MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral I
1^o semestre de 2025
Agenda 02

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Introdução

A população do México no início da década de 1980 é dada na tabela abaixo:

Ano	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
População (mi)	67.38	69.13	70.93	72.77	74.66	76.60	78.59
Variação na população (mi):		1.75	1.80	1.84	1.89	1.94	1.99

Para ver como a população está crescendo, olhamos para o aumento da população na terceira linha da tabela. Se a população tivesse aumentado linearmente (*i.e.*, em progressão aritmética), todos os números da terceira linha seriam os mesmos.

Suponha que dividimos a população de cada ano pela do ano anterior. Por exemplo,

$$\frac{\text{População em 1981}}{\text{População em 1980}} = \frac{69.13\text{mi}}{67.39\text{mi}} \approx 1.026$$

$$\frac{\text{População em 1982}}{\text{População em 1981}} = \frac{70.93\text{mi}}{69.13\text{mi}} \approx 1.026$$

$$\frac{\text{População em 1983}}{\text{População em 1982}} = \frac{72.77\text{mi}}{70.93\text{mi}} \approx 1.026$$

$$\frac{\text{População em 1984}}{\text{População em 1983}} = \frac{74.66\text{mi}}{72.77\text{mi}} \approx 1.026$$

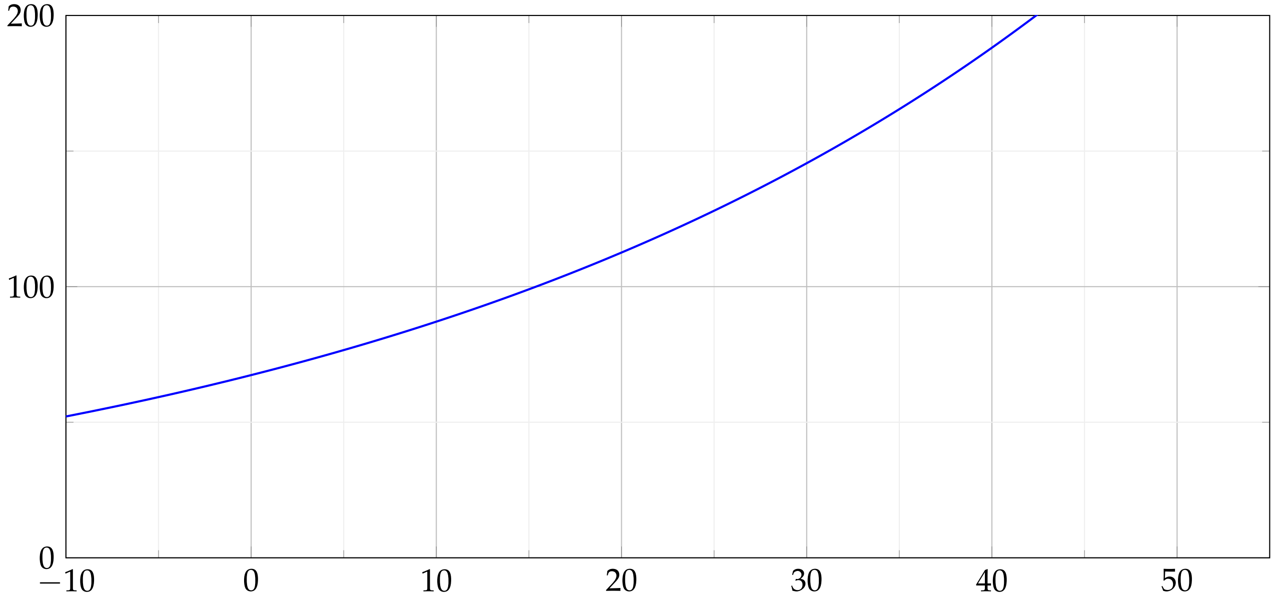
*jeancb@ime.usp.br

$$\frac{\text{População em 1985}}{\text{População em 1984}} = \frac{74.66\text{mi}}{72.77\text{mi}} \approx 1.026$$

O fato de que os cálculos acima dão sempre, aproximadamente, 1.026, mostra que o crescimento da população do México cresceu 2.6% ao ano entre 1980 e 1985. Sempre que temos um fator de crescimento constante (neste caso, 1.026), temos um **crescimento exponencial**. A população após t anos desde 1980 é dada pela **função exponencial**:

$$P(t) = 67.38 \cdot (1.026)^t$$

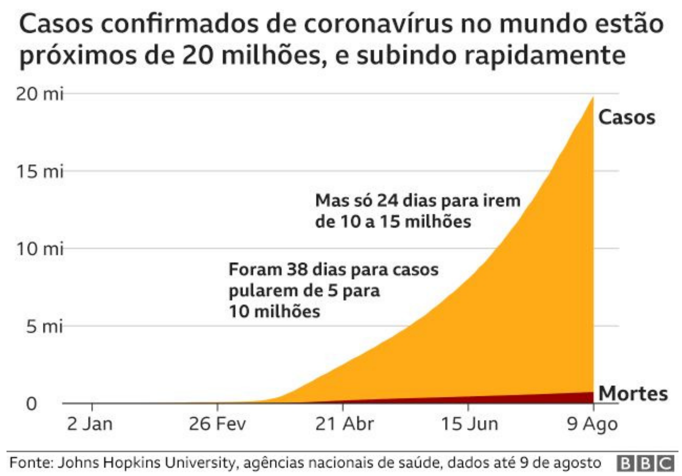
Se supusermos que a fórmula é válida por 50 anos, o gráfico da população terá a forma dada abaixo:



Como a população está crescendo cada vez mais rápido, o gráfico fica cada vez mais íngreme; dizemos que este gráfico é *convexo*; mesmo funções exponenciais que crescem vagarosamente no início, como esta, acabam finalmente crescendo muito rapidamente.

