que goza a estrutura dos números reais:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot_{\mathbb{R}} (A + B) = \lambda \cdot_{\mathbb{R}} ((a_{ij} + b_{ij})) \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} (\lambda \cdot (a_{ij} + b_{ij})) \overset{\substack{\text{distr.}\\ \uparrow}}{=} (\lambda \cdot a_{ij} + \lambda \cdot b_{ij}) \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} \\ = (\lambda \cdot a_{ij}) + (\lambda \cdot b_{ij}) \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} \lambda \cdot_{\mathbb{R}} (a_{ij}) + \lambda \cdot_{\mathbb{R}} (b_{ij}) = \lambda \cdot_{\mathbb{R}} A + \lambda \cdot_{\mathbb{R}} B\end{aligned}$$

(viii) Para qualquer $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, vale:

$$1 \cdot_{\mathbb{R}} A = A$$

pois, de fato,

$$1 \cdot_{\mathbb{R}} A = 1 \cdot_{\mathbb{R}} (a_{ij}) \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} (1 \cdot a_{ij}) = (a_{ij}) = A$$

Multiplicação de Matrizes: Consideremos, agora, uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e uma matriz $B = (b_{jk}) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, definimos, para $(i, k) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, p\}$:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Proposição 33 (associatividade do produto de matrizes). *Sejam* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B = (b_{jk}) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ *e* $C = (c_{k\ell}) \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$*, tem-se:*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Demonstração. O $(i, \ell)-$ésimo termo geral da matriz $M = A \cdot (B \cdot C)$ é:

$$m_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{k\ell} \right)$$

Por sua vez, o $(i, \ell)-$ésimo termo da matriz $N = (A \cdot B) \cdot C$ é:

$$n_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{k\ell}$$

$$\begin{aligned} m_{i\ell} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{k\ell} \right) = \\ &= a_{i1} \cdot (b_{11} \cdot c_{1\ell} + \cdots + b_{1p} \cdot c_{p\ell}) + a_{i2} \cdot (b_{21} \cdot c_{1\ell} + \cdots + b_{2p} \cdot c_{p\ell}) + \cdots \\ &\cdots + a_{in} \cdot (b_{n1} \cdot c_{1\ell} + \cdots + b_{np} \cdot c_{p\ell}) = \\ &(a_{i1} \cdot b_{11} + a_{i2} \cdot b_{21} + \cdots + a_{in} \cdot b_{n1}) \cdot c_{1\ell} + \cdots + (a_{i1} \cdot b_{1p} + a_{i2} \cdot b_{2p} + \cdots + a_{in} \cdot b_{np}) \cdot c_{p\ell} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{j1} \right) \cdot c_{1\ell} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jp} \right) \cdot c_{p\ell} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{k\ell} = n_{i\ell} \end{aligned}$$

Uma vez que para todo $(i, \ell) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, p\}$ tem-se o $(i, \ell)-$ésimo termo de $A \cdot (B \cdot C)$ igual ao $(i, \ell)-$ésimo termo de $(A \cdot B) \cdot C$, segue a igualdade das matrizes. □

Proposição 34 (distributividade do produto de matrizes sobre a soma de matrizes). *Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B = (b_{jk}), C = (c_{jk}) \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Então:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Demonstração. Para qualquer $(i, k) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, p\}$, tem-se o $(i, k)-$ésimo termo de $A \cdot (B + C)$ igual a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (b_{jk} + c_{jk}) \overset{\text{distr.}}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk} + a_{ij} \cdot c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk},$$

que é exatamente o $(i, k)-$ésimo termo de $A \cdot B + A \cdot C$. □

7 Matrizes Inversíveis

Nesta seção vamos nos ater ao estudo de matrizes quadradas $n \times n$. Neste caso, a multiplicação aplica qualquer par de matrizes quadradas $n \times n$ em uma terceira matriz $n \times n$.

Além das propriedades dadas nas **Proposições 33** (associatividade) e **34** (distributividade do produto com respeito à adição), a multiplicação de matrizes quadradas admite um elemento neutro:

$$\mathrm{Id}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

que evidentemente verifica as seguintes condições: dada uma matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$, temos:

$$\mathrm{Id}_{n\times n} \cdot A = A$$

Com efeito, seu $(i, j)-$ésimo termo é:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \cdot a_{kj} = \delta_{ii} \cdot a_{ij} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$$

o que significa, pela definição de igualdade entre matrizes, que $\mathrm{Id}_{n\times n} \cdot A = A$.

Analogamente, verifica-se que $A \cdot \mathrm{Id}_{n\times n} = A$.

