MAT0220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
AGENDA 02: SÉRIES NUMÉRICAS

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Neste texto vamos tornar preciso o que entendemos por um "somatório de um número infinito de parcelas". A pergunta natural que surge é: será que estas "somas" se comportam de modo similar a seus análogos finitos? Veremos que, em alguns casos, sim, mas que via de regra, não é este o caso.

Como tais somas de "um número infinito de parcelas" serão obtidas via limite de sequências de somas parciais, o nosso estudo sobre sequências feito na AGENDA 1 será frequentemente utilizado, tendo seus resultados frequentemente citados.

Neste texto abordaremos exclusivamente as séries numéricas e estudaremos sua convergência ou divergência. Mais adiante, em agendas posteriores, faremos um estudo sobre outros tipos de séries, como séries de potências e séries trigonométricas.

1 Séries Numéricas e Exemplos

Começamos apresentando a definição de série numérica:

*jeancb@ime.usp.br

Definição 1 (série numérica). *Dada uma sequência de números reais, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sequência dada por:*

$$\sum a_n := \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*é denominada a **série numérica associada à sequência** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denoteremos o $n-$ésimo termo de $\sum a_n$ por s_n, ou seja,*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

*e o denominaremos por $n-$**ésima soma parcial da série** $\sum a_n$.*

Exemplo 2. *Vamos obter a $n-$ésima soma parcial de uma progressão geométrica de termo inicial $a \neq 0$ e razão $q \neq 1$, ou seja, a $n-$ésima soma parcial da sequência $(a, a\cdot q, a\cdot q^2, a\cdot q^3, \cdots, a\cdot q^n, \cdots)$. Temos:*

$$\begin{cases} s_0 = a \\ s_1 = a + a\cdot q \\ s_2 = a + a\cdot q + a\cdot q^2 \\ s_3 = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 \\ \vdots \\ s_n = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \cdots + a\cdot q^n \end{cases}$$

Consideremos a expressão que nos dá a $n-$ésima soma parcial da progressão geométrica:

$$s_n = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \cdots + a\cdot q^n \tag{1}$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por q, obtemos:

$$s_n\cdot q = a + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + a\cdot q^4 + \cdots + a\cdot q^n + a\cdot q^{n+1} \tag{2}$$

Fazendo (1) - (2)*, obtemos:*

$$\begin{aligned} s_n\cdot(1-q) = a &+ \cancel{a\cdot q} + \cancel{a\cdot q^2} + \cancel{a\cdot q^3} + \cancel{a\cdot q^4} + \cdots + \cancel{a\cdot q^n} - \\ &- (\cancel{a\cdot q} + \cancel{a\cdot q^2} + \cancel{a\cdot q^3} + \cancel{a\cdot q^4} + \cdots + \cancel{a\cdot q^n} + a\cdot q^{n+1}) = a\cdot(1-q^{n+1}) = a - a\cdot q^{n+1} \end{aligned}$$

Como $q \neq 1$, podemos escrever:

$$s_n = \frac{a\cdot(1-q^{n+1})}{1-q}$$

*Assim, a **série geométrica** é dada por:*

$$\left(\frac{a \cdot (1-q^{n+1})}{1-q}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Exemplo 3. *Para a sequência $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, a série associada é:*

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_1 = 1+2 = 3 \\ s_2 = 1+2+4 = 7 \\ s_3 = 1+2+4+8 = 15 \\ \vdots \\ s_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i \end{cases}$$

Pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, temos:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{1 \cdot (1-2^{n+1})}{1-2} = -(1-2^{n+1}) = 2^{n+1} - 1$$

$$\left(1, 1+2, 1+2+4, \cdots, \sum_{i=0}^{n} 2^i, \cdots\right) = (1, 3, 7, 15, \cdots, 2^{n+1}-1, \cdots)$$

A série associada a esta sequência é, portanto:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2^{n+1}-1\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exemplo 4. *Vamos obter uma fórmula para o termo geral da série associada à sequência $(0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Temos:*

$$s_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

Observando que a soma do primeiro e do $n-$ésimo termo desta sequência é $n+1$, igual à soma do segundo e $(n-1)-$ésimo termo e assim por diante:

$$s_n = \overbrace{1 + \underbrace{2 + \overbrace{3 + \cdots + (n-2)}^{n+1} + (n-1)}_{n+1} + n}^{=n+1}$$

concluímos que basta multiplicar $(n+1)$ por $\frac{n}{2}$, que é a metade da quantidade de termos a se somar. Obtemos, portanto:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

e portanto:

$$\sum n = \left(\sum_{i=0}^{n} i \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Exemplo 5. *Considere a progressão aritmética:*

$$(a, a+r, a+2r, a+3r, \cdots, a+n \cdot r, \cdots)$$

com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $r \in \mathbb{R}$. A série associada a esta sequência é:

$$\begin{cases} s_0 = a \\ s_1 = a + (a+r) = 2a + r \\ s_2 = a + (a+r) + (a+2r) = 3a + r \cdot (1+2) \\ s_3 = a + (a+r) + (a+2r) + (a+3r) = 4a + r \cdot (1+2+3) \\ \vdots \\ s_n = (n+1) \cdot a + r \cdot \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) \cdot a + r \cdot \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} \end{cases}$$

$$\left((n+1) \cdot \left(a + \frac{r \cdot n}{2} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Consideremos a sequência dos quadrados dos números reais:

$$(1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, n^2, \cdots) = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

Vamos usar o resultado a seguir para obter o termo geral da série:

$$\sum n^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} i^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Teorema 6. *Vale, para qualquer $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, que:*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Demonstração. Vamos demonstrar este resultado por indução finita.

Para $n = 2$ temos, naturalmente,

$$\sum_{i=1}^{2} i^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (4+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

Suponha que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot (n-1) + 1)}{6} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

Temos, assim:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

□

Exemplo 7. *A série associada à sequência dos quadrados dos números naturais é:*

$$\sum n^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} i^2 \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

2 Convergência e Divergência de Séries Numéricas

Ao nos depararmos com uma sequência, convém nos perguntarmos sobre sua convergência e/ou divergência. Assim, como uma série nada mais é do que uma sequência de somas parciais, dada uma sequência, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vamos estudar o comportamento da série associada, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{i=0}^{n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ – ou seja, de seu limite. Vamos denotar este limite por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Definição 8 (limite, convergência e divergência). *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que **a série associada a** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** se, e somente se, existir $L \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \lim_{n \to \infty} s_n = L$$

*Caso contrário, dizemos que a série **diverge**.*

Exemplo 9 (série de Grandi). *Considere a sequência* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. *A série associada a esta sequência é:*

$$\begin{cases} s_0 = (-1)^0 = 1 \\ s_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \\ s_2 = s_1 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1 \\ s_3 = s_2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0 \\ \vdots \\ s_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 1, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases} \end{cases}$$

Evidentemente, por possuir duas subsequências que convergem para valores distintos ($(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \cdots)$ *e* $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \cdots)$)*, a série diverge, e escrevemos:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ diverge}$$

Exemplo 10. *A série associada a uma progressão aritmética* $(a, a + r, a + 2r, \cdots)$ *com* $r \neq 0$ *é divergente, pois*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot \left(a + \frac{r \cdot n}{2}\right) = \begin{cases} \infty, \text{ se } r > 0 \\ -\infty, \text{ se } r < 0 \end{cases}$$

A seguir, vamos analisar o comportamento da série associada a uma progressão geométrica. Para tanto, precisaremos do seguinte resultado preliminar:

Proposição 11. *Seja* $q \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < q < 1$. *A sequência* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, q, q^2, q^3, \cdots, q^n, \cdots)$ *converge para* 0.