Para reconhecer que uma tabela de valores de P de t vem de uma função exponencial $P = P_0 \cdot a^t$, procure as razões de valores de P que são constantes para valores de t espaçados igualmente.

Analisemos agora um outro fenômeno que, observado ao longo de 220 dias, também apresenta um comportamento exponencial, qual seja, a disseminação da covid-19 (a velocidade de propagação da doença depende da quantidade de infectados em certo momento). Veja, abaixo, como foi o crescimento do número de infectados pela covid entre 2 de janeiro e 9 de agosto de 2020:



O gráfico acima assemelha-se muito a uma curva exponencial, das vistas no Ensino Médio, não é verdade?

Vamos analisar, agora, uma quantidade que decresce ao longo do tempo ao invés de crescer. Quando se administra uma medicação em um paciente, o remédio entra no fluxo sanguíneo. Quando ele passa pelo fígado e pelos rins, é metabolizado e eliminado a uma taxa que depende da droga em questão. Para o antibiótico ampicilina, aproximadamente 40% da droga são eliminados por hora. Uma dose típica de ampicilina é de 250mg. Suponha que $Q = f(t)$, onde Q é a quantidade de ampicilina, em mg, no fluxo sanguíneo t horas depois do remédio ter sido dado. Em $t = 0$, temos $Q = 250$. Como, em cada hora, a quantidade restante é de 60% da quantidade anterior, temos:

$$f(0) = 250$$
$$f(1) = 250 \cdot (0.6)$$
$$f(2) = (250 \cdot (0.6)) \cdot (0.6) = 250 \cdot (0.6)^2,$$

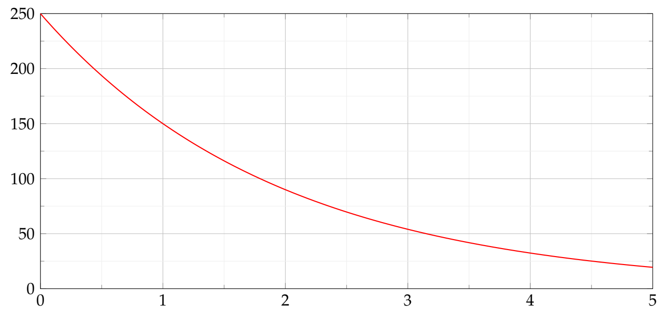
e depois de t horas,

$$Q = f(t) = 250 \cdot (0.6)^t$$

Essa é uma *função de decaimento exponencial*. A tabela a seguir mostra alguns dos valores deste decaimento:

t (h)	0	1	2	3	4	5
Q (mg)	250	150	90	54	32.4	19.4

Esboçamos o gráfico abaixo, onde no eixo horizontal as unidades representam as horas decorridas desde a administração do medicamento e as unidades no eixo vertical representam os mg da droga presentes na corrente sanguínea do paciente:



Definição 1 (função exponencial). *Dizemos que P é uma **função exponencial** de t com base b, se:*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & P_0 \cdot b^t \end{array}$$

onde P_0 é a quantidade inicial (quando $t = 0$) e b é o fator segundo o qual P muda quando t aumenta de uma unidade. Se $b > 1$, temos crescimento exponencial, enquanto que se $0 < b < 1$, temos decaimento exponencial.

Observação 2. *A razão de excluirmos $b \leq 0$ é que, por exemplo, não poderíamos definir $b^{\frac{1}{2}}$ se $b < 0$. Além disso, não temos, em geral, $b = 1$, já que $P = P_0 \cdot 1^t$ é uma função constante, nesse caso. O valor de b está intimamente ligado à taxa de crescimento (ou decaimento) percentual. Por exemplo, se $b = 1.03$, P está crescendo a uma taxa de 3% por unidade de tempo; se $b = 0.94$, então P está decrescendo a uma taxa de 6% por unidade de tempo.*

As funções exponenciais são as únicas funções capazes de descrever matematicamente a evolução de grandezas cuja taxa de crescimento (ou decaimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento. Dentre outros exemplos de fenômenos que podem ser modelados lançando mão das funções exponenciais, podemos citar o decaimento radioativo de certo elemento químico, o crescimento de uma colônia de bactérias ou mesmo a evolução de um capital investido a juros em uma carteira de investimentos.

1 Propriedades das Potências: o que devemos entender por $3^{\sqrt{2}}$?

Nesta seção apresentaremos formalmente a definição de potência, partindo de potências com expoente natural e terminando com potências de expoente irracional.

1.1 Potências com Expoente Natural

Dado um número real $b > 0$, sabemos certamente o que devemos entender por b^n, quando n é um número natural. Definimos, recursivamente, $b^0 = 1$ e, para qualquer número natural $n \geq 2$, $b^n = b \cdot b^{n-1}$.

Teorema 3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes propriedades:*

(P1) $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$;

(P2) *Se* $b \neq 0$ *e* $m \geq n$, $\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$;

(P3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

(P4) *Se* $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

(P5) $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$

Demonstração. Ad **(P1)**: Seja $m \in \mathbb{N}$ fixado. Demonstraremos a propriedade pelo Princípio da Indução Finita.

