MAT0220 - Cálculo Diferencial e Integral IV
Agenda 01
Sequências de Números Reais

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nestas notas, introduziremos os conceitos de sequência e de convergência, apresentando alguns exemplos e provando algumas de suas propriedades.

Na primeira parte deste texto apresentaremos várias definições relativas a sequências numéricas, que são simplesmente funções do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ em um subconjunto de $\mathbb{R}$. Como o domínio dessas funções é ilimitado superiormente, estaremos particularmente interessados em seu "comportamento assintótico", ou seja, em seu comportamento conforme sua variável, n, cresce para além de qualquer limite finito. Caso esta função convija para um valor finito, teremos o que denominamos por "convergência" da sequência, e em qualquer outro caso, "divergência". Estes dois conceitos são centrais em nosso estudo, e é em torno deles que gravitará a maioria dos resultados aqui apresentados.

Como é de se esperar, é possível aplicar o que sabemos sobre limites de funções de uma variável real a valores reais para sequências numéricas, o que será provado na **Observação 9**. Operando termo a termo, poderemos definir a soma, a subtração e o produto de duas sequências quaisquer, bem como o quociente por uma sequência que nunca se anula. Analisaremos, ainda, no **Teorema 20**, o comportamento dessas combinações aritméticas de sequências: veremos que, contanto que cada sequência seja convergente, o limite da soma de duas sequências será igual à soma de seus limites, o limite da da diferença de duas sequências será igual à diferença de seus limites, e o limite do produto de duas sequências será igual ao produto de seus limites. Também veremos que o limite do quociente de uma sequência por outra que nunca se anula e cujo limite é diferente de zero será o quociente dos limites.

Decidir a divergência de sequências é tão importante quanto decidir a convergência, uma vez que são comportamentos excludentes e complementares. Veremos diversos resultados

*jeancb@ime.usp.br

que asseguram a divergência de uma sequência, dentre os quais os **Corolários 22** e **24**, que nos permitem inferi-la a partir do comportamento de suas subsequências.

Como o conjunto dos números reais, assim como o conjunto dos números naturais, é totalmente ordenado, podemos definir sequências crescentes (ou seja, funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ que *preservam* a ordem desses conjuntos) e decrescentes (ou seja, funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ que *invertem* esta ordem), bem como sequências limitadas (superior e/ou inferiormente). Como em $\mathbb{R}$ vale o **Axioma do Supremo** e seu equivalente, o **Axioma do Ínfimo**[1], poderemos garantir a convergência de sequências crescentes limitadas superiormente (**Teorema 31**) e de sequências decrescentes limitadas inferiormente (**Teorema 32**).

Embora em alguns casos o limite de uma sequência conforme sua variável cresce para além de qualquer número positivo finito possa não existir, ainda poderemos falar sobre seu maior e seu menor valor de aderência, seu "limite superior" e o "limite inferior". Lançando mão do **Teorema 31**, provamos que estes números sempre existem, para qualquer sequência numérica.

Introduziremos o importante conceito de "sequência de Cauchy": a grosso modo, sequências de Cauchy são sequências cujos termos se aproximam uns dos outros conforme tomamos índices cada vez maiores. Veremos que toda sequência de Cauchy tem seu conjunto de termos limitado, que se uma sequência de Cauchy admitir uma subsequência convergente, ela será convergente, e combinaremos estes resultados com o **Teorema de Bolzano-Weierstrass** para demonstrar que toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

Na segunda parte deste texto, aplicaremos a teoria desenvolvida na primeira para demonstrar que a sequência dada por $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge, e definiremos este limite como sendo um número, que definiremos como e.

Antes de começarmos a nossa exposição, convém expormos alguns resultados preliminares, dados a seguir.

1 Preliminares

Nesta seção apresentamos três observações que, embora extremamente simples, nos auxiliarão ao longo de todo o resto do curso. Começamos com a seguinte importante propriedade dos números reais.

Recorde que, dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $|x| = x$, se $x > 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$. Temos, por exemplo:

[1] que nos diz que qualquer conjunto de números reais limitado inferiormente admite um ínfimo.

- $|5| = 5$;
- $|-7| = -(-7) = 7$.

Intuitivamente, o módulo de um número real nos dá sua distância da origem.

Teorema 1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ quaisquer. Tem-se:*

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(**Desigualdade Triangular**);*

(b) $||a| - |b|| \leq |a-b|$*;*

(c) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$

Demonstração. Ad (a): Temos:

$$-|a| \leq a \leq |a| \tag{1}$$

e:

$$-|b| \leq b \leq |b| \tag{2}$$

Somando os termos correspondentes das desigualdades (1) e (2):

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

e portanto:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Ad (b): Basta substituirmos, a por $a-b$ na desigualdade provada acima, e teremos:

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|,$$

ou seja:

$$|a| - |b| \leq |a-b| \tag{3}$$

Substituindo agora b por $b-a$ na desigualdade triangular, obtemos:

$$|b| = |a + (b-a)| \leq |a| + |b-a|$$

$$|b| - |a| \leq |b-a|,$$

ou seja,

$$-|b-a| = -|a-b| \leq |a| - |b|$$

$$-\,|a-b| \leq |a| - |b| \tag{4}$$

Segue de (3) e de (4) que:

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|,$$

ou seja,

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

Ad (c): Note que:

$$|a-c| = |a-b+b-c| \overset{\overset{(a)}{\uparrow}}{<} |a-b| + |b-c|$$

e segue o resultado. $\square$

Fato: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Temos:

$$x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\iff |x-a| < \varepsilon$$

Com efeito, temos $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ se, e somente se, $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, ou equivalentemente, $-\varepsilon < x-a < \varepsilon$, o que expresso em desigualdade modular é:

$$|x-a| < \varepsilon$$

Notação: Dado um número real qualquer, x, denotamos por $\lceil x \rceil$ o **menor inteiro (estritamente) maior do que** x. Damos alguns exemplos em seguida:

- $\lceil 0.2 \rceil = 1$;
- $\lceil 10.43 \rceil = 11$;
- $\lceil 0.333\cdots \rceil = 1$;
- $\lceil e \rceil = 3$;
- $\lceil \pi \rceil = 4$.
- $\lceil 12 \rceil = 13$.

2 Sequências

Apresentamos, formalmente, o nosso objeto de estudo, o conceito de sequência.