Demonstração. Primeiramente vamos garantir a convergência da sequência, provando que ela é decrescente e limitada inferiormente. Temos:

$$q > q^2 > q^3 > \cdots > q^n > \cdots > 0$$

de modo que a sequência dada é monótona estritamente decrescente e o conjunto dos seus termos, $\{1, q, q^2, q^3, \cdots, q^n, \cdots\}$ é limitado inferiormente por 0. Do **Teorema 32** da Agenda 1, segue que a sequência $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $L = \inf\{q, q^2, q^3, \cdots, q^{n+1}, \cdots\}$.

Como:

$$(q, q^2, q^3, \cdots, q^{n+1}, \cdots) = q \cdot (1, q, q^2, q^3, \cdots, q^n, \cdots),$$

pelo **Teorema 19** da AGENDA 1, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}(q, q^2, q^3, \cdots, q^{n+1}, \cdots) = q \cdot \lim_{n\to\infty}(1, q, q^2, \cdots, q^n, \cdots)$$

Como $\lim_{n\to\infty}(q, q^2, q^3, \cdots) \stackrel{*}{=} \lim_{n\to\infty}(1, q, q^2, \cdots) = L$, onde podemos justificar a passagem $*$ usando o fato de ser $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, segue que:

$$L = q \cdot L$$

e portanto:

$$L \cdot (1 - a) = 0.$$

Uma vez que $q \neq 1$, segue que $L = \inf\{1, q, q^2, q^3, \cdots\} = \lim_{n\to\infty} q^n = 0$. □

Vimos que a $n-$ésima soma parcial de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é a e cuja razão é $q \neq 1$ é dada por:

$$s_n = \frac{a \cdot (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Note que se tomarmos $q = 1$, a progressão será:

$$(a, a \cdot 1, a \cdot 1^2, a \cdot 1^3, \cdots, a \cdot 1^n, \cdots)$$

de modo que a série associada será:

$$(a, 2a, 3a, \cdots, n \cdot a, \cdots)$$

e neste caso:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty, \text{ se } a > 0 \\ -\infty, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Do que foi exposto acima, concluímos que a série geométrica divergirá se sua razão, q, for 1. Vejamos o que ocorre quando $q \neq 1$.

Caso 1: $q > 1$.

Neste caso, $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$. Temos:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot (1 - q^{n+1})}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1 - q^{n+1})$$

Como $q > 1$, temos $1 - q < 0$. Se $a > 0$, teremos $\frac{a}{1-q} < 0$, e se $a < 0$, teremos $\frac{a}{1-q} > 0$. Assim:

$$\frac{a}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^{n+1}) = \frac{a}{1-q} \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}\right) = \begin{cases} \infty, \text{ se } a < 0 \\ -\infty, \text{ se } a > 0 \end{cases}$$

Assim, se $q \geq 1$, a série geométrica diverge.

Caso 2: $0 < q < 1$. Neste caso:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i q \neq 1 \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} \cdot (1-q^{n+1}) = \frac{a}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^{n+1}) =$$
$$= \frac{a}{1-q} \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}\right) \textbf{Prp. 11} \frac{a}{1-q}$$

Caso 3: Se $-1 < q < 0$.

Neste caso, $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$. Temos:

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot (1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{a}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^{n+1})$$

Observe que $\lim_{n\to\infty} |q^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |q|^{n+1} = 0$, e portanto $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q},$$

ou seja, a série geométrica converge.

Caso 4: $q \leq -1$.

Neste caso, $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, uma vez que admite $(q^{2\cdot(k+1)})_{k\in\mathbb{N}}$ como subsequência, e esta diverge para ∞. Desta forma, a série:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a \cdot (1-q^{n+1})}{1-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

admite como uma subsequência:

$$(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a \cdot (1-q^{2\cdot(k+1)})}{1-q}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

que diverge, pois:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a \cdot (1-q^{2\cdot(k+1)})}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot \lim_{k\to\infty} q^{2\cdot(k+1)} = -\infty$$

Logo, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por admitir uma subsequência divergente, é divergente.

Podemos resumir a discussão feita acima como segue:

Teorema 12. *Seja* $(a, a\cdot q, a\cdot q^2, \cdots, a\cdot q^{n+1}, \cdots)$ *uma progressão geométrica com* $a \neq 0$. *Então:*

(i) Se $|q| < 1$, *a série geomérica* $\sum a\cdot q^n = \left(\sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\frac{a}{1-q}$;

(ii) Se $|q| \geq 1$, *a série geométrica* $\sum a\cdot q^n = \left(\sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Um outro tipo importante de série cujo limite podemos calcular é dado a seguir:

Definição 13 (série telescópica). *Uma série* $\sum a_n$ *é* ***telescópica*** *se, e somente se, existir uma sequência* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

Dada uma série telescópica, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n - b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, teremos:

$$s_n = b_0 - \cancel{b_1} + \cancel{b_1} - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cdots + \cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n} + \cancel{b_n} - b_{n+1} = b_0 - b_{n+1}$$

e portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Exemplo 14. *Consideremos a sequência* $\left(\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. *A série associada é:*

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{1\cdot 2} \\ s_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} \\ s_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \\ \vdots \\ s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \end{cases}$$

ou seja,

$$s_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)}\right)$$

Observando que:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

segue que:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo, a série converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Exemplo 15. *Determinar a soma da série:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$$

Solução: Vamos procurar descrever a série acima como uma soma telescópica. Para tanto, usamos o método de frações parciais a fim de determinar A e B reais tais que:

$$\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{A}{(n+1)^2} + \frac{B}{n^2}$$

Temos:

$$\frac{A}{(n+1)^2} + \frac{B}{n^2} = \frac{A \cdot n^2 + B \cdot (n+1)^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{(A+B) \cdot n^2 + 2B \cdot n + B}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$$

A fim de que a igualdade acima esteja satisfeita, devemos ter:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2B = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

ou seja, $A = -1$ e $B = 1$, de modo que:

$$\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Desta forma:

$$s_n = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Dadas duas séries, podemos obter sua "soma", sua "diferença" e seu "produto por um número real α" operando termo a termo, como fazemos para sequências (afinal, toda série é uma sequência). Assim, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\sum a_n \pm \sum b_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \pm \left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \pm b_i\right)_{n\in\mathbb{N}} = \sum (a_n \pm b_n)$$
$$\alpha \cdot \sum a_n = \alpha \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha \cdot a_i\right)_{n\in\mathbb{N}} = \sum \alpha \cdot a_n$$

Sobre estas "combinações" de séries, temos o seguinte:

Teorema 16. *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências cujas séries, $(\sum_{i=0}^{n} a_i)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\sum_{i=0}^{n} b_i)_{n\in\mathbb{N}}$ convirjam para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \bar{a}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \bar{b}$, respectivamente. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, valem:*

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \bar{a} \pm \bar{b}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \bar{a}$

Demonstração. Vamos escrever:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$
$$t_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$$

Ad (1): Pelo **Teorema 20** (da Agenda 1), ítens (a) e (b), tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} (s_n \pm t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} t_n = \bar{a} \pm \bar{b} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Ad (2): Pelo **Teorema 20** (da Agenda 1), item (c), vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot t_n = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} s_n = \alpha \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

□

3 Critérios de Convergência para Séries Numéricas

Os exemplos apresentados na seção anterior podem nos sugerir, falsamente, que é sempre possível calcular explicitamente a sequência das somas parciais e seu limite. Na verdade, isto ocorre muito raramente, e é necessário obter resultados auxiliares, os "*critérios de convergência*", que não dependam de se conhecer a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos elencar alguns desses critérios na sequência.

Teorema 17 (Critério da Comparação). *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de termos não-negativos (ou seja, tais que $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq 0)$ e $(\forall n \in \mathbb{N})(b_n \geq 0)$) tais que existe um número natural N_0 e uma constante positiva, c, tais que:*

$$n \geq N_0 \Rightarrow a_n \leq c \cdot b_n$$

Então:

(1) Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge;

(2) Se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ diverge.

Demonstração. Sejam:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$t_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$$

Ad (1): Suponhamos que $\sum b_n$ convirja.