Definição 35 (inversa de uma matriz quadrada). *Uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é* ***inversível*** *se, e somente se existir uma matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que:*

$$A \cdot B = \mathrm{Id}_{n\times n} = B \cdot A$$

Esta matriz B, quando existir, é única, e portanto denominada por ***a matriz inversa de*** *A, e denotada por A^{-1}.*

Exemplo 36. *A matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é inversível, uma vez que tomando:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposição 37. *Sejam* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *matrizes inversíveis. Então:*

(a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(b) $(A^{-1})^{-1} = A$

Demonstração. Ad (a): Observe que:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B^{-1} \cdot B) \cdot A^{-1} = A \cdot \mathrm{Id}_{n\times n} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}_{n\times n}$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A \cdot \mathrm{Id}_{n\times n} \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot B = \mathrm{Id}_{n\times n}$$

de modo que pela unicidade da matriz inversa, temos:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Ad (b): por definição, como:

$$(A^{-1}) \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}$$

e:

$$A \cdot (A^{-1}) = \mathrm{Id}_{n\times n}$$

segue que:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

□

7.1 Determinação da Inversa de Uma Matriz

Apresentamos, agora, um método para determinar a inversa de uma matriz A, caso A seja inversível.

Analogamente ao que fizemos com sistemas lineares, vamos definir **operações elementares** sobre linhas de uma matriz quadrada.

Definição 38. *Dada uma matriz* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *sejam* $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(i)}, \cdots, A^{(j)}, \cdots, A^{(n)}$ *suas linhas. Uma* ***operação elementar sobre as linhas de*** A *é uma das seguintes:*

(P) ***Permutar*** *duas linhas quaisquer*

(M) ***Multiplicar*** *uma linha de* A *por um número* $\lambda \neq 0$;

(S) ***Somar*** *a uma linha de* A *uma outra linha de* A *multiplicada por um número*

Um fato importante é que aplicar uma operação elementar a uma matriz quadrada $n \times n$ corresponde a multiplicar esta matriz por um certo tipo de matriz, dado na seguinte:

Definição 39 (matriz elementar). *Uma* ***matriz elementar*** *de ordem n é uma matriz E obtida de* $\mathrm{Id}_{n\times n}$ *por meio de uma, e somente uma operação elementar.*

Exemplo 40. *A matriz:*

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz elementar, pois foi obtida da matriz $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ *mediante a operação elementar (M), com* $\lambda = 2$.

Exemplo 41. *A matriz:*

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz elementar, pois foi obtida da matriz $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ *mediante a operação elementar (S), em que substituímos a segunda linha por ela mesma somada ao triplo da primeira.*

Proposição 42. *Seja E uma matriz elementar de ordem n. Se aplicarmos, então, em uma matriz A, também de ordem n, a mesma operação elementar que transformou $\mathrm{Id}_{n\times n}$ em E, obteremos a matriz $E \cdot A$.*

Demonstração. Observemos, primeiramente, que para todo $r \in \{1, \cdots, n\}$, tem-se $(E \cdot A)^{(r)} = E^{(r)} \cdot A$. De fato, escreva $E = (e_{ij})$ e $A = (a_{ij})$, de modo que:

$$E^{(r)} = \begin{pmatrix} e_{r1} & e_{r2} & \cdots & e_{rn} \end{pmatrix}$$

e portanto:

$$E^{(r)} \cdot A = \begin{pmatrix} e_{r1} & e_{r2} & \cdots & e_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} e_{rk} \cdot a_{k1} & \sum_{k=1}^{n} e_{rk} \cdot a_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} e_{rk} \cdot a_{kn} \end{pmatrix}$$

Também,

$$E \cdot A = \left(\sum_{k=1}^{n} e_{ik} \cdot a_{kj} \right)$$

e portanto:

$$(E \cdot A)^{(r)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} e_{rk} \cdot a_{k1} & \sum_{k=1}^{n} e_{rk} \cdot a_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} e_{rk} \cdot a_{kn} \end{pmatrix}$$

de modo que fica estabelecido que:

$$(E \cdot A)^{(r)} = E^{(r)} \cdot A$$

Analisemos, agora, cada uma das operações elementares.

Caso 1: A operação elementar é do tipo (P), ou seja, existem índices $i_0, j_0 \in \{1, \cdots, n\}$ com $i_0 \neq j_0$ tais que

$$\begin{cases} E^{(j_0)} = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(i_0)} \\ E^{(i_0)} = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(j_0)} \\ E^{(k)} = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(k)}, \text{ se } k \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i_0, j_0\} \end{cases}$$

Dado $k \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i_0, j_0\}$, como $E^{(k)} = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(k)}$, tem-se:

$$(E \cdot A)^{(k)} = E^{(k)} \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(k)} \cdot A = A^{(k)}$$

Também:

$$(E \cdot A)^{(i_0)} = E^{(i_0)} \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(j_0)} \cdot A = A^{(j_0)}$$

$$(E \cdot A)^{(j_0)} = E^{(j_0)} \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(i_0)} \cdot A = A^{(i_0)}$$

de modo que todas as linhas da matriz $(E \cdot A)$ são idênticas a todas as linhas da matriz obtida de A permutando a i_0-ésima com a j_0-ésima linha.