Definição 2 (sequência). *Uma* ***sequência de números reais*** *é uma função:*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Costumamos denotar a sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ ou, mais frequentemente, por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Devemos distinguir o conjunto dos termos de uma sequência da sequência propriamente dita. Dada a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cada imagem de um número natural n por a, $a_n \in \mathbb{R}$ é o que denominamos um **termo** da sequência. Assim, o conjunto dos termos da sequência é $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e a conceituação aqui envolvida é bem diferente da de sequência. Por exemplo, $(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, \cdots)$ é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$ cujos conjunto de termos é $\{1, 2\}$.

Um conceito também muito importante para o estudo de sequências é o de subsequência, dado a seguir.

Definição 3 (subsequência). *Seja:*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n \end{array}$$

uma sequência em $\mathbb{R}$*. Dada qualquer função estritamente* $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, a aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} a \circ \jmath: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & k & \mapsto & a(\jmath(k)) = a_{n_k} \end{array}$$

é uma ***subsequência*** *de* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Costumamos denotar uma subsequência de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *por* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*.*

Exemplo 4. $(1, 1, 1, \cdots)$ *é uma subsequência de* $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots)$*.*

Definição 5 (limite de uma sequência). *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. O número $\bar{a} \in \mathbb{R}$ é o* ***limite da sequência*** *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0(\varepsilon)$ então $|a_n - \bar{a}| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\bar{a}$ é limite da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, e somente se:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \varepsilon)$$

Você poderá interagir com o conceito de limite de sequências no *applet* que se encontra disponível em https://www.geogebra.org/m/GAcTpGCh. É possível inserir, nas duas caixinhas da parte superior da tela, uma lei geral de uma sequência e um número "candidato a limite". Pode-se, em seguida, mover o cursor correspondente a ε e correspondente ao número de termos, N, e observar *quais* termos estão a uma distância inferior a ε de L.

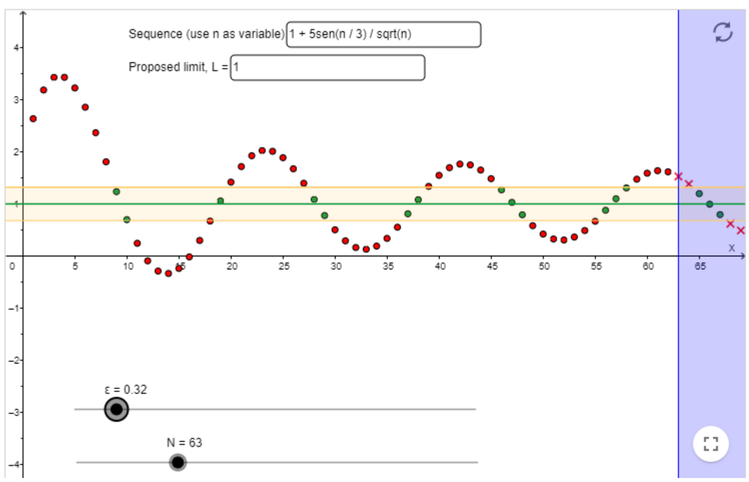
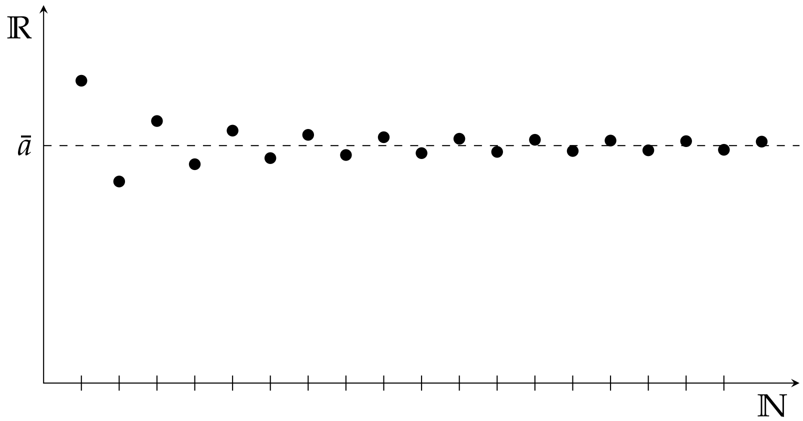


Figura 1: *Applet* em GeoGebra para explorar o conceito de convergência de sequências.

Observe, no *applet* acima, que conforme tomamos valores de ε cada vez *menores*, devemos tomar índices cada vez maiores a fim de que os termos da sequência estejam contidos na faixa $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ (termos indicados em verde).



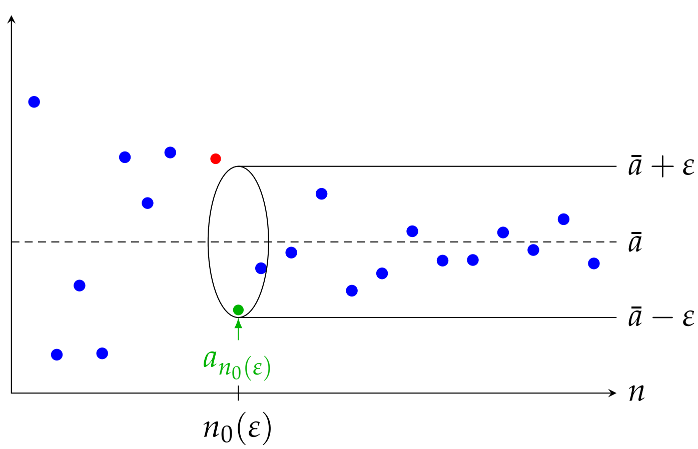
Para indicar que $\bar{a}$ é o limite da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, escrevemos:

$$a_n \to \bar{a}$$

ou

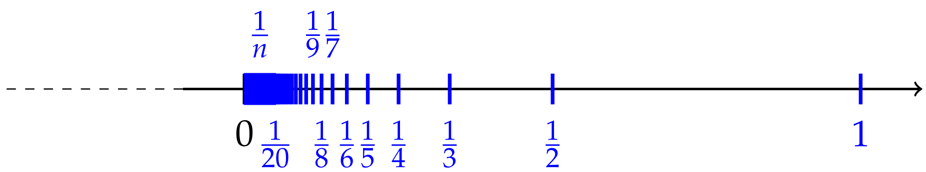
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a}$$

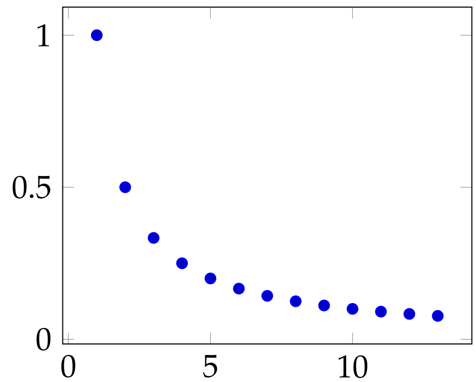
e dizemos que "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{a}$", ou "o limite de a_n conforme n tende ao infinito é $\bar{a}$". Coloquialmente, dizemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a}$ se, e somente se, para obter valores de a_n *arbitrariamente* próximos de $\bar{a}$ bastar tomar valores de n *suficientemente* grandes. Intuitivamente, $a_n \to \bar{a}$ ocorre se, e somente se, para qualquer "tubinho" de raio ε centrado em $\bar{a}$, for possível encontrar um índice ($n_0(\varepsilon)$ na figura abaixo) a partir do qual *todos* os termos da sequência estejam confinados a este tubinho.