Observamos, primeiramente, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$s_n = s_{n-1} + \overbrace{a_n}^{\geq 0} \geq s_{n-1} + 0 = s_{n-1}$$

ou seja,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(s_{n-1} \leq s_n)$$

e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Se demonstrarmos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, pelo **Teorema 20** da Agenda 1, seguirá que $\sum a_n$ converge.

Seja $K = N_0 \cdot \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{N_0-1}|\}$. Temos, para $n \in \{0, \cdots, N_0 - 1\}$:

$$a_n \leq N_0 \cdot |a_n| \leq N_0 \cdot \max\{|a_0|, \cdots, |a_{N_0-1}|\} = K,$$

e portanto:

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \leq K \\ s_1 = a_0 + a_1 \leq K \\ \vdots \\ s_{N_0-1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{N_0-1} \leq K \end{cases}$$

Para $n \geq N_0$ temos:

$$a_n \leq c \cdot b_n.$$

Como, por hipótese, $\sum b_n = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é *limitada*, ou seja, existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|t_n| \leq M$. Em particular, como para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 0$, tem-se que $(\forall n \in \mathbb{N})(|t_n| = t_n \leq M)$.

Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$s_n \leq K + c \cdot M$$

De fato,

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{N_0-1} a_i + \sum_{i=N_0}^{n} a_i \leq \sum_{i=0}^{N_0-1} a_i + \sum_{i=N_0}^{n} c \cdot b_i = \sum_{i=0}^{N_0-1} a_i + c \cdot \sum_{i=N_0}^{n} \cdot b_i \leq$$

$$\leq K + c \cdot \sum_{i=N_0}^{n} \cdot b_i \leq K + c \cdot M$$

ou seja,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(s_n \leq K + c \cdot M)$$

Por ser crescente e limitada superiormente, segue que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, $\sum a_n$ é convergente.

Ad (2): Suponhamos, agora, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja **divergente** para ∞, de modo que para qualquer $M > 0$ existe $n_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(M) \Rightarrow M \leq s_n$$

Para todo $n \geq \max\{N_0, n_0(M)\}$, teremos:

$$M \leq s_n \leq c \cdot t_n$$

e, equivalentemente,

$$\frac{1}{c} \cdot M \leq \frac{1}{c} \cdot s_n \leq \frac{1}{c} \cdot t_n$$

e, em particular:

$$M \leq t_n$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e $\sum b_n$ diverge. $\square$

3.1 Representação Decimal de Um Número Real

Vamos mostrar, agora, que todo número real do intervalo $[0, 1[$ pode ser representado por uma "expressão decimal", ou seja, pela concatenação dos termos ordenados de uma sequência de elementos do conjunto $\{0, 1, \cdots, 9\}$. Vamos denotar por $\mathbb{D}$ o conjunto de todas as expressões decimais da forma $0.d_1d_2d_3\cdots$. Vamos identificar a sequência $d : \mathbb{N} \to \{0, 1, \cdots, 9\}$ com a expressão decimal:

$$0.d_1d_2d_3\cdots d_n\cdots$$

de modo que a cada sequência de números entre 0 e 9 corresponderá uma única expressão decimal por meio da função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \{0,1,\cdots,9\}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{D} \\ & d & \mapsto & 0.d_1d_2d_3\cdots \end{array}$$

Vamos estabelecer uma função entre $\mathbb{D}$ e o intervalo $[0, 1[$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{D} & \to & [0,1[\\ & 0.d_1d_2d_3\cdots & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{d_n}{10^n} \end{array}$$

Pelo **Critério da Comparação**, a série $f(0.d_1d_2d_3\cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$ é convergente, uma vez que pode ser majorada pela série $\sum \frac{9}{10^n}$, cuja soma é, pela fórmula da soma da série geométrica de razão $(1/10)$ igual a:

$$\frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Observe que f não é uma função **injetora**, uma vez que se $\{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ é tal que $d_j \neq 0$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então:

$$f(0.d_1d_2d_3\cdots d_{j-1}(d_j - 1)999\cdots) = f(0.d_1d_2d_3\cdots d_j000\cdots) \qquad (3)$$

Com efeito, observe que:

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^{j+1}}$$

e portanto:

$$-\frac{1}{10^{j+1}} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0$$

Logo:

$$f(0.d_1 d_2 d_3 \cdots d_{j-1}(d_j - 1)999\cdots) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d_i}{10^i} + \frac{d_j - 1}{10^{j+1}} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \frac{d_i}{10^i} - \frac{1}{10^{j+1}} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{i=1}^{j} \frac{d_i}{10^i} = f(0.d_1 d_2 d_3 \cdots d_j 000 \cdots)$$

Por outro lado, vamos mostrar que se $\delta_1 = 0.d_1 d_2 d_3 \cdots$ e $\delta_2 = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$ são elementos de $\mathbb{D}$ tais que $f(\delta_1) = f(\delta_2)$, então δ_1 e δ_2 devem ser da forma dada na equação (3). De fato, seja j o *menor* índice tal que $d_j \neq b_j$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $d_j < b_j$, de modo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n - b_n}{10^n} = 0$$

implica:

$$\frac{1}{10^j} \leq \frac{b_j - d_j}{10^j} = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{d_n - b_n}{10^n} \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^j} \tag{4}$$

Segue, portanto, que $b_j - d_j = 1$, ou seja, $b_j = d_j + 1$, e para todo $n \geq j+1$, $d_n = 0$ e $b_n = 0$ Seja:

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0.d_1 d_2 d_3 \cdots \in \mathbb{D} \mid (\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d_n = 9)\}$$

Pelos argumentos expostos acima, $f \restriction_{\mathbb{D}^*}$ é injetora (uma vez que, excluídas as expansões decimais que, a partir de certo índice, são constituídas sempre do algarismo 9, não há mais a possibilidade de termos duas expressões que que correspondam a um mesmo número real em $[0,1[$).

Resta mostrarmos que $f \restriction_{\mathbb{D}^*} : \mathbb{D}^* \to [0,1[$ é sobrejetora.

Consideremos a decomposição de $[0,1[$ dada a seguir:

$$[0,1[=\bigcup_{j=0}^{9}\left[\frac{j}{10},\frac{j+1}{10}\right[$$

Dado $r \in [0,1[$, existe um, e somente um intervalo da forma $I_1 = \left[\frac{d_1}{10},\frac{d_1+1}{10}\right[$. Consideremos:

$$\left[\frac{d_1}{10},\frac{d_1+1}{10}\right[=\bigcup_{j=0}^{9}\left[\frac{d_1}{10}+\frac{j}{10^2},\frac{d_1}{10}+\frac{j+1}{10^2}\right[$$

Em seguida, escolhemos $d_2 \in \{0,\cdots,9\}$ tal que:

$$r \in I_2 = \left[\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2},\frac{d_1}{10}+\frac{d_2+1}{10^2}\right[$$

O processo pode ser repetido indefinidamente, sempre obtendo intervalos I_n tais que $\mathrm{Cl.}(I_n) \supset \mathrm{Cl.}(I_{n+1})$. Pela **Propriedade dos Intervalos Encaixados**, existe um único ponto em $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Cl.}(I_n)$. Como $r \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Cl.}(I_n)$, a expressão formada pelas extremidades esquerdas dos intervalos I_n converge para r, e portanto $r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{10^n}$. Logo, a expressão $0.d_1d_2d_3\cdots \in \mathbb{D}^*$ é tal que $f(0.d_1d_2d_3\cdots) = r$.