Primeiramente mostramos que quando $n = 1$ a propriedade é válida ("o primeiro dominó cai"). De fato,

$$b^m \cdot b^1 = b^m \cdot b \overset{\overset{\text{def}}{\uparrow}}{=} b^{m+1}.$$

Em seguida, supomos que vale:

$$\text{H.I. } b^m \cdot b^n = b^{m+n},$$

(ou seja, supomos que o $n-$ésimo dominó cai) e provamos, com fulcro nesta hipótese, que vale:

$$b^m \cdot b^{n+1} = b^{m+n+1},$$

(ou seja, que se o $n-$ésimo dominó cai, então o $(n+1)-$ésimo dominó também cai). De fato, supondo que $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, temos:

$$b^m \cdot b^{n+1} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} b^m \cdot (b^n \cdot b^1) \overset{\substack{\text{associatividade}\\ \uparrow}}{=} (b^m \cdot b^n) \cdot b \overset{\substack{\text{H.I.}\\ \uparrow}}{=} b^{m+n} \cdot b \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} b^{m+n+1},$$

ou seja, a propriedade é válida para $n+1$ sempre que for válida para n. Fica estabelecida a propriedade **P1**.

Ad **(P2)**: Novamente, consideraremos $m \in \mathbb{N}$ fixado. A propriedade é válida para $n = 1$, uma vez que:

$$\frac{b^m}{b^1} = \frac{\cancel{b} \cdot b^{m-1}}{\cancel{b}} = b^{m-1}$$

Supondo que vale $b^m/b^n = b^{m-n}$, $n < m$, mostraremos que a propriedade é válida para $n+1 \leq m$. Com efeito:

$$\frac{b^m}{b^{n+1}} \overset{\substack{\text{def}\\ \uparrow}}{=} \frac{b^m}{b^n \cdot b} = \frac{b^m}{b^n} \cdot \frac{1}{b} \overset{\substack{\text{H.I.}\\ \uparrow}}{=} \frac{b^{m-n}}{b} = \frac{\cancel{b} \cdot b^{m-n-1}}{\cancel{b}} = b^{m-n-1} = b^{m-(n+1)}$$

Ad **(P3)**: Novamente, a demonstração será feita por indução. A propriedade é válida para $n = 1$, pois:

$$(a \cdot b)^1 = (a \cdot b) \cdot 1 = a^1 \cdot b^1$$

Supondo que vale H.I. : $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, segue que:

$$(a \cdot b)^{n+1} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) \overset{\substack{\text{H.I.}\\ \uparrow}}{=} a^n \cdot b^n \cdot (a \cdot b) = a^n \cdot (b^n \cdot a) \cdot b = a^n \cdot (a \cdot b^n) \cdot b$$

$$= (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$$

e a propriedade é válida para $n+1$. Assim, fica estabelecida a propriedade **P3**.

Ad **(P4)**:

Ad **(P5)**: Consideraremos m fixado e faremos a prova por indução em n.

Para $n = 1$, temos $(b^m)^1 \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} b^m = b^{m \cdot 1}$.

Suponhamos que valha H.I. $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$. Então:

$$(b^m)^{n+1} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} (b^m)^n \cdot b^m \overset{\substack{\text{H.I.}\\ \uparrow}}{=} b^{m \cdot n} \cdot b = b^{m \cdot n} \cdot b^m \overset{\substack{\mathbf{P1}\\ \uparrow}}{=} b^{m \cdot n + m} = b^{m \cdot (n+1)},$$

ou seja, a propriedade vale para $n+1$. Fica, assim, estabelecida a propriedade **P5**.

$\square$

Na definição de b^n, o número b pode ser *qualquer* número real, positivo, negativo ou mesmo nulo. Vejamos o que ocorre em cada caso:

Caso em que $b = 0$**:** neste caso, definimos $0^0 := 1$ e $0^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso em que $b > 0$ neste caso, $b^n > 0$, isto é, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real positivo.

Caso em que $b < 0$**:** neste caso, $b^n > 0$ se n é par, e $b^n < 0$ se n é ímpar.

No caso em que o expoente é um número inteiro negativo, *definimos*:

$$b^n = \frac{1}{b^n},$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo. Com esta definição, a propriedade **P4** passa a ter significado mesmo quando $m < n$, ou seja, se $b \neq 0$ e $m < n$, temos:

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} = \frac{1}{b^{n-m}}$$

Naturalmente que 0^{-n} é um símbolo desprovido de significado – "Obladi Oblada".

1.2 Potências de Expoente Inteiro e Negativo

Com as definições de potência de expoente natural e potência de expoente inteiro negativo, podemos estabelecer a seguinte:

Definição 4. *Sejam $b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$. Então:*

$$b^n = \begin{cases} 1, \ \ se \ \ n = 0 \\ b^{n-1} \cdot b, \ \ se \ \ n > 0 \\ \dfrac{1}{b^{-n}}, \ \ se \ \ n < 0 \ \ e \ \ b \neq 0 \end{cases}$$

Estas potências têm as propriedades dadas na seguinte:

Proposição 5. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n < 0$. Valem as seguintes propriedades:*

(Z1) $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$;

(Z2) *Se* $b \neq 0$ *e* $m \geq n$, $\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$;

(Z3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

(Z4) *Se* $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

(Z5) $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$

Demonstração. Nas demonstrações abaixo são utilizadas as propriedades que demonstramos para potências com expoente natural.