Exemplo 6. *Considere a sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Tem-se:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$





De fato, vamos argumentar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Vamos buscar, portanto, uma condição suficiente *para termos:*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Notando que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$, *temos:*

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Logo, vamos buscar uma condição suficiente para que:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Basta tomarmos:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Assim, vamos tomar $n_0(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil$, *ou seja, o* menor *inteiro maior do que* $1/\varepsilon$. *Se fizermos isto, teremos a cadeia de implicações:*

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \leq n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

e portanto, se $n \geq n_0(\varepsilon)$, então:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Desta forma,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

A fim de dar mais concretude ao exemplo acima, vamos verificar que dado um “tubinho” centrado no 0 e de raio $\varepsilon = 0.1$, existe um índice, que denominaremos por $n_0(0.1)$, a partir do qual todos os termos da sequência estarão confinados àquele.

Dado $\varepsilon = 0.1$, bastará tomarmos $n_0(0.1) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{n_0(0.1)} < 0.1$$

ou seja, $n_0(0.1) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{0.1} = 10 < n_0(0.1)$$

Tomando $n_0(0.1) = 11$, teremos:

$$n \geq 11 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.1$$

Se quisermos $\varepsilon = 0.01$, basta tomarmos $n_0(0.01) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{n_0(0.01)} < 0.01$$

ou seja, tal que:

$$\frac{1}{0.01} = 100 < n_0(0.01)$$

Tomando $n_0(0.01) = 101$, teremos:

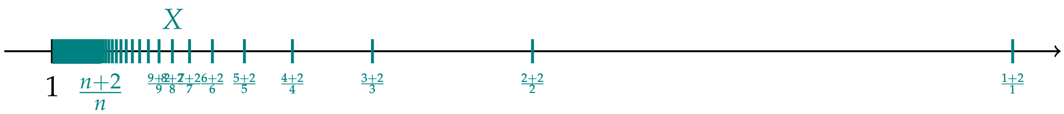
$$n \geq 101 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.01$$

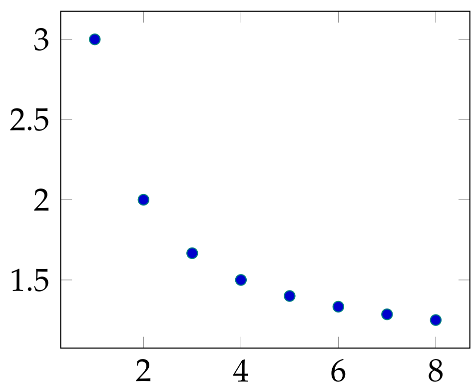
Exemplo 7. *A sequência:*

$$\left(\frac{n+2}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge para 1.

Observe, abaixo, uma representação dos pontos desta sequência distribuídos na reta abaixo:





De fato, vamos argumentar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

Vamos buscar, portanto, uma condição suficiente *para termos:*

$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

Notando que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} > 0$, *temos* $\frac{n+2}{n} - 1 = \frac{2}{n}$*:*

$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| = \frac{2}{n}$$

Logo, vamos buscar uma condição suficiente para que:

$$\frac{2}{n} < \varepsilon$$

Basta tomarmos:

$$\frac{2}{\varepsilon} < n.$$

Assim, vamos tomar $n_0(\varepsilon) = \lceil 2/\varepsilon \rceil$, *ou seja, o* menor *inteiro maior do que* $2/\varepsilon$. *Se fizermos isto, teremos a cadeia de implicações:*

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \leq n \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \iff \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

e portanto, se $n \geq n_0(\varepsilon)$, então:

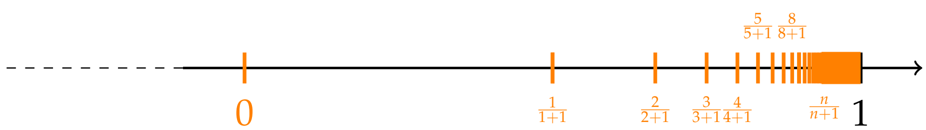
$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

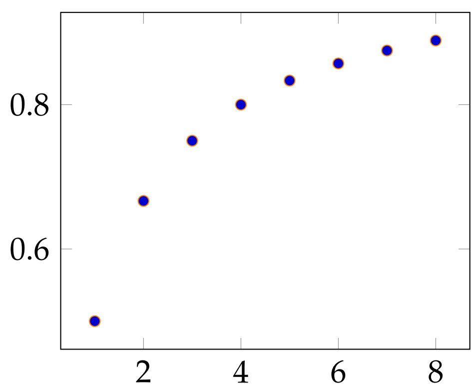
Desta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Exemplo 8. *A sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 1:*

$$X = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$





De fato, vamos argumentar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Vamos buscar, portanto, uma condição suficiente *para termos:*

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Notando que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, temos:

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$$

Logo, vamos buscar uma condição suficiente para que:

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

Basta tomarmos:

$$\frac{1}{\varepsilon}-1<n.$$

Assim, vamos tomar $n_0(\varepsilon)=\lceil 1/\varepsilon-1\rceil$, *ou seja, o* menor *inteiro maior do que* $1/\varepsilon-1$. *Se fizermos isto, teremos a cadeia de implicações:*

$$n_0(\varepsilon)=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}-1\right\rceil\leq n\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}-1<n\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}<n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\varepsilon\iff\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

e portanto, se $n\geq n_0(\varepsilon)$, *então:*

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

Desta forma,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Observação 9. *Sejam* $n_0\in\mathbb{N}$ *e* $f:[n_0,\infty[\to\mathbb{R}$ *uma função. A sequência de termo geral dado por:*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n:=f(n) \end{array}$$