Definição 18 (dízima periódica). *Uma **dízima periódica** é uma expressão decimal que é imagem, por g, de uma sequência $d : \mathbb{N} \to \{0,\cdots,9\}$ estacionária — ou seja, tal que para algum número natural n_0 tenhamos $n \geq n_0 \Rightarrow d_n = d_{n_0}$.*

Exemplo 19. $0.\bar{7} = 0.777\cdots$ *é uma dízima periódica, assim como* $0.01\bar{3} = 0.01333\cdots$. *A barra sobre o último algarismo indica que ele se repetirá indefinidamente.*

Proposição 20 (Representação de dízimas periódicas como frações ordinárias). *Dada uma dízima periódica $0.d_1d_2\cdots d_m\overline{b_1b_2\cdots b_n}$, tem-se:*

$$0.d_1d_2\cdots d_m\overline{b_1b_2\cdots b_n} = \frac{d_1d_2\cdots d_mb_1\cdots b_n - d_1d_2\cdots d_m}{\underbrace{99\cdots9}_{n}\underbrace{0\cdots0}_{m}}$$

Demonstração. Podemos escrever:

$$0.d_1d_2\cdots d_m\overline{b_1b_2\cdots b_n} = \frac{d_1d_2\cdots d_m}{10^m} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+n\cdot j}}$$

Observamos que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{10^{m+n\cdot j}} = \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{10^m} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right)^j = \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{10^m} \cdot \frac{1}{10^n - 1}$$

e portanto:

$$0.d_1 d_2 \cdots d_m \overline{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{d_1 d_2 \cdots d_m}{10^m} + \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{10^m \cdot (10^n - 1)} =$$

$$= \frac{(10^n - 1) \cdot d_1 d_2 \cdots d_m + b_1 b_2 \cdots b_n}{10^m \cdot (10^n - 1)} = \frac{10^n \cdot d_1 d_2 \cdots d_m - d_1 d_2 \cdots d_m + b_1 b_2 \cdots b_n}{10^m \cdot (10^n - 1)} =$$

$$= \frac{(10^n \cdot d_1 d_2 \cdots d_m + b_1 b_2 \cdots b_n) - d_1 d_2 \cdots d_m}{10^m \cdot (10^n - 1)} =$$

$$= \frac{(d_1 d_2 \cdots d_m \overbrace{0 \cdots 0}^{n \text{ casas}} + b_1 b_2 \cdots b_n) - d_1 d_2 \cdots d_m}{10^m \cdot (10^n - 1)} = \frac{d_1 d_2 \cdots d_m b_1 b_2 \cdots b_m - d_1 d_2 \cdots d_m}{10^m \cdot (10^n - 1)}$$

Finalmente, observamos que $10^n - 1 = \overbrace{99 \cdots 9}^{n \text{ casas}}$, e portanto:

$$0.d_1 d_2 \cdots d_m \overline{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{d_1 d_2 \cdots d_m b_1 b_2 \cdots b_m - d_1 d_2 \cdots d_m}{\underbrace{99 \cdots 9}_{n} \underbrace{00 \cdots 0}_{m}}$$

$\square$

Exemplo 21. *Escrever a dízima:*

$$0.2\overline{394} = 0.2394394394 \cdots$$

como quociente de dois inteiros.

Solução: Escrevemos:

$$0.2\overline{394} = \frac{2}{10} + \frac{394}{10^4} + \frac{394}{10^7} + \frac{394}{10^{10}} + \cdots = \frac{2}{10} + \frac{394}{10^4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^3}\right)^j = \frac{2}{10} + \frac{394}{10^4} \cdot \frac{1\,000}{999} =$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{394\,000}{9\,990\,000} = \frac{1\,998\,000 + 394\,000}{9\,990\,000} = \frac{2\,392\,000}{9\,990\,000} = \frac{2\,392}{9\,990}$$

Exemplo 22. *Exprimir a dízima* $0.\overline{23}$ *como um quociente entre dois inteiros.*

Solução: Escrevemos:

$$0.\overline{23} = 0.232323\cdots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \cdots = \frac{23}{10^2} + \frac{23}{10^4} + \frac{23}{10^6} + \cdots =$$

$$= 23 \cdot \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots \right) = 23 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2} \right)^j = 23 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 23 \cdot \frac{1}{99} = \frac{23}{99}$$

3.2 Condição Necessária para Convergência de Uma Série

Observaremos que diversos outros critérios de convergência e divergência de uma série se baseiam no **Critério da Comparação**, que acabamos de demonstrar.

Ao investigar o comportamento de uma série numérica, o primeiro teste que se deve fazer é verificar se termo geral da sequência converge para zero. Varemos, no teorema a seguir, que se a série $\sum a_n$ converge, então $a_n \to 0$.

Teorema 23 (Condição necessária para a convergência de uma série numérica). *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais. Se* $\sum a_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Se $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$s_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \to L$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \to L$$

de modo que pelo item (b) do **Teorema 20** da Agenda 1, tem-se:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i = s_n - s_{n-1} \to L - L = 0$$

□

O resultado acima, em sua forma contrapositiva, é a espinha dorsal do primeiro teste pelo qual uma sequência deve passar a fim de que sua série associada convirja: o **critério do termo geral**.

Teorema 24 (Critério do Termo Geral para Divergência). *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais tal que $a_n \not\to 0$. Então se a série associada diverge.*

Exemplo 25. *A série $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é divergente, dado que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$.*

Exemplo 26. *As séries $\sum n, \sum n^2, \sum(a+n\cdot r)$ são todas divergentes, uma vez que $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 \infty$ e $\lim_{n\to\infty}(a+n\cdot r) = \pm\infty$, dependendo do sinal de r.*

Exemplo 27. *A série $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ é divergente, uma vez que $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$.*

Vamos analisar o seguinte:

Exemplo 28 (série harmônica). *Vamos considerar a série associada à sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, denominada* ***série harmônica****:*

$$\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 1+\frac{1}{2} \\ s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ \vdots \\ s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} \end{cases}$$

Vamos demonstrar que a série harmônica é ***divergente****.*

Estratégia da prova: *mostraremos que a sequência das somas parciais diverge, mostrando que esta admite uma subsequência divergente. Para demonstrar que a subsequência diverge, vamos construir uma $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente que minora a subsequência e aplicaremos o* ***Critério da Comparação****.*

Consideremos a seguinte subsequência de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por $(s_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$. Seu termo geral é $1+\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{i}$, e podemos observar as seguintes minorações:

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} + \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{32}}_{\geq \frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}} + \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \frac{1}{2^{n-1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\geq \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \text{ termos}}}$$

Vamos definir a série minorante, que denotaremos por $(t_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$. Esta série é construída a partir da sequência dada por $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = b_4 = \frac{1}{4}$, $b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = \frac{1}{8}$ e, em geral, $b_i = \frac{1}{2^n}$ para $2^{n-1} < i \leq 2^n, n \geq 1$

$$b_i = \begin{cases} 1, \ se \ i = 1 \\ \dfrac{1}{2^i} \ se \ 2^{n-1} < i \leq 2^n \end{cases}$$

Denotando $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, podemos escrever:

$$t_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$t_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$t_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$t_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ termos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ termos}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$t_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ termos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ termos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ termos}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$t_{2^k} = 1 + \frac{k}{2}$$

Observando que $(t_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e que

$$\lim_{k\to\infty} t_{2^k} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{k}{2} = \infty$$

*segue que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente. Pelo **Critério da Comparação**, a sequência $(s_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ é **divergente**, e como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência divergente, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Note que a série $\sum \frac{1}{n}$ é tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, mas ainda assim ela diverge. Isto ocorre porque a condição de o termo geral convergir para zero é apenas necessária, mas não é suficiente para garantir a convergência da série. Assim, registramos a seguinte importante:

Observação 29. *A recíproca do **Teorema 23** é falsa, isto é, o mero fato de $a_n \to 0$ não garante a convergência de $\sum a_n$. Como acabamos de ver, a própria série harmônica satisfaz a condição de seu termo geral tender a zero e, ainda assim, é divergente. Tem-se, portanto:*