Ad **(Z1)**: Tem-se:

$$b^m \cdot b^n = \frac{1}{b^{-m}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{b^{-m} \cdot b^{-n}} \overset{\overset{\textbf{(P1)}}{\uparrow}}{=} \frac{1}{b^{-m-n}} = \frac{1}{b^{-(m+n)}} = b^{m+n}$$

Ad **(Z2)**: Tem-se:

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{\frac{1}{b^{-m}}}{\frac{1}{b^{-n}}} = \frac{1}{b^{-m}} \cdot \frac{b^{-n}}{1} = \frac{b^{-n}}{b^{-m}} = b^{-n-(-m)} = b^{m-n}$$

Ad **(Z3)**: Tem-se:

$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} \overset{\overset{\textbf{(P3)}}{\uparrow}}{=} \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} \overset{\overset{\text{def.}}{\uparrow}}{=} a^n \cdot b^n$$

Ad **(Z4)**:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\frac{1}{a^{-n}}}{\frac{1}{b^{-n}}} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} \overset{\overset{\textbf{(P4)}}{\uparrow}}{=} \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ad **(Z5)**:

$$b^{m\cdot n} = \frac{1}{b^{-m\cdot n}} = \frac{1}{b^{-m}}$$

$\square$

1.3 Raiz $n-$ésima Aritmética

Nosso primeiro objetivo nesta seção é convencer o leitor de que, dado qualquer número natural $n \geq 2$, todo número real positivo, $a \geq 0$, admite uma única raiz $n-$ésima positiva.

Para ilustrar este fato, demonstraremos, em seguida, que 2 admite uma única raiz quadrada positiva.

Afirmação: existe um único $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = 2$.

Seja A_0 o maior natural tal que:

$$A_0^2 \leq 2 \ \ \text{(neste caso, } A_0 = 1 \text{)}$$

daí:

$$(A_0+1)^2 > 2 \ \ \text{(pois } A_0 + 1 = 2, 2^2 > 2 \text{)}$$

Façamos, agora, $a_0 = A_0$ e $b_0 = A_0 + 1$. Seja $A_1 \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ o maior dígito tal que:

$$\left(A_0 + \frac{A_1}{10}\right)^2 \leq 2 \ \text{(neste caso, } A_1 = 4, (1.4)^2 < 2 < (1.5)^2 \text{).}$$

Façamos:

$$a_1 = A_0 + \frac{A_1}{10} \ \text{ e } \ b_1 = A_0 + \frac{A_1+1}{10}$$

Assim,

$$a_1^2 \leq 2 < b_1^2$$

Observe que $a_1 = 1.4$ e que $b_1 = 1.5$.

Seja A_2 o maior dígito tal que:

$$\left(A_0 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2}{10^2}\right)^2 \leq 2 \ \text{(neste caso, } A_2 = 1, (1.41)^2 < 2 < (1.42)^2 \text{).}$$

Façamos:

$$a_2 = A_0 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2}{10^2} \text{ e } b_2 = A_0 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2 + 1}{10^2}$$

Observe que $a_2 = 1.41$ e $b_2 = 1.42$.

Assim,

$$a_2^2 \leq 2 < b_2^2.$$

Prosseguindo com este raciocínio, obteremos uma sequência de intervalos:

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n]$$

satisfazendo as condições da Propriedade dos Intervalos Encaixados, uma vez que:

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$$

Deste modo, existe um único número real α tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale:

$$a_n \leq \alpha \leq b_n,$$

e portanto:

$$a_n^2 \leq \alpha^2 \leq b_n^2.$$

Mas α^2 é o único número real tendo esta propriedade, por $[a_0^2, b_0^2], [a_1^2, b_1^2], \cdots, [a_n^2, b_n^2], \cdots$ também satisfaz as condições daquela propriedade. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$a_n^2 \leq 2 < b_n^2,$$

segue-se que $\alpha^2 = 2$. Fica, assim, provado, que existe um número real $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = 2$. Vejamos, agora, a unicidade. Suponhamos que $\beta > 0$ também satisfaça $\beta^2 = 2$. Então:

$$(\alpha^2 = 2) \& (\beta^2 = 2) \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$$

Teorema 6. *Sejam $b > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Então existe um único número real positivo, α, tal que $\alpha^n = a$. Denotamos α por $\sqrt[n]{a}$.*

Demonstração. Seja A_0 o maior natural tal que:

$$A_0^n \leq b$$

daí:

$$(A_0 + 1)^n > b$$

Façamos, agora, $a_0 = A_0$ e $b_0 = A_0 + 1$. Seja $A_1 \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ o maior dígito tal que:

$$\left(A_0 + \frac{A_1}{10}\right)^n \leq b$$

Façamos:

$$a_1 = A_0 + \frac{A_1}{10} \text{ e } b_1 = A_0 + \frac{A_1 + 1}{10}$$

Assim,

$$a_1^n \leq b < b_1^n$$

Seja A_2 o maior dígito tal que:

$$\left(A_0 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2}{10^2}\right)^n \leq b$$

Façamos:

$$a_2 = A_0 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2}{10^2} \text{ e } b_2 = A_0 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2 + 1}{10^2}$$

Assim,

$$a_2^n \leq b < b_2^n.$$

Prosseguindo com este raciocínio, obteremos uma sequência de intervalos:

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \cdots, [a_k, b_k]$$

satisfazendo as condições da Propriedade dos Intervalos Encaixados, uma vez que:

$$b_k - a_k = \frac{1}{10^k}$$

Deste modo, existe um único número real α tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale:

$$a_k \leq \alpha \leq b_k,$$

e portanto:

$$a_k^n \leq \alpha^n \leq b_k^n.$$

Mas α^n é o único número real tendo esta propriedade, por $[a_0^n, b_0^n], [a_1^n, b_1^n], \cdots, [a_k^n, b_k^n], \cdots$ também satisfaz as condições daquela propriedade. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$a_k^n \leq b < b_k^n,$$

segue-se que $\alpha^n = b$. Fica, assim, provado, que existe um número real $\alpha > 0$ tal que $\alpha^n = b$. Vejamos, agora, a unicidade. Suponhamos que $\beta > 0$ também satisfaça $\beta^n = b$. Então:

$$(\alpha^n = b)\&(\beta^n = b) \Rightarrow \alpha^n = \beta^n \Rightarrow \alpha = \beta$$

$\square$

Calcados no teorema acima, temos a seguinte:

Definição 7. *Dados $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é possível demonstrar que existe sempre um número real positivo ou nulo, b, tal que $b^n = a$.*

*Ao número b chamamos de **raiz $n-$ésima de** a, e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, em que a é chamado "radicando" e n é chamado de "índice".*

Segue imediatamente da definição que, para todo $a \geq 0$, tem-se:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a. \tag{1}$$

Observemos que, em virtude disto, temos:

$$\sqrt{36} = 6$$

e não $\sqrt{36} = \pm 6$, por exemplo.

Finalmente, observe que no caso de um quadrado perfeito, temos:

$$\sqrt{b^2} = |b|.$$

Proposição 8. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z}, n, p \in N$. Temos:*

(R1) $\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n \cdot p]{b^{m \cdot p}}$

(R2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(R3) *Se* $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(R4) $(\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}$;

(R5) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p \cdot n]{b}$

Demonstração. Ad **(R1)**: Fazemos $x = \sqrt[n]{b^m}$, e segue que:

$$x^{n \cdot p} = (\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot p} = [(\sqrt[n]{b^m})^n]^p = [a^m]^p \Rightarrow x = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Ad **(R2)**: Neste caso, fazemos $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, e temos:

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Ad **(R4):** Considerando n fixo e $m \geq 0$, provaremos o resultado por indução sobre m.

A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois:

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{b^1}$$

Suponhamos que valha H.I. : $\left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m}$. Temos:

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^{m+1} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right) \overset{\substack{\text{H.I.}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b} \overset{\substack{\textbf{(R2)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[n]{b^{m+1}}$$

Se $m < 0$, fazemos $-m = q > 0$, de modo que vale:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^q} = \frac{1}{\sqrt[n]{b^q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{b^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}} = \sqrt[n]{b^m}$$

Ad **(R3)**: Neste caso, fazemos:

$$x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Temos:

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n \overset{\substack{\textbf{(Z4)}\\ \uparrow}}{=} \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} \overset{\substack{\textbf{(R4)}\\ \uparrow}}{=} \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} \overset{\substack{(1)\\ \uparrow}}{=} \frac{a}{b},$$

de modo que:

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

ou seja,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Ad **(R5)**: Fazemos $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{b}}$, de modo que:

$$x^p = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{b}})^p \overset{\overset{(1)}{\uparrow}}{=} \left(\sqrt[n]{b}\right)$$

Assim,

$$(x^p)^n = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \overset{\overset{(1)}{\uparrow}}{=} b$$

$$\therefore x^{p \cdot n} = b$$

$$x = \sqrt[p \cdot n]{b}.$$

□

1.4 Potência com Expoente Racional

Definição 9. *Sejam $b \in \mathbb{R}, b > 0$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Tem-se:*

$$b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$$

No caso em que $b = 0$ e $p/q > 0$, convencionamos que:

$$0^{\frac{p}{q}} = 0.$$

Para potências de expoentes racionais, temos as seguintes propriedades:

Proposição 10. *Sejam $b \in \mathbb{R}, b > 0$, $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Tem-se:*

(Q1) $b^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{r}{s}} = b^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

(Q2) $\dfrac{b^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{r}{s}}} = b^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

(Q3) $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

(Q4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$

(Q5) $(b^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = b^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$

Demonstração. Ad **(Q1)**:

$$b^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{b^p} \cdot \sqrt[s]{b^r} \overset{\substack{\textbf{(R1)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q\cdot s]{a^{p\cdot s}} \cdot \sqrt[q\cdot s]{a^{r\cdot q}} \overset{\substack{\textbf{(R2)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q\cdot s]{b^{p\cdot s} \cdot b^{r\cdot q}} \overset{\substack{\textbf{(P1)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q\cdot s]{b^{p\cdot s+r\cdot q}} = b^{\frac{p\cdot s+r\cdot q}{q\cdot s}} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} b^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

Ad **(Q2)**:

$$\frac{b^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[q]{b^p}}{\sqrt[s]{b^r}} \overset{\substack{\textbf{(R1)}\\ \uparrow}}{=} \frac{\sqrt[s\cdot q]{b^{p\cdot s}}}{\sqrt[q\cdot s]{b^{r\cdot q}}} \overset{\substack{\textbf{(R3)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[s\cdot q]{\frac{b^{p\cdot s}}{b^{r\cdot q}}} \overset{\substack{\textbf{(Z2)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[s\cdot q]{b^{p\cdot s-r\cdot q}} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} b^{\frac{p\cdot s-r\cdot q}{s\cdot q}} = b^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