é tal que se $\lim_{x\to\infty}f(x)$ *existe (finito ou infinito), então* $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}f(x)$. *Neste texto, denominaremos* f *como uma "interpolação associada à sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*". De fato, vamos supor primeiramente que* $\lim_{x\to\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$. *Dado* $\varepsilon>0$, *existe* $\delta>0$ *tal que* $x>\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$. *Em particular, para qualquer* $n\in\mathbb{N}$ *tal que* $\lceil\delta\rceil\leq n$, *tem-se* $|a_n-L|=|f(n)-L|<\varepsilon$ *(ou seja, basta tomarmos* $n_0(\varepsilon)=\lceil\delta\rceil$*).*

Se $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, *então para qualquer* $M>0$ *existe* $\delta>0$ *tal que* $x\geq\delta\Rightarrow M\leq f(x)$; *em particular, para qualquer* $n\in\mathbb{N}$ *tal que* $n\geq\lceil\delta\rceil$ *tem-se* $a_n=f(n)\geq M$, *de modo que* $a_n\to\infty$ *(ou seja, basta tomarmos* $n_0(\varepsilon)=\lceil\delta\rceil$*).*

Exemplo 10. *Calcular:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

Podemos considerar a sequência acima como oriunda da função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

Uma vez que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

segue que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Qualquer sequência que não é convergente é denominada por **sequência divergente**. Por exemplo, a sequência:

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & (-1)^n \end{array}$$

ou seja, $(1, -1, 1, -1, \cdots)$ é divergente, uma vez que não existe $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$. Também, como $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$, a sequência $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente. Temos, então, alguns casos a considerar:

(i) Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não tiver limite conforme** $n \to \infty$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge**;

(ii) Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tender ao infinito conforme** $n \to \infty$, ou seja, se:

$$(\forall M > 0)(\exists n_0(M) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(M) \Rightarrow a_n \geq M)$$

então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge**; Neste caso, escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(iii) Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tender a menos infinito conforme** $n \to \infty$, ou seja, se:

$$(\forall M < 0)(\exists n_0(M) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(M) \Rightarrow a_n \leq M)$$

então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge**; Neste caso, escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

A seguir, veremos alguns resultados sobre sequências convergentes.

Proposição 11. *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência e* $L \in \mathbb{R}$ *tais que* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. *Então:*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|.$$

Demonstração. De fato, como $a_n \to \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, basta tomarmos o mesmo $n_0(\varepsilon)$ garantido pelo fato de que $a_n \to L$, e uma vez que:

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon,$$

segue:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow ||a_n| - |L|| < \varepsilon$$

□

Proposição 12. *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência e $L \in \mathbb{R}$. Tem-se:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$$

Demonstração. Tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon) \iff$$
$$\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow ||a_n - L| - 0| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$$

□

Proposição 13. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(\varepsilon)$, então:

$$||a_n| - 0| < \varepsilon$$

Como $|a_n - 0| = ||a_n| - 0| < \varepsilon$, segue o resultado. □

Definição 14 (operações com sequências). *Sejam:*

$$a: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \qquad b: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & b_n \end{array}$$

duas sequências. Tem-se:

(a) a ***soma das sequências*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***e*** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

$$a+b: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n+b_n \end{array}$$

Escrevemos, assim $a+b=(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) a ***diferença das sequências*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***e*** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

$$a-b: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n-b_n \end{array}$$

Escrevemos, assim $a-b=(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) Dado um número real $\alpha \in \mathbb{R}$*, o* ***produto de*** α ***pela sequência*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

$$\alpha\cdot a: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \alpha\cdot a_n \end{array}$$

Escrevemos, assim $\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) o ***produto das sequências*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***e*** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

$$a\cdot b: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n\cdot b_n \end{array}$$

Escrevemos, assim $a\cdot b=(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) Se $(\forall n \in \mathbb{N})(b_n \neq 0)$*, o* ***quociente das sequências*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***e*** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

$$\tfrac{a}{b}: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{a_n}{b_n} \end{array}$$

Escrevemos, assim $a/b=\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Definição 15 (sequência limitada). *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X. A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **limitada** se, e somente se, o conjunto de seus termos for limitado, ou seja se:*

$$(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq K)$$

Proposição 16 (Toda sequência convergente é limitada). *Sejam X um conjunto e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.*

Demonstração. Suponhamos que $a_n \to L$, onde $L \in M$. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(1)$ implica:

$$|a_n - L| < 1$$

Seja, ainda, $K = \max\{|a_1 - L|, \cdots, |a_{n_0(1)-1} - L|\}$. Mostraremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada por $K + |L| + 1 > 0$.

De fato, temos:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} n \leq n_0(1) \Rightarrow |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L| \leq K + |L| + 1 \\ n_0(1) < n \Rightarrow |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < K + |L| \leq K + |L| + 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < K + |L| + 1)$$

ou seja, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. $\square$

Observe que a **Proposição 16** pode ser usada em sua forma contrapositiva:

Teorema 17. *Se uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for ilimitada, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Atenção: é falso afirmar que se uma sequência é limitada, então ela é convergente. Para ver isto, basta considerar a sequência $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots)$, que apesar de ser limitada, diverge.

Teorema 18 (Teorema do Confronto). *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências e $L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$. Se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tivermos:*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

então:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Demonstração. Tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon)$$

Assim, seja $\varepsilon > 0$ dado. Considere $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon) + n_2(\varepsilon) + n_0$. Teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \\ n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \\ n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n \end{cases}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon) + n_2(\varepsilon) + n_0$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

ou seja,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$$

□

Proposição 19. *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências tais que $\lim_{n\to\infty} = 0$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Então:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Demonstração. Uma vez que a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, existe uma constante $M > 0$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $|b_n| \leq M$. Também, como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos o número positivo $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$. Como $a_n \to 0$, existe $n_0\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$ implica $|a_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$, vale:

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Assim, $a_n \cdot b_n \to 0$. $\square$

Teorema 20. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} b: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & b_n \end{array}$$

sequências tais que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a} \ \ e \ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{b}.$$

Então:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \bar{a} + \bar{b}$;

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \bar{a} - \bar{b}$;

(c) $\lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \bar{a}$;

(d) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \bar{a} \cdot \bar{b}$;

(e) Se $(\forall n \in \mathbb{N})(b_n \neq 0)$ *e* $\bar{b} \neq 0$, *então* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$;

Demonstração. Ad (a): Seja $\varepsilon > 0$ qualquer.

Por hipótese, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e existe $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que:

$$n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |b_n - \bar{b}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Desta forma, escolhendo $n_0(\varepsilon) = n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$, teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |(a_n + b_n) - (\bar{a} + \bar{b})| \leq |a_n - \bar{a}| + |b_n - \bar{b}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Isto prova que $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (\bar{a} + \bar{b})$.