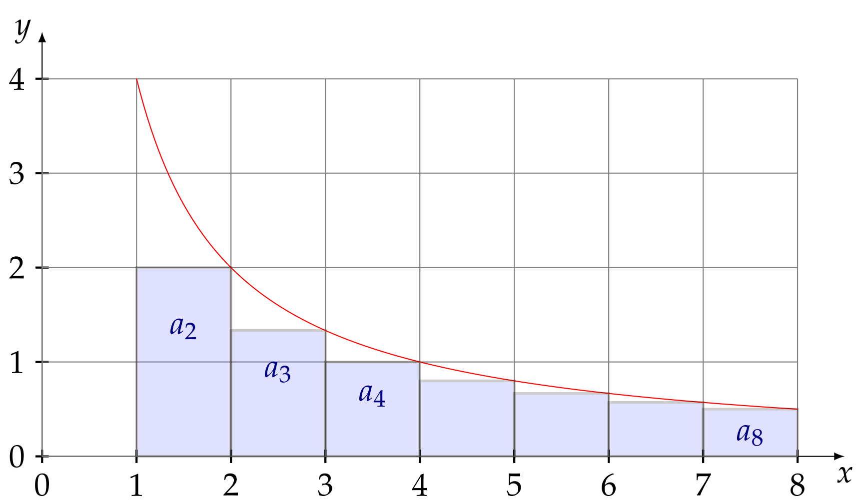
$$a_n \to 0 \not\Rightarrow \sum a_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{converge}$$

Um critério extremamente útil para decidir a convergência e/ou divergência de uma série é o:

Teorema 30 (Teste da Integral para Convergência). *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de termos não negativos, $N_0 \in \mathbb{N}$ e $f : [N_0, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, não-negativa e decrescente tais que para todo $n \geq N_0$ valem:*

$$n \geq N_0 \Rightarrow f(n) = a_n$$

Se $\int_{N_0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{N_0}^{n} f(x)dx$ existe, então a série $\sum a_n$ é convergente.



Demonstração. Como f é descrescente, para $n \geq N_0$, tem-se:

$$a_n = f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

e portanto:

$$a_{N_0} + a_{N_0+1} + \cdots + a_n \leq \int_{N_0-1}^{N_0} f(x)dx + \int_{N_0+1}^{N_0+1} f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx = \int_{N_0-1}^{n} f(x)dx$$

Uma vez que f é não-negativa, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\int_{N_0-1}^{n} f(x)dx \leq \int_{N_0-1}^{\infty} f(x)dx$$

e portanto, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$s_n = a_0 + \cdots + a_{N_0-1} + a_{N_0} + \cdots + a_n \leq a_0 + \cdots + a_{N_0-1} + \int_{N_0}^{n} f(x)dx \leq$$
$$\leq a_0 + \cdots + a_{N_0-1} + \int_{N_0}^{\infty} f(x)dx$$

Por ser limitada superiormente e crescente, em virtude do **Teorema 20** da AGENDA 1, a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número *menor* que $a_0 + \cdots + a_{N_0-1} + \int_{N_0}^{\infty} f(x)dx$. □

Definição 31 ($p-$**série**). *Dado $p \neq 1$, a $p-$**série** é a série associada à sequência $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, ou seja, a série:*

$$\sum \frac{1}{n^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

Teorema 32. *Se $p > 1$, então a $p-$série converge.*

Demonstração. Para verificarmos isto, vamos aplicar o **Teste da Integral**, **Teorema 30**. Para tanto, definimos:

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^p} \end{array}$$

que é uma função decrescente e não-negativa tal que:

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}.$$

Temos:

$$\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{(1-p)\cdot x^{1-p}}\bigg|_1^n = \frac{1}{(1-p)\cdot n^{1-p}} - \frac{1}{(1-p)}$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{n^p}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}$, segue do **Teste da Integral para Convergência** que $\sum \frac{1}{n^p}$ converge para um número menor que $1 + \frac{1}{p-1}$. □

Exemplo 33. *Decidir sobre a convergência ou divergência da série:*

$$\sum \frac{1}{n^2+1} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Solução: Para todo $n > 1$, podemos considerar:

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

que é uma função decrescente, não-negativa e tal que $a_n = \frac{1}{n^2+1} = f(n)$.

Como:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$$

do **Teste da Integral** que a série converge para algum número menor do que $\pi/4$.

Teorema 34 (Teste da Integral para Divergência). *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de termos não negativos, $N_0 \in \mathbb{N}$ e $f : [N_0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, não-negativa e decrescente tais que para todo $n \geq N_0$ valem:*

$$n \geq N_0 \Rightarrow f(n) = a_n$$

Se $\int_{N_0}^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{N_0}^n f(x)dx$ diverge para ∞, então a série $\sum a_n$ é divergente.

Demonstração. Como $\lim_{n\to\infty}\int_{N_0}^n f(x)dx = \infty$, dado qualquer $M > 0$, é possível exibir $n_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(M)$, então:

$$M \leq \int_{N_0}^n f(x)dx \leq \sum_{i=N_0}^n a_i$$

de modo que a sequência $\left(\sum_{i=N_0}^n a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cresce arbitrariamente, ou seja, diverge para ∞. □

Teorema 35. *Se $p < 1$, a $p-$série diverge.*

Demonstração. Para verificarmos isto, vamos aplicar o **Teste da Integral para a Divergência**, **Teorema 34**. Para tanto, definimos:

$$\begin{array}{rccc} f: & [1, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^p} \end{array}$$

que é decrescente, não-negativa e tal que $f(n) = \frac{1}{n^p}$. Uma vez que para $p > 1$, temos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \text{ divergente}$$

segue do **Teste da Integral para Divergência** que $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge. $\square$

Exemplo 36. *Decidir se a série a seguir converge ou diverge:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$$

Solução: Definimos:

$$\begin{array}{rccc} f: & [2, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x \cdot \ln(x)} \end{array}$$

Para qualquer $M > 2$, temos:

$$\int_2^M \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dxu = \ln(x) du = \frac{1}{x} dx \int_{\ln(2)}^{\ln(M)} \frac{1}{u} du = \ln(u) \Big|_{\ln(2)}^{\ln(M)} = \ln(\ln(M)) - \ln(\ln(2))$$

Dado que $\lim_{M \to \infty} \ln(M) = \infty$, tem-se $\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx = \lim_{M \to \infty} \int_2^M \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx = \infty$, de modo que pelo **Teste da Integral para Divergência**, a série é divergente.

Teorema 37 (Critério da Comparação no Limite). *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências tais que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n \geq N_0 \Rightarrow (a_n \geq 0)\&(b_n > 0).$$

Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$*, então:*

(a) Se $0 < L$, então $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes;

(b) Se $L = 0$ e $\sum b_n$ for convergente, então $\sum a_n$ é convergente;

(c) Se "$L = \infty$" e $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

Demonstração. Ad (a): Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, dado $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$, existe $n_0(L/2) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(L/2) \Rightarrow \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$$

Em particular, para todo $n \geq \max\{N_0, n_0(L/2)\}$ tem-se:

$$a_n \leq \left(\frac{3L}{2}\right) \cdot b_n$$

de modo que pelo **Critério da Comparação**, item (1), se $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ também converge.

Também temos, em particular, para $n \geq \max\{N_0, n_0(L/2)\}$ que:

$$b_n \leq \frac{2}{L} \cdot a_n$$

de modo que pelo **Critério da Comparação**, item (2), a divergência de $\sum b_n$ acarreta a divergência de $\sum a_n$.

Ad (b): Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(\varepsilon)$, então:

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} < \varepsilon \iff |a_n| < \varepsilon \cdot |b_n| \iff a_n < \varepsilon \cdot b_n$$

Novamente, pelo **Critério da Comparação**, item (1), se $\sum b_n$ for convergente, então $\sum a_n$ também será convergente.