Ad **(Q3)**:

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q]{(a\cdot b)^p} \overset{\substack{\textbf{(P3)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} \overset{\substack{\textbf{(R2)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

Ad **(Q4)**:

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} \overset{\substack{\textbf{(R1)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} \overset{\substack{\textbf{(Z4)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}}$$

Ad **(Q5)**:

$$\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[s]{\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^r} \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[s]{(\sqrt[q]{b^p})^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{b^{p\cdot r}}} \overset{\substack{\textbf{(R4)}\\ \uparrow}}{=} \sqrt[q\cdot s]{b^{p\cdot r}} \overset{\substack{\textbf{(R5)}\\ \uparrow}}{=} b^{\frac{p\cdot r}{q\cdot s}} = b^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}.$$

$\square$

1.5 Potências com Expoentes Irracionais

Vamos, agora, definir o que podemos entender por uma potência com expoente irracional.

Dados um número real $b > 0$ e um número irracional α, podemos construir, com base nas potências de expoentes racionais, um único número real positivo b^α que é a potência de base b e expoente irracional α.

Seja, por exemplo, a potência $3^{\sqrt{2}}$. Sabendo quais são os valores aproximados por falta e por excesso de $\sqrt{2}$, obtemos em correspondência os valores aproximados por falta ou excesso de $3^{\sqrt{2}}$ (potências de base 3 e expoentes racionais, conforme já definidas).

A_1	A_2	B_1	B_2
1	2	3^1	3^2
1.4	1.5	$3^{1.4}$	$3^{1.5}$
1.41	1.42	$3^{1.41}$	$3^{1.42}$
1.414	1.415	$3^{1.414}$	$3^{1.415}$
1.4142	1.4143	$3^{1.4142}$	$3^{1.4143}$

Definição 11. *Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos os conjuntos:*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \quad e \quad A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

Observe que:

- *todo número de A_1 é menor do que todo número de A_2;*
- *Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem números racionais r, s tais que $r < \alpha < s$ e $|s - r| < \varepsilon$.*

Em correspondência com os conjuntos A_1 e A_2, temos os conjuntos:

$$B_1 = \{b^r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \quad e \quad B_2 = \{b^s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

Se $b > 1$, demonstra-se que:

- *todo número de B_1 é menor do que todo número de B_2;*
- *Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem números $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tais que $|b^s - b^r| < \varepsilon$.*
  Nessas condições, dizemos que b^r e b^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de b^α, e que os conjuntos B_1 e B_2 são as classes que definem b^α.

Provaremos posteriormente neste curso que, para quaisquer $a, b \in]0,1[\cup]1,\infty[$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(b^x \cdot b^y = b^{x+y})$;

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\left(\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}\right)$;

(iii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x)$;

(iv) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\left(\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x\right)$;

(v) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\left((b^x)^y = b^{x \cdot y}\right)$;

2 Comportamento das Funções Exponenciais quanto à Ordem

A mais simples de todas as funções exponenciais pode ser expressa como segue:

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{E}_b: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \mapsto & b^x \end{array}$$

onde $b \in]0,1[\cup]1,\infty[$, por motivos já expostos. Vamos denominar funções desta forma por "funções exponenciais *elementares*".

Nesta seção estudaremos o comportamento das funções exponenciais elementares no que diz respeito à preservação ou inversão da ordem.

> **Lema 12.** *Sejam $a \in \mathbb{R}, b > 1$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tem-se:*
>
> $$b^n > 1 \iff n > 0$$

Demonstração. Primeiramente provaremos o resultado para $n \in \mathbb{N}$. Para provar que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(b^n > 1)$$

usaremos o Princípio da Indução Finita. Vamos recordá-lo:

(1) Primeiro, devemos provar que a afirmação $b^n > 1$ é verdadeira para $n = 1$ ("o primeiro dominó cai!");

Mas isto segue facilmente de uma das hipóteses, afinal $b > 1$. Assim,

$$b^1 = b > 1.$$

(2) Em seguida, supomos que o resultado seja válido para certo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que valha:

$$b^n > 1$$

Com fulcro nesta hipótese, concluiremos que $b^{n+1} > 1$ ("sempre que um dominó n cair, ele derrubará o dominó seguinte, $n+1$").

De fato, multiplicando os dois membros da desigualdade:

$$b^n > 1$$

por b, sendo $b > 0$, obtemos:

$$b^{n+1} = b \cdot b^n > b$$

e como $b > 1$, temos:

$$b^{n+1} > bb > 11$$

Segue do Princípio de Indução Finita que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(b^n > 1).$$

Mostremos, agora, que se $n < 0$, então $b^n < 1$, ou seja, que:

$$n < 0 \Rightarrow b^n > 1$$

Como $n < 0$, $-n > 0$, de modo que $-n \in \mathbb{N}$. Pelo que provamos para números naturais, segue que:

$$b^{-n} > 1.$$

Multiplicando os dois membros da desigualdade acima por b^n, obtemos:

$$1 = b^{-n} \cdot b^n > b^n$$

Desta forma, para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tem-se $b^n > 1$ se, e somente se $n > 0$. $\square$

Lema 13. *Sejam $b \in \mathbb{R}, b > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$. Tem-se:*

$$b^r > 1 \iff r > 0$$

Demonstração. Primeiramente provaremos que $r > 0 \Rightarrow b^r > 1$.