Ad (b): Seja $\varepsilon > 0$ qualquer.

Por hipótese, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e existe $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que:

$$n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |b_n - \bar{b}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Desta forma, escolhendo $n_0(\varepsilon) = n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$, teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |(a_n - b_n) - (\bar{a} - \bar{b})| \leq |a_n - \bar{a}| + |-b_n + \bar{b}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Isto prova que $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (\bar{a} - \bar{b})$.

Ad (c): No caso em que $\alpha = 0$ temos a sequência identicamente nula, que converge para 0. Logo, precisamos demonstrar o resultado apenas para $\alpha \neq 0$.

Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $a_n \to \bar{a}$, por hipótese, dado $\frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$ existe $n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Desta forma, tomando $n_0(\varepsilon) = n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right)$, tem-se que:

$$n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \Rightarrow |\alpha \cdot a_n - \alpha \cdot \bar{a}| = |\alpha| \cdot |a_n - \bar{a}| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

Ad (d): Para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - \bar{a} \cdot \bar{b}| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot \bar{b} + a_n \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |a_n \cdot b_n - a_n \cdot \bar{b}| + |a_n \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b}| = \\ &= |a_n \cdot (b_n - \bar{b})| + |(a_n - \bar{a}) \cdot \bar{b}| = |a_n| \cdot |b_n - \bar{b}| + |a_n - \bar{a}| \cdot |\bar{b}|\end{aligned}$$

de onde segue que:

$$0 \leq |a_n \cdot b_n - \bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |a_n| \cdot |b_n - \bar{b}| + |a_n - \bar{a}| \cdot |\bar{b}|$$

Pelo **Teorema do Confronto**:

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n - \bar{a} \cdot \bar{b}| \leq \lim_{n\to\infty} (|a_n| \cdot |b_n - \bar{b}| + |a_n - \bar{a}| \cdot |\bar{b}|) = 0$$

ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n - \bar{a} \cdot \bar{b}| = 0 \overset{\textbf{Prp. 12}}{\iff} \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Ad (e): Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a_n \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot b_n}{b_n \cdot \bar{b}}.$$

Como $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot b_n = 0)$, pela **Proposição 19**, basta mostrarmos que $\left(\frac{1}{b_n \cdot \bar{b}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Por ser convergente, a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, de modo que existe $M > 0$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(|b_n| \leq M)$. Desta forma,

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{b_n}$$

Como $b_n \to \bar{b}$, dado $\varepsilon = \frac{\bar{b}^2}{2} > 0$, existe $n_0\left(\frac{\bar{b}^2}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0\left(\frac{\bar{b}^2}{2}\right) \Rightarrow |b_n \cdot \bar{b} - \bar{b}^2| < \frac{\bar{b}^2}{2}$$

$$-\frac{\bar{b}^2}{2} < b_n \cdot \bar{b} - \bar{b}^2 < \frac{3\bar{b}^2}{2} \iff$$

$$\frac{1}{\bar{b}^2} < \frac{1}{b_n \cdot \bar{b}} < \frac{2}{3\bar{b}^2}$$

Portanto, para $n \geq n_0\left(\frac{\bar{b}^2}{2}\right)$ vale:

$$\left|\frac{1}{b_n \cdot \bar{b}}\right| < \frac{2}{3\bar{b}^2}$$

de modo que $(1/b_n \cdot \bar{b})_{n\in\mathbb{N}}$ é, de fato, limitada. Logo:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot b_n}{b_n \cdot \bar{b}}\right| = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left|\frac{1}{b_n \cdot \bar{b}}\right|}^{\leq \frac{2}{3\bar{b}^2}} \cdot \overbrace{|a_n \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot b_n|}^{\to 0} = 0$$

$\square$

Teorema 21. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para $L \in \mathbb{R}$, então se $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para L.*

Demonstração. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, em $\mathbb{R}$, convergente para L, e seja $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente, e considere a subsequência:

$$\begin{array}{rccc} a \circ \jmath : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & k & \mapsto & a(\jmath(k)) = a_{n_k} \end{array}$$

que denotaremos por $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Devemos demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - L| < \varepsilon$$

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado. Como, por hipótese, $a_n \to L$, dado este $\varepsilon > 0$ existirá $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Como $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, sua imagem, $\jmath[\mathbb{N}] \subset \mathbb{N}$ é ilimitada superiormente. Isto significa que, dado $n_0(\varepsilon)$ existem infinitos elementos de $\jmath[\mathbb{N}]$ que são maiores do que $n_0(\varepsilon)$. Seja:

$$k_0(\varepsilon) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \jmath(k) \geq n_0(\varepsilon)\}$$

Assim, como $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, tem-se:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow \jmath(k) \geq \jmath(k_0(\varepsilon)) \geq n_0(\varepsilon)$$

ou seja,

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow n_k \geq n_0(\varepsilon)$$

e portanto:

$$|a_{n_k} - L| < \varepsilon$$

Desta forma, segue que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - L| < \varepsilon))$$

ou seja,

$$a_{n_k} \to L.$$

□

O teorema acima é muito útil em sua forma contrapositiva:

Corolário 22. *Se uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ divergente, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Corolário 23. *Se uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite duas subsequências, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(a_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ que convergem para dois números diferentes, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exemplo 24. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto qualquer com mais de um ponto, digamos x, y. A sequência $(x, y, x, y, x, y, \cdots)$* não *converge.*

Suponhamos, por absurdo, que a sequência convergisse para $L \in X$. Tomando-se $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2}$, $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ deve conter todos os termos da sequência (já que existem apenas dois), de modo que $x, y \in\,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. Segue daí que:

$$|x-y| \leq |x-L| + |L-y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x-y|$$

e portanto:

$$|x-y| < |x-y|,$$

o que é um absurdo. Logo, como a sequência não converge para nenhum ponto de X, a sequência diverge.

Exemplo 25. *A sequência $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \cdots)$, que, como vimos no **Exemplo 24**, não é convergente. No entanto, as subsequências $(1, 1, 1, \cdots)$ e $(2, 2, 2, \cdots)$ são convergentes.*

Exemplo 26. *Seja X um conjunto. Uma **sequência estacionária** é uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n = a_{n+1} = L$. Tais sequências são, obviamente, convergentes para L, o termo que se repete: de fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0(\varepsilon) = n_0$, segue-se que $a_n = L \Rightarrow |a_n - L| = |L - L| = 0 < \varepsilon$. Em particular, sequências constantes convergem para a constante.*

Proposição 27. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $\mathbb{R}$, então o seu limite é único.*

Demonstração. [Estratégia da prova: supor que existam dois limites e derivar, daí, um absurdo] Suponhamos que existam $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$, $\bar{a} \neq \bar{b}$, tais que $\lim a_n = \bar{a}$ e $\lim a_n = \bar{b}$.