Caso 2: A operação elementar é do tipo (M), ou seja, a matriz E foi obtida da identidade multiplicando sua i_0-ésima linha ($i_0 \in \{1, \cdots, n\}$) por $\lambda \neq 0$, ou seja,

$$\begin{cases} E^{(i_0)} = \lambda \cdot \mathrm{Id}_{n\times n}^{(i_0)} \\ E^{(k)} = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(k)}, \ \text{ se } \ k \neq i_0 \end{cases}$$

Dado $k \neq i_0$, temos:

$$(E \cdot A)^{(k)} = E^{(k)} \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(k)} \cdot A = A^{(k)}$$

enquanto que para i_0, temos:

$$(E \cdot A)^{(i_0)} = E^{(i_0)} \cdot A = (\lambda \cdot \mathrm{Id}_{n\times n})^{(i_0)} \cdot A = \lambda \cdot (\mathrm{Id}_{n\times n}^{(i_0)} \cdot A) = \lambda \cdot A^{(i_0)},$$

ou seja, todas as linhas da matriz $E \cdot A$ coincidem com todas as linhas da matriz obtida de A pela mesma operação elementar que deu origem a E.

Caso 3: A operação elementar é do tipo (S).

Suponhamos que a $j-$ésima linha de E seja a soma da $j-$ésima linha de $\mathrm{Id}_{n\times n}$ com a $i-$ésima linha multiplicada por $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} E^{(j)} = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(j)} + \lambda \cdot \mathrm{Id}_{n\times n}^{(i)} \\ E^{(k)} = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(k)}, \ \text{se } k \neq j \end{cases}$$

Como $(E \cdot A)^{(r)} = E^{(r)} \cdot A$, tem-se:

$$\begin{aligned} (E \cdot A)^{(j)} = E^{(j)} \cdot A = (\mathrm{Id}_{n\times n}^{(j)} + \lambda \cdot \mathrm{Id}_{n\times n}^{(i)}) \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(j)} \cdot A + \lambda \cdot (\mathrm{Id}_{n\times n}^{(i)} \cdot A) = \\ = (\mathrm{Id}_{n\times n} \cdot A)^{(j)} + \lambda \cdot (\mathrm{Id}_{n\times n} \cdot A)^{(i)} = A^{(j)} + \lambda \cdot A^{(i)} \end{aligned}$$

donde concluímos que a $j-$ésima linha de $E \cdot A$ é igual à $j-$ésima linha de A somada à $i-$ésima linha de A multiplicada por λ. Finalmente, se $k \neq j$, tem-se:

$$(E \cdot A)^{(k)} = E^{(k)} \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}^{(k)} \cdot A = A^{(k)}$$

e concluímos que para *todo* $r \in \{1, \cdots, n\}$, a $r-$ésima linha de $E \cdot A$ é igual à $r-$ésima linha da matriz obtida de A mediante a operação elementar que transformou $\mathrm{Id}_{n\times n}$ em E. □

O resultado a seguir nos permite, em muitos casos, identificar rapidamente se uma matriz é inversível.

Proposição 43. *Toda matriz elementar, E, é inversível.*

Demonstração. Por hipótese, E é obtida de $\mathrm{Id}_{n\times n}$ por meio de uma operação elementar. Consideremos a operação elementar inversa, que transforma E em $\mathrm{Id}_{n\times n}$. Se aplicarmos esta última em $\mathrm{Id}_{n\times n}$, obteremos uma matriz elementar E_1. Devido à proposição anterior, teremos $E_1 \cdot E = \mathrm{Id}_{n\times n}$, o que é suficiente para concluirmos que E é inversível e E_1 é sua inversa. □

Exemplo 44. *Consideremos a matriz elementar:*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A operação elementar que transformou $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ em E consiste em somar à segunda linha de $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ o triplo da primeira linha. Então, E será transformada em $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ somando à sua segunda linha a primeira multiplicada por -3. Logo, a matriz inversa de E, obtida efetuando em $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ esta última operação elementar, é:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando uma matriz B puder ser obtida de A por meio de um número finito dessas operações, dizemos que B é **equivalente** a A, e escrevemos $B \sim A$. Esta relação é reflexiva. simétrica e transitiva.