Ad (c): Se $L = \infty$, então para qualquer número positivo, $M > 0$, existe $n_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(M) \Rightarrow M \leq \frac{a_n}{b_n} \iff b_n \leq \frac{1}{M} \cdot a_n$$

Pelo **Critério da Comparação**, item (2), segue que se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge. 1

$\square$

Exemplo 38. *Decidir sobre a convergência ou divergência da série:*

$$\sum \frac{1}{n^2+n}$$

Solução: Para n muito grande, temos:

$$\frac{1}{n^2+n} \approx \frac{1}{n^2}.$$

Assim, vamos comparar a série acima com:

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

que, por ser uma $p-$série com $p = 2 > 1$, é convergente. Fazendo $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n^2+n}$, temos $(\forall n \in \mathbb{N})((a_n \geq 0)\&(b_n > 0))$, e também:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+n}} = \frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 > 0$$

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, segue que $\sum \frac{1}{n^2+n}$ também converge.

Exemplo 39. *Decidir sobre a convergência ou divergência da série:*

$$\sum \frac{n+3}{\sqrt{n} \cdot (2n^4 + n - 5)}$$

Solução: Para valores muito grandes de n, temos:

$$\frac{n+3}{\sqrt{n} \cdot (2n^4 + n - 5)} \approx \frac{n}{\sqrt{n} \cdot (2 \cdot n^4)} = \frac{1}{2 \cdot n^{\frac{7}{2}}}$$

Vamos, portanto, comparar a série dada acima com:

$$b_n = \frac{1}{2 \cdot n^{\frac{7}{2}}},$$

que por ser produto de uma constante, $\frac{1}{2}$, por uma $p-$série com $p = 7/2 > 1$, é convergente.

Temos:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n+3}{\sqrt{n}\cdot(2n^4+n-5)}}{\frac{1}{2\cdot n^{\frac{7}{2}}}} = \frac{n+3}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot(2n^4+n-5)}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{n}}\cdot(2n^{\frac{7}{2}})}{n} = \frac{2n^4+6n^3}{2n^4+n-5}$$

Como:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+6n^3}{2n^4+n-5} = 1 > 0$$

segue que $\sum \frac{n+3}{\sqrt{n}\cdot(2n^4+n-5)}$ converge.

Teorema 40 (Teste da Razão (ou de d'Alembert)). *Se $\sum a_n$ é uma série de termos positivos tal que:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

então:

(a) Se $L < 1$, então $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente;

(b) Se $L > 1$, então $\sum a_n$ é divergente;

(c) Se $L = 1$, nada se conclui.

Demonstração. Ad (a): Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon \iff L-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L+\varepsilon \Rightarrow a_{n+1} < (L+\varepsilon)\cdot a_n$$

Em particular, para $\varepsilon < 1 - L$, teremos $L+\varepsilon < L+(1-L) < 1$ e existirá $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{gathered} a_{n_0(\varepsilon)+1} < (L+\varepsilon)\cdot a_{n_0(\varepsilon)} \\ a_{n_0(\varepsilon)+2} < (L+\varepsilon)\cdot a_{n_0(\varepsilon)+1} < (L+\varepsilon)^2\cdot a_{n_0(\varepsilon)} \\ \vdots \\ a_{n_0(\varepsilon)+k} < (L+\varepsilon)^k\cdot a_{n_0(\varepsilon)} \end{gathered}$$

Note que

$$\left(a_{n_0(\varepsilon)}\cdot\sum_{k=1}^{n}(L+\varepsilon)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge, por ser uma série geométrica de razão $L+\varepsilon<1$ (por escolha). Também, como para todo $k\in\mathbb{N}$ podemos escrever:

$$a_{n_0(\varepsilon)}+a_{n_0(\varepsilon)+1}+a_{n_0(\varepsilon)+2}+\cdots+a_{n_0(\varepsilon)+k}\leq$$
$$\leq a_{n_0(\varepsilon)}\cdot(1+(L+\varepsilon)+(L+\varepsilon)^2+\cdots+(L+\varepsilon)^k)=a_{n_0(\varepsilon)}\cdot\sum_{k=0}^{n}(L+\varepsilon)^k$$

Desta forma,

$$\sum_{i=0}^{n_0(\varepsilon)+k}a_i=a_0+\cdots+a_{n_0(\varepsilon)-1}+\sum_{n=n_0(\varepsilon)}^{n_0(\varepsilon)+k}a_n\leq a_0+\cdots+a_{n_0(\varepsilon)-1}+a_{n_0(\varepsilon)}\cdot\sum_{i=0}^{n_0(\varepsilon)+k}(L+\varepsilon)^i$$

Como:

$$\left(a_0+\cdots+a_{n_0(\varepsilon)-1}+a_{n_0(\varepsilon)}\cdot\sum_{i=0}^{n_0(\varepsilon)+k}(L+\varepsilon)^i\right)_{k\in\mathbb{N}}\text{ converge, pelo item (i) do } \textbf{Teorema 12},$$

segue do **Teorema 17** (item (a) do **Critério da Comparação**) que $\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Ad (b): Supondo que $L>1$, podemos escrever $L=1+\rho$, para algum $\rho>0$, e dado $0<\varepsilon<L-1$, existirá $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que:

$$n\geq n_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|\iff\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-(1+\rho)\right|<\varepsilon\iff(1+\rho)-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<(1+\rho)+\varepsilon\overset{\varepsilon<L-1}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\rho+L=(1+\rho)-(1-L)<(1+\rho)-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}\Rightarrow a_n\cdot\underbrace{(\rho+L)}_{>1}<a_{n+1}$$

Logo,

$$a_{n_0(\varepsilon)+1}>(\rho+L)\cdot a_{n_0(\varepsilon)}$$
$$a_{n_0(\varepsilon)+2}>(\rho+L)\cdot a_{n_0(\varepsilon)+1}>(\rho+L)^2\cdot a_{n_0(\varepsilon)}$$
$$a_{n_0(\varepsilon)+3}>(\rho+L)\cdot a_{n_0(\varepsilon)+2}>(\rho+L)^2\cdot a_{n_0(\varepsilon)+1}>(\rho+L)^3\cdot a_{n_0(\varepsilon)}$$
$$\vdots$$
$$a_{n_0(\varepsilon)+k}>(\rho+L)^k\cdot a_{n_0(\varepsilon)}$$

Assim, para todo $n\geq n_0(\varepsilon)$, tem-se:

$$(\rho+L)^k \cdot a_{n_0(\varepsilon)} < a_{n_0(\varepsilon)+k}$$

Como $\sum(\rho+L)^n \cdot a_{a_{n_0(\varepsilon)+k}}$ é uma série geométrica de razão *maior* que 1, pelo item (ii) do **Teorema 12**, ela diverge. Pelo **Teorema da Comparação** (item (b) do **Teorema 17**) segue que $\sum a_n$ também diverge.

Ad (c): De fato, considere as séries $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ (convergente, por ser uma $p-$série com $p = 2$) e $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ (divergente, por ser a série harmônica). Em ambos os casos tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Assim, se $L = 1$, a série pode tanto convergir como divergir, e nada podemos concluir. $\square$

Exemplo 41. *Estudar o comportamento de* $\sum \frac{1}{n!}$.

Solução: Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!}$ — logo uma sequência de termos positivos. Já sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, então a série pode convergir ou divergir. Vamos usar o **Teste da Razão**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Segue, do **Teste da Razão**, que a série converge.

Exemplo 42. *Estudar o comportamento de* $\sum \frac{n!}{n^n}$.

Solução: Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$ – logo, uma sequência de termos positivos. Vamos aplicar o **Teste da Razão**:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{\cancel{(n+1)}\cdot (n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

a série converge. Note que, como consequência da convergência de $\sum \frac{n!}{n^n}$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

que é um resultado não tão fácil de se obter diretamente.