Como $\bar{a} \neq \bar{b}$, tem-se que $|\bar{a} - \bar{b}| > 0$, logo, tomando $\varepsilon = \dfrac{|\bar{a}-\bar{b}|}{2} > 0$, como $a_n \to \bar{a}$, existirá $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \varepsilon$$

Também, como $a_n \to \bar{b}$, existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{b}| < \varepsilon$$

Assim, tomando $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - \bar{a}| < \varepsilon)\&(|a_n - \bar{b}| < \varepsilon))$$

o que implica que, para qualquer $n \geq n_0(\varepsilon)$ vale:

$$|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a} - a_n| + |a_n - \bar{b}| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{|\bar{a} - \bar{b}|}{2} + \frac{|\bar{a} - \bar{b}|}{2} = |\bar{a} - \bar{b}|$$

ou seja,

$$|\bar{a} - \bar{b}| < |\bar{a} - \bar{b}|,$$

o que é absurdo. □

Em $\mathbb{R}$ dispomos de uma relação de ordem, o que nos permite introduzir as seguintes:

Definição 28 (sequência crescente). *Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* ***crescente*** *se, e somente se, a funçã o $a : \mathbb{N} \to X \subset \mathbb{R}$ for crescente, ou seja, se para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$, tivermos $a_m \leq a_n$. Caso $m < n \Rightarrow a_m < a_n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita* ***estritamente crescente****.*

Definição 29 (sequência decrescente). *Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* ***decrescente*** *se, e somente se, a funçã o $a : \mathbb{N} \to X \subset \mathbb{R}$ for decrescente, ou seja, se para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$, tivermos $a_n \leq a_m$. Caso para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$ implique $a_n < a_m$, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita* ***estritamente decrescente****.*

Sequências crescentes e sequências decrescentes constituem uma classe denominada "classe das sequências monótonas". Podemos pensar em sequências monótonas como sequências (funções) que "preservam ou invertem a ordem dos naturais".

Exemplo 30. *A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente: com efeito, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$ tem-se:*

$$n < n+1 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

ao passo que a sequência

$$(1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots)$$

é crescente. Por sua vez, a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é monótona.

Teorema 31. *Toda sequência crescente ou estritamente crescente cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo deste conjunto.*

Demonstração. [Estrutura da Prova: demonstração por absurdo] Suponhamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de números reais tal que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$, e seja $\bar{a} = \sup\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. Mostraremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a}$.

Dado $\varepsilon > 0$, deverá existir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(\varepsilon)$ então:

$$\bar{a} - \varepsilon < a_n < \bar{a} + \varepsilon$$

De fato, se não fosse este o caso, existiria algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo n valeria $a_n \leq \bar{a} - \varepsilon$. Isto implicaria a existência de uma cota superior do conjunto $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (a saber, $\bar{a} - \varepsilon$) *menor* do que $\bar{a}$ - o que seria uma contradição com o fato de $\bar{a}$ ser o supremo deste conjunto. Assim, existe algum índice $n_0(\varepsilon)$ tal que:

$$\bar{a} - \varepsilon < a_n < \bar{a} + \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0(\varepsilon)$, ou seja:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \varepsilon)$$

A demonstração no caso da sequência ser crescente é totalmente análoga. □

Teorema 32. *Toda sequência decrescente ou estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente converge para o ínfimo deste conjunto.*

Demonstração. Análoga à prova do **Teorema 31**. Faça como exercício. □

Exemplo 33. *Estudar a convergência ou divergência da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:*

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

Solução: Temos:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

e portanto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)} \cdot \frac{n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} =$$

$$= \frac{n \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (2n+1)} = \frac{2n^2 + 2n}{(2n^2 + 2n) + n + 1} < 1$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale:

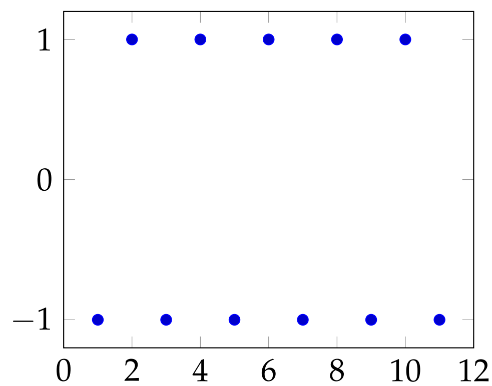
$$a_{n+1} < a_n$$

e a sequência é estritamente decrescente. Por ser limitada inferiormente (pois todos os seus termos são positivos), esta sequência é convergente. Além disto, como $a_1 = 2$, tem-se que o limite desta sequência é menor do que 2.

Exemplo 34. *A sequência* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente decrescente, ao passo que a sequência*

$$(1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots)$$

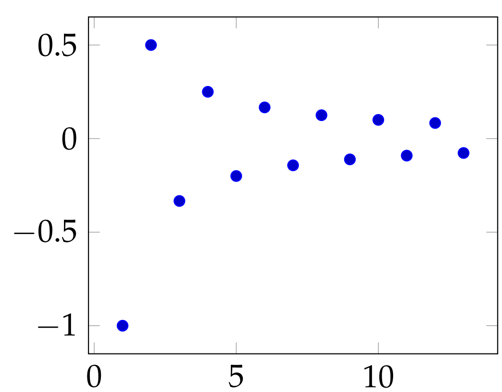
é crescente. Por sua vez, a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é monótona.*



Exemplo 35. *A sequência:*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$$

converge para 0*.*



Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Como $\frac{1}{n} = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right|$*, segue que basta tomarmos* $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$*, teremos:*

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Quando uma sequência não converge, dizemos que "a sequência **diverge**".