Teorema 45. *Uma matriz A é inversível se, e somente se $\mathrm{Id}_{n\times n} \sim A$. Neste caso, a mesma sucessão de operações elementares que transformam A em $\mathrm{Id}_{n\times n}$ transforma $\mathrm{Id}_{n\times n}$ em A^{-1}*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Como cada operação elementar sobre A equivale a multiplicar A, pela esquerda, por uma matriz elementar, existem matrizes elementares $E_1, \cdots, E_t$ tais que:

$$E_t \cdot E_{t-1} \cdots E_1 \cdot A = \mathrm{Id}_{n\times n}$$

Logo,

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_t^{-1} \cdot \mathrm{Id}_{n\times n}$$

Como cada matriz do segundo membro é inversível, então A é inversível (o produto de matrizes inversíveis, como vimos, é inversível). Além disto, observando que:

$$(\forall i \in \{1, \cdots, t\})((E_i)^{-1})^{-1} = E_i),$$

segue que:

$$A^{-1} = E_t \cdot E_{t-1} \cdots E_1 \cdot \mathrm{Id}_{n\times n}$$

o que prova a última afirmação do teorema.

($\Rightarrow$) Observamos primeiro que se $B \sim A$, então A é inversível se, e somente se, B é inversível. Isto porque se $B \sim A$, então $B = P \cdot A$, onde P é uma matriz inversível (P é um produto de matrizes elementares). Nossa observação decorre, portanto, dessa igualdade.

Façamos o escalonamento da matriz A por meio de operações elementares, isto é, façamos com que cada uma de suas linhas (a partir da segunda) tenha mais zeros iniciais do que a precedente. Como a última linha de A não é nula (pois A é inversível), obteremos:

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

onde cada $a_{ii} \neq 0$. Mas esta última matriz é equivalente à matriz $\mathrm{Id}_{n\times n}$. Logo, $\mathrm{Id}_{n\times n} \sim A$. $\square$

Exemplo 46. *Verificar se a matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é inversível e determinar A^{-1}, caso esta matriz exista.

Devemos orientar nosso trabalho no sentido de transformar, se possível, a matriz A na matriz $\mathrm{Id}_{3\times 3}$. Como essa mesma sucessão de operações levará $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ em A^{-1}, convém reunir A e $\mathrm{Id}_{3\times 3}$ em uma mesma matriz e operar a partir daí:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\ell_3' = \ell_3 - \ell_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\ell_3'' = \ell_3' + \ell_2'}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\ell_3''' = \frac{1}{3}\cdot \ell_3''}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \overset{\ell_2^{(IV)} = \ell_2''' - \ell_3'''}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \overset{\ell_1^{(V)} = \ell_1^{(IV)} - \ell_2^{(IV)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Logo, a matriz A é inversível e:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8 Exprimindo Sistemas Lineares por Equações entre Matrizes

Seja:

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot x_n = \beta_m \end{cases}$$

um sistema linear de m equações com n incógnitas sobre $\mathbb{R}$. Se formarmos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

então podemos reescrever o sistema S como uma igualdade entre matrizes:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

ou seja, $A \cdot X = B$, onde A recebe o nome de **matriz dos coeficientes de** S.

Daqui em diante, em virtude da identificação (tradução) entre a linguagem dos sistemas lineares e a das equações entre matrizes, será comum "emprestarmos" adjetivos de matrizes para sistemas lineares, olhando para a matriz dos coeficientes. Por exemplo, caso o sistema seja $n \times n$, teremos uma matriz de coeficientes quadrada, de modo que será comum nos referirmos ao sistema como "sistema quadrado", e assim por diante.

Definição 47 (sistema de Cramer). *Um **sistema de Cramer** é um sistema linear de n equações com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é inversível.*

Se $A \cdot X = B$ é um sistema de Cramer, como:

$$A \cdot X = B \iff A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \iff X = A^{-1} \cdot B,$$

então esse sistema é compatível e determinado, e sua única solução é dada por $A^{-1} \cdot B$. Em particular, um sistema quadrado e homogêneo cuja matriz dos coeficientes é inversível só admite a solução trivial.

Exemplo 48. *A matriz dos coeficientes do sistema:*

$$\begin{cases} x \ +y \quad\quad\ = 1 \\ \quad\ y \ +z \ = 1 \\ x \quad\ +2z = 0 \end{cases}$$

é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema pode ser traduzido na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que já vimos ser inversível, com inversa igual a:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo, temos:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema é $(0, 1, 0)$.

Referências

[1] Domingues, H. H.; Callioli, C.; Costa, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 3ª edição, São Paulo, 1982.

[2] https://resumos.mesalva.com/escalonamento/, acesso em 18/8/2023.