Exemplo 43. *Estudar o comportamento da série* $\sum \frac{(2n)^n}{n!\cdot n}$

Solução: Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(2n)^n}{n!\cdot n}$ – logo, uma sequência de termos positivos. Vamos aplicar o **Teste da Razão**:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2\cdot(n+1))^{n+1}}{(n+1)!\cdot(n+1)}}{\frac{(2n)^n}{n!\cdot n}} = \frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot (n+1)^{\cancel{(n+1)}}}{(n+1)!\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n!\cdot n}{\cancel{2^n}\cdot n^n} = \frac{2\cdot (n+1)^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n-1}} =$$

$$= \frac{2\cdot \cancel{(n+1)}\cdot (n+1)^{n-1}}{\cancel{(n+1)}\cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^{n-1}} = 2\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = 2\cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Assim, como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2\cdot e > 1,$$

a série diverge.

Teorema 44 (Teste da Raiz (ou de Cauchy)). *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de termos não-negativos tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Então:

(a) Se $L < 1$*, então a série* $\sum a_n$ *é (absolutamente) convergente;*

(b) Se $L > 1$*, então a série* $\sum a_n$ *é divergente;*

(c) Se $L = 1$*, nada se conclui.*

Demonstração. Ad (a): Se $L < 1$, dado $0 < \varepsilon < 1 - L$, existirá $n_0(\varepsilon)$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon = \zeta < L + (1 - L) = 1$$

ou seja,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \zeta, \;\; 0 < \zeta < 1$$

e portanto:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow a_n < \zeta^n$$

Assim,

$$a_0 + \cdots + a_{n_0(\varepsilon)-1} + \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} a_{n_0(\varepsilon)} \leq a_0 + \cdots + a_{n_0(\varepsilon)-1} + \sum_{k=0}^{n} \zeta^k$$

Observando que $\left(\sum_{k=0}^{n} \zeta^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma série geométrica de razão menor do que 1, pelo item (ii) do **Teorema 12**, ela converge, e segue do **Critério da Comparação** (item (a) do **Teorema 17**), que $\sum a_n$ também converge.

Ad (b): Se $L > 1$, dado $0 < \varepsilon < L - 1$, podemos encontrar $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon \Rightarrow (L - \varepsilon)^n < a_n$$

Como $L > 1$ e $\varepsilon < L - 1$, tem-se $\zeta = L - \varepsilon > L - (L - 1) = 1$. Assim,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow (L - \varepsilon)^n < a_n \iff \zeta^n < a_n$$

e portanto:

$$a_0 + \cdots + a_{n_0(\varepsilon)-1} + \sum_{k=0}^{n} \zeta^k < a_0 + \cdots + a_{n_0(\varepsilon)-1} + \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} a_k$$

Como $\left(\sum_{k=0}^{n} \zeta^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma série geométrica de razão maior que 1, pelo item (ii) do **Teorema 12**, ela diverge, e pelo **Teorema 17** (item (b) do **Critério da Comparação**), segue que $\sum a_n$ é uma série divergente.

$\square$

Exemplo 45. *Estudar o comportamento da série* $\sum \frac{(3n+1)^n}{(n+8)^n}$.

Solução: Temos aqui uma sequência de termos positivos, logo pedemos aplicar o **Teste da Raiz**, calculando:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)^n}{(n+8)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+8} = 3 \geq 1,$$

de modo que a série diverge.

Veremos, a seguir, que o **Teste da Raiz** é mais geral que o **Teste da Razão**, ou seja, que aquele pode ser aplicado a um conjunto maior de séries:

Teorema 46. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > 0)$. Então, se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, teremos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.*

Demonstração. Pelo **Teorema da Conservação do Sinal** (**Corolário 39** da AGENDA 1), como para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, para algum $L \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$.

Suponhamos, primeiramente, que $L > 0$. Pela continuidade da função logarítmica, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} [\log(a_{n+1}) - \log(a_n)] = \log L$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |[\log(a_{n+1}) - \log(a_n)] - \log(L)| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \log(L) - \varepsilon < \log(a_{n+1}) - \log(a_n) < \log(L) + \varepsilon$$

Assim, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, valem:

$$\begin{cases} \log(L) - \varepsilon < \log(a_{n_0(\varepsilon)+1}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)}) < \log(L) + \varepsilon \\ \log(L) - \varepsilon < \log(a_{n_0(\varepsilon)+2}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)+1}) < \log(L) + \varepsilon \\ \log(L) - \varepsilon < \log(a_{n_0(\varepsilon)+3}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)+2}) < \log(L) + \varepsilon \\ \vdots \\ \log(L) - \varepsilon < \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)+k-1}) < \log(L) + \varepsilon \end{cases}$$

Somando cada membro de cada desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} k \cdot (\log(L) - \varepsilon) < {} & [\log(a_{n_0(\varepsilon)+1}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)})] + [\log(a_{n_0(\varepsilon)+2}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)+1})] + \\ & + [\log(a_{n_0(\varepsilon)+3}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)+2})] + \cdots + [\log(a_{n_0(\varepsilon)+k-1}) - \\ & - \log(a_{n_0(\varepsilon)+k-2})] + [\log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)+k-1})] < \\ & < k \cdot (\log(L) + \varepsilon) \end{aligned}$$

Observando que os termos de "mesma cor" se cancelam no termo do meio das inequações acima, obtemos:

$$k \cdot (\log(L) - \varepsilon) < \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)}) < k \cdot (\log(L) + \varepsilon)$$

o que nos permite escrever, para qualquer $k \in \mathbb{N}$:

$$\log(L) - \varepsilon < \frac{1}{k} \cdot [\log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) - \log(a_{n_0(\varepsilon)})] < \log(L) + \varepsilon$$

$$\log(L) - \varepsilon < \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) - \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)})] < \log(L) + \varepsilon$$

Portanto:

$$\lim_{k\to\infty} (\log(L) - \varepsilon) < \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) - \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)})] \right) < \lim_{k\to\infty} (\log(L) + \varepsilon)$$

ou seja,

$$\log(L) - \varepsilon < \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) \leq \limsup_{k\to\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) < \log(L) + \varepsilon$$

Uma vez que ε é arbitrário, tem-se:

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k})$$

e portanto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) = \log(L)$$

Mas:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_0(\varepsilon) + k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)+k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \log(a_{n_0(\varepsilon)} + k) = \log(L)$$

de modo que da continuidade da função exponencial de base 10, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

$\square$

Assim, sempre que pudermos assegurar a convergência ou a divergência de uma série pelo **Teste da Razão**, também podemos fazê-lo usando o **Teste da Raiz**.

Apresentamos, a seguir, um exemplo de série para a qual não podemos aplicar o **Teste da Razão**, mas no qual podemos usar o **Teste da Raiz**.

Exemplo 47. *Considere* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_n = \dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$*, que é uma sequência de termos positivos. Pelo* ***Teste da Razão****, temos:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}}{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}} = 2^{n+(-1)^n-(n+1)+(-1)^n} = 2^{-1+2(-1)^n}$$

cujo limite conforme $n \to \infty$ *não existe*[1]*. Aplicando o* ***Teste da Raiz****, obtemos:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n+(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{2} < 1$$

o que garante que a série converge.

O exemplo acima nos permite enunciar o seguinte:

Corolário 48. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de termos positivos. A existência de* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *não assegura a existência de* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

4 Critérios de Convergência para Séries de Termos Quaisquer

Os testes desenvolvidos na seção anterior dizem respeito apenas a séries cujos termos são todos não-negativos. Ainda precisamos considerar o caso geral, isto é, devemos estudar séries de termos que podem ser tanto positivos quanto negativos. Um exemplo importante é a **série alternada**, dada na seguinte:

Definição 49 (série alternada). *Uma série* $\sum a_n$ *tal que a sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tem termos alternadamente positivos e negativos é dita uma* ***série alternada****.*

[1] Basta observar que a subsequência de $(2^{-1+2(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}}$ de índices pares converge para $\frac{1}{2}$, enquanto que a subsequência de índices ímpares converge para $\frac{1}{8}$.