Exemplo 36. *A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$$(0, 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

diverge. *De fato, esta sequência se torna maior do que qualquer número que possamos imaginar, bastando tomarmos índices suficientemente grandes. Dado qualquer $M > 0$, existe sempre um número natural $n > \lceil M \rceil$, de modo que:*

$$n \geq \lceil M \rceil \Rightarrow M < n = a_n$$

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Exemplo 37. *Uma **sequência estacionária** é uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}$ tal que existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n = a_{n+1} = \bar{a}$. Tais sequências são, obviamente, convergentes para $\bar{a}$, o termo que se repete: de fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0(\varepsilon) = n_0$, segue-se que $a_n = \bar{a}$ e $|a_n - \bar{a}| = |\bar{a} - \bar{a}| < \varepsilon$. Em particular, sequências constantes convergem para a constante.*

Exemplo 38. *A sequência $(x, y, x, y, x, y, \cdots)$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$,* não *converge.*

Suponhamos, por absurdo, que a sequência convergisse para $a \in \mathbb{R}$. Tomando-se $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ deve conter todos os termos da sequência (já que existem apenas dois), de modo que $x, y \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Segue daí que:

$$|x - y| \overset{\overset{(c)}{\uparrow}}{\leq} |x - a| + |a - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x - y|$$

e portanto:

$$|x - y| < |x - y|,$$

o que é um absurdo. Logo, como a sequência não converge para nenhum ponto de $\mathbb{R}$, a sequência diverge.

Teorema 39 (da Conservação do Sinal). *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. Tem-se:*

(i) se $\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a} > 0$, então existem um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c > 0$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > c)$$

(ii) se $\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a} < 0$, então existem um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c < 0$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < c)$$

Demonstração.

- Ad (i): tomemos $\varepsilon = \frac{\bar{a}}{2} > 0$. Como $a_n \to \bar{a}$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \frac{\bar{a}}{2}$, ou seja,

$$-\frac{\bar{a}}{2} < a_n - \bar{a} < \frac{\bar{a}}{2}$$

Somando $\bar{a}$ aos três membros acima, obtemos, em particular:

$$\frac{\bar{a}}{2} < a_n$$

Assim,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\bar{a}}{2} < a_n \right)$$

Basta, portanto, tomarmos $c = \frac{\bar{a}}{2}$.

- Ad (ii): Neste caso, a demonstração é análoga: tomando $\varepsilon = \frac{|\bar{a}|}{2} > 0$, veremos que $c = \frac{\bar{a}}{2}$ cumprirá as condições requeridas.

□

A proposição acima nos diz, em particular, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, no primeiro caso:

$$(\forall n \geq n_0)(a_n > 0)$$

e no segundo caso:

$$(\forall n \geq n_0)(a_n < 0)$$

Corolário 40. *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são sequências em* $\mathbb{R}$ *tais que existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n \geq N_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$$

e se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forem ambas convergentes, então:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Demonstração. [Estrutura da prova: demonstração por contraposição.] Suponha que tenhamos a negação da tese, ou seja, que valha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$$

e considere a sequência $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Da **Proposição 20**, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} (-b_n) = -\lim_{n\to\infty} b_n$$

Desta forma, seque que:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n > 0$$

Segue, portanto, do **Teorema da Conservação do Sinal, Teorema 39**, que existem um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c > 0$ tais que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b_n)$$

□

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$X_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$$

que denominamos por **a** $n-$**ésima cauda de** X, e defina as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = \inf X_n$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $b_n = \sup X_n$. Mostraremos a seguir que as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ambas convergem.

Proposição 41. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:*

$$X_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$$

Então a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Demonstração. Primeiramente observamos que se $n < m$, então:

$$X_m = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots\} \subseteq \{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots\} = X_n,$$

ou seja:

$$n < m \Rightarrow X_m \subseteq X_n$$

Sabemos que:

$$n < m \Rightarrow \inf X_n \leq \inf X_m.$$

Segue, assim, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente (ou seja, a sequência dos ínfimos, $(\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não decresce). Uma vez que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, tem-se que o conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado – e em particular, superiormente. Assim, temos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona estritamente crescente e limitada superiormente, logo converge. Assim, pela **Proposição 31**, a sequência $(\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\inf X_n \to \sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Denominamos $\sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ por "limite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$", e o denotamos por:

$$\liminf a_n = \sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

□

Tem-se, em particular, que dada qualquer sequência de números reais, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\liminf a_n$ é o <u>menor</u> valor de aderência do conjunto $X = \{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$: com efeito, denotemos $\liminf a_n = \alpha$.

• α é ponto aderente de X: de fato, dado qualquer $\delta > 0$, como $\inf X_n \to \alpha$, existe $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n(\delta) \Rightarrow |\inf X_n - \alpha| < \delta$, ou seja, $n \geq n(\delta) \Rightarrow \alpha - \delta < \inf X_n < \alpha + \delta$. Mas sendo $\alpha = \sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\alpha - \delta$ não pode ser cota superior de $\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, de modo que deve existir $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \delta < \inf X_{m_0} \leq \alpha$. Desta forma, para todo $n \geq m_0$, como $a_n \in X_{m_0}$, tem-se $\alpha - \delta < \inf X_{m_0} \leq a_n \leq \alpha$. Conclui-se, portanto, que dado qualquer $\delta > 0$, existe $a_n \in X$ tal que $a_n \in B(\alpha, \delta) \cap X =]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap X \neq \varnothing$ (basta tomarmos a_n com n maior ou igual m_0).

• se $c < \alpha$, c não é ponto aderente de X: como $\inf X_n \to \alpha$, segue de $c < \alpha$ que existe $n_0(c) \in \mathbb{N}$ tal que $c < \inf X_{n_0(c)} \leq \alpha$. Logo, para $\delta = \inf X_{n_0(c)} - c > 0$, vemos que $c + \delta = \inf X_{n_0(c)}$, logo o intervalo $]c - \delta, c + \delta[$ *não* contém nenhum termo a_n com $n \geq n_0(c)$. Isto significa que c é ponto isolado, ou seja, não é ponto aderente de X.

De modo similar, demonstra-se que $\limsup a_n$ é o *maior* ponto aderente de X.

Proposição 42. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:*

$$X_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$$

Então a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sup X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Demonstração. Exercício. □

Definição 43 (sequência de Cauchy). *Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **de Cauchy** se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $n_0(\varepsilon) \leq m < n$, tem-se:*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

Teorema 44. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\bar{a} \in \mathbb{R}$ tais que $a_n \to \bar{a}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(\varepsilon)$ implica $|a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Também, se $m \in \mathbb{N}$ for tal que $m > n \geq n_0(\varepsilon)$, teremos $|a_m - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, para $m, n \geq n_0(\varepsilon)$, teremos:

$$|a_m - a_n| = |a_m - \bar{a} + \bar{a} - a_n| \leq |a_m - \bar{a}| + |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ou seja, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. □

Recorde que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado** se, e somente se, existir um intervalo fechado, da forma $[\alpha, \beta]$, tal que $X \subset [\alpha, \beta]$.