Dado $r \in \mathbb{Q}$, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, tais que $r = \frac{p}{q}$. Assim,

$$b^r = b^{\frac{p}{q}}.$$

Pelo **Lema 53**, se $b = \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^q > 1$ e $q > 0$, então $b^{\frac{1}{q}} > 1$. Ainda pelo mesmo lema, se $b^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$, então $\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$, ou seja,

$$\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^p = b^{\frac{p}{q}} = b^r > 1,$$

e a primeira implicação fica provada.

Mostremos, agora, que $b^r > 1 \Rightarrow r > 0$. Nossa hipótese, agora, é que $b^r > 1$.

Seja $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Faremos esta prova dividindo-a em dois casos, quais sejam, o caso em que $q > 0$ e o caso em que $q < 0$.

Temos:

$$b^r = b^{\frac{p}{q}} = \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Supondo $q > 0$ e considerando que na primeira parte desta demonstração provamos que $b^{\frac{1}{q}} > 1$, temos pelo **Lema 53**:

$$b^{\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^p b^r > 11\textbf{Lema 53}p > 0$$

Assim, $q > 0$ e $p > 0$ implica $r = \frac{p}{q} > 0$.

Supondo, agora, $q < 0$, temos $-q > 0$, e pelo **Lema 53**, temos:

$$b^{-\frac{1}{q}} > 1 \;\text{ e }\; \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(b^{-\frac{1}{q}}\right)^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0$$

Desta forma, $q < 0$ e $p < 0$ implicam $r = \frac{p}{q} > 0$.

O resultado fica, portanto, estabelecido. □

Lema 14. *Sejam $b \in \mathbb{R}, b > 1$ e $r, s \in \mathbb{Q}$. Temos:*

$$b^s > b^r \iff s > r$$

Demonstração. Temos:

$$b^s > b^r \iff b^s \cdot b^{-r} > b^r \cdot b^{-r} \iff b^{s-r} > 1\textbf{Lema 13}s - r > 0 \iff s > r$$

□

Lema 15. *Sejam $b \in \mathbb{R}, b > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tem-se:*

$$b^\alpha > 1 \iff \alpha > 0$$

Demonstração. Sejam:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \;\text{ e }\; A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

os dois conjuntos que definem o número irracional α, e considere os seguintes conjuntos que definem o número b^α:

$$B_1 = \{b^r \mid r \in A_1\} \;\text{ e }\; B_2 = \{b^s \mid s \in A_2\}$$

Mostremos, primeiramente, que:

$$\alpha > 0 \Rightarrow b^\alpha > 1$$

Pela definição de α como número irracional e positivo, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tais que $0 < r < \alpha < s$.

Pelo **Lema 13**, uma vez que $b > 1, r > 0$ e $s > 0$, temos $b^r > 1$ e $b^s > 1$.

pelo **Lema 14**, como $b > 1$ e $r < s$, temos $1 < b^r < b^s$ e, pela definição de potência com expoente irracional, temos:

$$1 < b^r < b^\alpha < b^s$$

isto é:

$$b^\alpha > 1.$$

Mostremos, agora, que:

$$b^\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0$$

Por contraposição, vamos supor que $\alpha < 0$, de modo que $-\alpha > 0$. Pela primeira parte da demonstração deste teorema, tem-se:

$$(b > 1)\&(-\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\&(-\alpha > 0) \Rightarrow b^{-\alpha} > 1$$

Multiplicando os dois membros da desigualdade do consequente da implicação acima por $b^\alpha > 0$, obtemos:

$$b^{-\alpha} \cdot b^\alpha > b^\alpha$$

isto é,

$$1 > b^\alpha,$$

que é a negação da hipótese. Portanto, segue o resultado.

□

Teorema 16. *Sejam $b \in \mathbb{R}, b > 1$, $x \in \mathbb{R}$. Tem-se:*

$$b^x > 1 \iff b > 0$$

Demonstração. Temos:

$$x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{Q}\textbf{Lema 13}b^x > 1 \iff x > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\textbf{Lema 15}b^x > 1 \iff x > 0 \end{cases}$$

□

Teorema 17. *Sejam $b \in \mathbb{R}, b > 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se:*

$$b^{x_2} > b^{x_1} \iff x_2 > x_1$$

Demonstração.

$$b^{x_2} > b^{x_1} \iff \frac{b^{x_2}}{b^{x_1}} > 1 \iff b^{x_2 - x_1} > 1 \textbf{Teorema 16} x_2 - x_1 > 0 \iff x_2 > x_1$$

□

Teorema 18. *Sejam $b \in \mathbb{R}, 0 < b < 1$ e $x \in \mathbb{R}$. Tem-se:*

$$b^x > 1 \iff x < 0.$$

Demonstração. Se $0 < b < 1$, então $1 < \dfrac{1}{b}$. Deste modo, pelo **Teorema 16**, segue que:

$$b^x = (b^{-1})^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-x} > 1 \iff -x > 0 \iff x < 0$$

□

Teorema 19. *Sejam $b \in \mathbb{R}, 0 < b < 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se:*

$$b^{x_1} > b^{x_2} \iff x_1 < x_2$$

Demonstração.