Para demonstrar a convergência de séries cujo termo geral pode assumir qualquer sinal, nem sempre poderemos usar o argumento de que a "sequência das somas parciais é crescente e limitado superiormente". Assim, nesta seção usaremos frequentemente a seguinte caracterização de convergência, dada pelo **Teorema 48** da AGENDA 1:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy}$$

Uma vez que já fizemos o estudo de séries de termos não-negativos, convém introduzirmos a seguinte:

Definição 50 (série absolutamente convergente). *Uma série $\sum a_n$ é* ***absolutamente convergente*** *se, e somente se, $\sum |a_n|$ é convergente.*

Assim, dada uma série qualquer $\sum a_n$, não importando o sinal dos termos da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos ferramentas para, pelo menos, decidir se a série é absolutamente convergente.

Como uma aplicação da caracterização de sequências convergentes de números reais como sendo exatamente as sequências de Cauchy, apresentamos o seguinte:

Teorema 51. *Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente.*

Demonstração. Uma vez que $\sum |a_n|$ converge, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, de modo que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$ e todo $m \geq n_0(\varepsilon)$ tem-se:

$$\sum_{i=m}^{m+p} |a_i| = \left|\sum_{i=m}^{m+p} |a_i|\right| = |s_{m+p} - s_m| < \varepsilon$$

Uma vez que:

$$\left|\sum_{i=m}^{m+p} a_i\right| \leq \sum_{i=m}^{m+p} |a_i| < \varepsilon$$

obtemos que $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Desta forma, $\sum a_n$ é convergente. □

Exemplo 52. *A série $\sum \dfrac{\sin(n\pi)}{n^3}$ converge ou diverge? Justifique.*

Solução: Observamos que, para todo $n \geq 1$ tem-se:

$$\left|\frac{\sin(n\pi)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

e como $\sum \frac{1}{n^3}$, por ser uma $p-$série com $p = 3$, converge, segue do **Critério da Comparação** (item (a) do **Teorema 17**) que $\sum \left| \frac{\sin(n\pi)}{n^3} \right|$ é convergente. Assim, a série $\sum \frac{\sin(n\pi)}{n^3}$, por ser absolutamente convergente, é convergente.

Para garantir a convergência absoluta de séries, dispomos de todas as ferramentas apresentadas na seção anterior. A fim de destacar duas, apresentamos o seguinte:

Teorema 53. *Seja $\sum a_n$ uma série de termos de quaisquer sinais. Então:*

(a) Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$, $\sum |a_n|$ converge, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente;

(b) Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L > 1$, a série $\sum |a_n|$ diverge;

(c) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então $\sum |a_n|$ converge, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente;

(d) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, a série $\sum |a_n|$ diverge;

A demonstração do teorema acima é exatamente a mesma dos testes da razão (itens (a) e (b)) e da raiz ((c) e (d)) para séries de termos não-negativos.

Nem toda série convergente é absolutamente convergente, como veremos posteriormente. Vamos apresentar alguns resultados que nos permitem determinar o comportamento de uma série de termos quaisquer.

Teorema 54 (Teste de Leibniz). *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > 0)$. Se:*

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for decrescente, ou seja, $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$;

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

então a série $\sum(-1)^n \cdot a_n$ é convergente.

Demonstração. Vamos construir a sequência das somas parciais:

$$\begin{cases} s_1 = a_0 + (-1) \cdot a_1 = a_0 - a_1 \\ s_2 = a_0 + (-1) \cdot a_1 + (-1)^2 \cdot a_2 = a_0 - a_1 + a_2 \\ s_3 = s_2 + (-1)^3 \cdot a_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ s_4 = s_3 + (-1)^4 \cdot a_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \\ \vdots \\ s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k \end{cases}$$

Afirmamos que:

(a) $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots \geq s_{2k} \geq \cdots$

(b) $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2k+1} \leq \cdots$

(c) Se k é ímpar e ℓ é par, então $s_k \leq s_\ell$.

Justificativa:

Ad (a): temos, de fato, para todo $k \in \mathbb{N}$, $s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} + \overbrace{(a_{2k+2} - a_{2k+1})}^{a_{2k+1} \leq a_{2k+2}} \leq s_{2k}$;

Ad (b): temos, de fato, para todo $k \in \mathbb{N}$, $s_{2k+3} = s_{2k+1} + \overbrace{(a_{2k+2} - a_{2k+3})}^{a_{2k+3} \leq a_{2k+1}} \geq s_{2k+1}$;

Ad (c): Notemos, primeiro, que $s_{2k} = s_{2k-1} + a_{2k} \geq s_{2k-1}$. Dados, agora, k ímpar e ℓ par, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < 2n$ e $\ell < 2n$. Por (a) e por (b), $s_k \leq s_{2n-1} \leq s_{2n} \leq s_\ell$.

As sequências $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ são, portanto, ambas monótonas, sendo $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ crescente e $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ decrescente.

Observe que $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente por s_0, e que $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente por s_1. Desta forma, ambas convergem. Sejam:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \quad \text{e} \quad \beta = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

Vamos agora mostrar que $\alpha = \beta$.

Temos:

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

Como $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, passando ao limite a igualdade acima, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n+1}-s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

e portanto $\alpha - \beta = 0$, e $\alpha = \beta$.

Demonstraremos que $\lim s_n$ existe dividindo a situação em dois casos: n par e n ímpar.

Se $n = 2k$, então:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{k\to\infty} 2_{2k} = \alpha$$

Se $n = 2k+1$, então:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} - a_{2k+1} = \alpha - 0 = \alpha.$$

Desta forma, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. $\square$

Exemplo 55. *A série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge ou diverge? Justifique.*

Solução: observamos que a sequência associada a esta série é $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)$. Como $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos positivos e decrescente, pelo **Teste de Leibniz**, ela converge.

O exemplo acima nos permite destacar a seguinte:

Observação 56. *A recíproca do **Teorema 50** é* falsa, *ou seja, o fato de uma série convergir* não *implica na sua convergência absoluta. De fato, embora $\sum(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ convirja, pelo **Teste de Leibniz**, $\sum \frac{1}{n}$, por ser a série harmônica, diverge. A séries convergentes que não são absolutamente convergentes denominamos **séries condicionalmente convergentes**.*

Teorema 57 (Teorema da Estimativa). *Seja $\sum(-1)^n \cdot a_n$ uma série tal que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de termos positivos. Então:*

$$|\bar{s} - s_n| < a_{n+1}$$

Demonstração. Seja $\bar{s} = \lim_{n\to\infty} s_n$. Pela demonstração do **Teste de Leibniz**, concluímos que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$s_{2k-1} \leq \bar{s} \leq s_{2k}$$

Consideraremos os casos em que n é ímpar ($n = 2k-1$) e em que n é par ($n = 2k$).

$$\begin{cases} \bar{s} - s_{2k-1} \leq s_{2k} - s_{2k-1} = (-1)^{2k} \cdot a_{2k} = a_{2k} \\ s_{2k-1} - \bar{s} \leq s_{2k} - s_{2k+1} = -(-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} = a_{2k+1} \end{cases}$$

Assim, em qualquer caso, tem-se:

$$|\bar{s} - s_n| \leq a_{n+1}$$

$\square$

Referências

[1] Boulos, P.; Abud, Z. I., **Cálculo Diferencial e Integral**, Volume 2, Makron Books, São Paulo, 2000.

[2] Figueiredo, D. G., **Análise I**, 2^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[3] Gouvêa, F. Q., **Séries Infinitas**, Notas de aula. São Paulo, 1982.

[4] Hyslop, J. M., **Infinite Series**, 5th edition, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1970.

[5] Lima, E.L., **Curso de Análise**, volume 1, 14^a edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2016.

[6] Piskunov, L., **Differential and Integral Calculus**, MIR Publishers, Moscow. Traduzido do Russo por G. Yankovsky, 1965.