Teorema 45. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon = 1$, existirá $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq n_0(1) \Rightarrow |a_m - a_n| < 1$. Pelo item (d) do **Teorema 1** temos, para todo $m > n_0(1)$:

$$|a_m| - |a_{n_0(1)}| \leq |a_m - a_{n_0(1)}| < 1$$

$$\therefore m > n_0(1) \Rightarrow |a_m| \leq 1 + |a_{n_0(1)}| \tag{5}$$

Afirmamos que a constante $K = \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n_0(1)-1}|, 1 + |a_{n_0(1)}|\}$ é tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale:

$$|a_n| \leq K$$

Com efeito, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se dois casos a se considerar:

$$\begin{cases} n \leq n_0(1) \\ n_0(1) < n \end{cases}$$

Se $n \leq n_0(1)$, então certamente $|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n_0(1)-1}|, |a_{n_0(1)}| + 1\} = K$, pois $|a_n| \in \{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n_0(1)-1}|, |a_{n_0(1)}| + 1\}$.

Se $n > n_0(1)$, tem-se por (5):

$$|a_n| \leq 1 + |a_{n_0(1)}| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n_0(1)-1}|, |a_{n_0(1)}| + 1\} = K$$

Desta forma, como $(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq K)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. $\square$

Em sua forma contrapositiva, o teorema acima se torna a seguinte:

Proposição 46. *Se uma sequência, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é ilimitada, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sequência de Cauchy.*

Exemplo 47. *A sequência $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$, por ser ilimitada, não é uma sequência de Cauchy. De fato, dado qualquer $M > 0$, não importa quão grande seja, para todo $n \geq e^M$ tem-se $\lceil e^M \rceil \leq \log(n)$, de modo que $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada.*

Proposição 48. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente para $\bar{a} \in \mathbb{R}$, então $a_n \to \bar{a}$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Uma vez que $a_{n_k} \to \bar{a}$, existe $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Desta forma, tomando $N_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon) + k_1(\varepsilon)$, teremos que para $n \geq N_0(\varepsilon)$:

$$|a_n - \bar{a}| = |a_n - a_{n_{k_1(\varepsilon)}} + a_{n_{k_1(\varepsilon)}} - \bar{a}| \leq |a_n - a_{n_{k_0(\varepsilon)}}| + |a_{n_{k_0(\varepsilon)}} - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ou seja, $a_n \to \bar{a}$. □

Teorema 49. *Toda sequência de Cauchy de números reais converge para algum número real.*

Demonstração. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Pelo **Teorema 45**, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência *limitada*. Pelo **Teorema de Bolzano-Weierstrass** (cf. seção 4.2 da Agenda 4 do curso de Cálculo 2), $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente para algum número real, digamos $\bar{a} \in \mathbb{R}$. Finalmente, pela **Proposição 48**, $a_n \to \bar{a}$. □

3 O número e

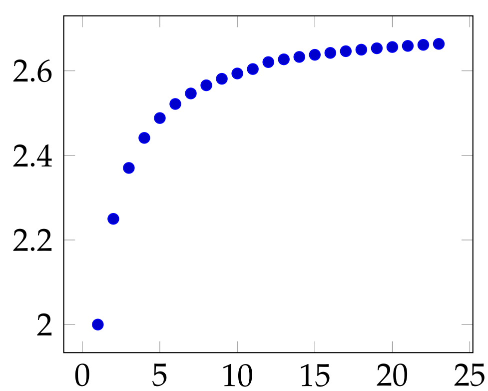
Munidos do **Teorema 31**, podemos garantir a existência do número e, como segue.

Consideremos a sequência:

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{array}$$

Afirmamos que esta sequência tem por limite um certo número que é maior do que 2 e menor do que 3.

Observe, abaixo, o gráfico da sequência:



O gráfico acima nos sugere a sequência converge para algum número maior do que 2.6. Veremos, no teorema a seguir, que é precisamente este o caso.

Lema 50. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$ tem-se:*

$$2^n < n!$$

ou seja,

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

e portanto, tem-se para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Demonstração. Provamos que $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 4 \Rightarrow 2^n < n!)$ por indução finita.

É imediato verificar que $2^4 = 16 < 24 = 4!$. Supondo que $2^{n-1} < (n-1)!$, vamos demonstrar que $2^n < n!$.

De fato, temos:

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot (n-1)! \underset{\uparrow}{\overset{2 \leq n}{\leq}} n \cdot (n-1)! = n!$$

$\square$

Lema 51. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \leq 2$$

Demonstração. Notamos que:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica de razão $1/2$, que é:

$$s_n = \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$$

$\square$

Teorema 52. *A sequência* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *converge para um número entre* 2 *e* 3.

Demonstração. A convergência desta sequência decorre da propriedade de esta ser crescente e limitada.

Pelo **Teorema Binomial**, tem-se:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

que pode ser escrito, alternativamente, como:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Vamos mostrar agora que sempre que $n<m$ teremos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

De fato, passando de n para $n+1$, tem-se $1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}$, e cada parcela da soma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pode ser majorada por uma parcela de $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$
$$< \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

Note, ainda, que mais uma parcela positiva é somada para obtermos $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, a saber $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$. Segue, portanto, que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

de modo que se $n<m$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $n+k=m$, e portanto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\cdots<\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$$

Assim, concluímos que a sequência $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente.

Observe que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\overbrace{1+1}^{2}+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{2}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{3}+$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n}>2$$

ou seja, para todo $n\in\mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>2$.

Resta mostrarmos que a sequência é limitada superiormente. Se fizermos isto, sua convergência seguirá do **Teorema 31**.

Tem-se, para qualquer $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$$

$$\vdots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<1$$

e portanto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

Desta forma, segue que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} \overset{\overset{\textbf{Lema 51}}{\uparrow}}{\leq} 1+2=3$$

Segue que dado qualquer elemento $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, e portanto a sequência é limitada superiormente. Pelo **Teorema 31**, a sequência em apreço converge para um número entre 2 e 3, que denotaremos por:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\square$

Definição 53. *Seja e o único número real (cuja existência é garantida pelo teorema acima) tal que:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Pode-se demonstrar que e é um número irracional, e seu valor com dez algarismos significativos é:

$$e = 2.7182818284\cdots$$

Referências

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[3] Piskunov, L., **Differential and Integral Calculus**, MIR Publishers, Moscow. Traduzido do Russo por G. Yankovsky, 1965.

[4] https://www.wikiwand.com/en/Bolzano%E2%80%93Weierstrass_theorem