$$b^{x_1} > b^{x_2} \iff \frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} > 1 \iff b^{x_1 - x_2} > 1 \textbf{Teorema 18} x_1 - x_2 < 0 \iff x_1 < x_2$$

□

Sintetizamos os resultados demonstrados acima no seguinte:

Teorema 20. *Seja $b \in \mathbb{R}$. Tem-se:*

$$(b > 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow b^x < b^y) \tag{2}$$

*ou seja, se $b > 1$, a função exponencial elementar de base b é **estritamente crescente**.*

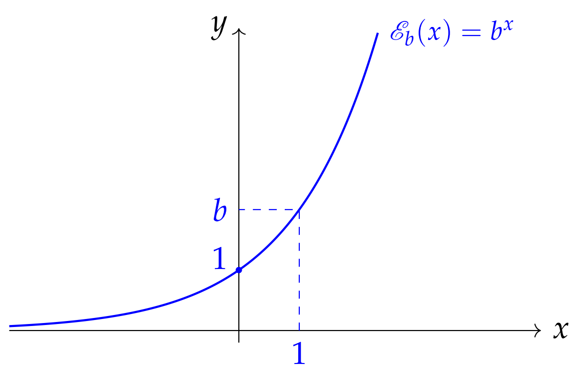
$$(0 < b < 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow b^y < b^x) \tag{3}$$

*ou seja, se $0 < b < 1$, a função exponencial elementar de base b é **estritamente decrescente**.*

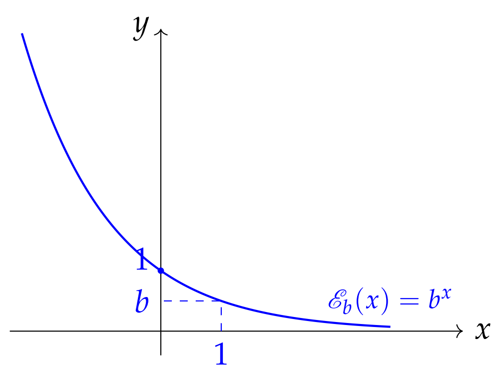
Note que:

- O gráfico está totalmente acima do eixo dos xx, pois $(\forall x \in \mathbb{R})(b^x > 0)$;
- O gráfico intercepta o eixo dos yy na altura (ordenada) 1;

No caso em que $b > 1$, o gráfico da função tem o seguinte aspecto:



enquanto que no caso em que $0 < b < 1$, o gráfico da função exponencial tem o seguinte aspecto:



De acordo com o fenômeno em apreço, pode ser necessário lançarmos mão de certas variações das funções exponenciais. Vejamos algumas delas.

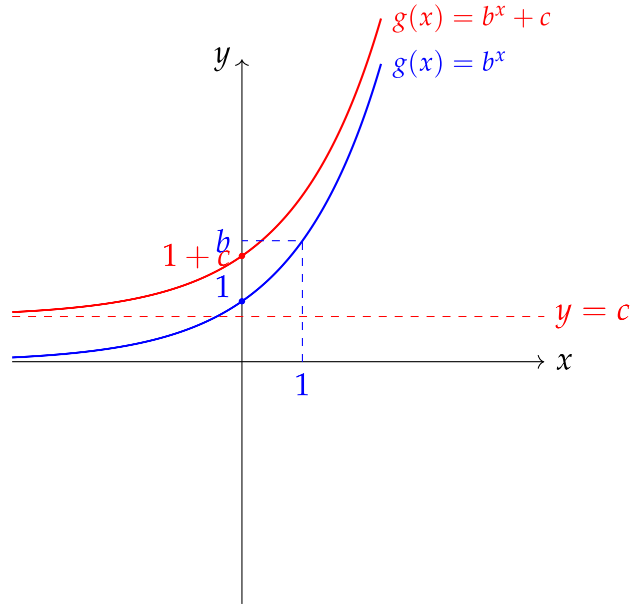
Uma função exponencial geral tem o seguinte aspecto:

$$f(x) = a \cdot b^x + c,$$

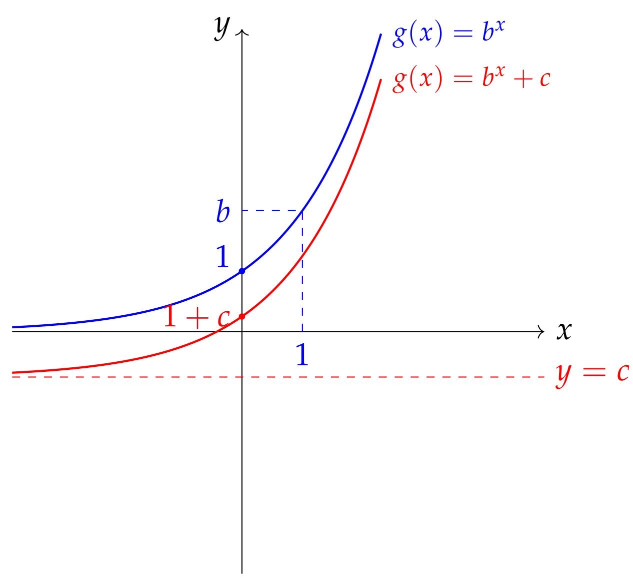
onde $b \in]0,1[\cup]1,\infty[$ e $a, c \in \mathbb{R}$.

Vejamos os efeitos de cada um desses parâmetros sobre o gráfico da função exponencial $g(x) = b^x$ com $b > 1$.

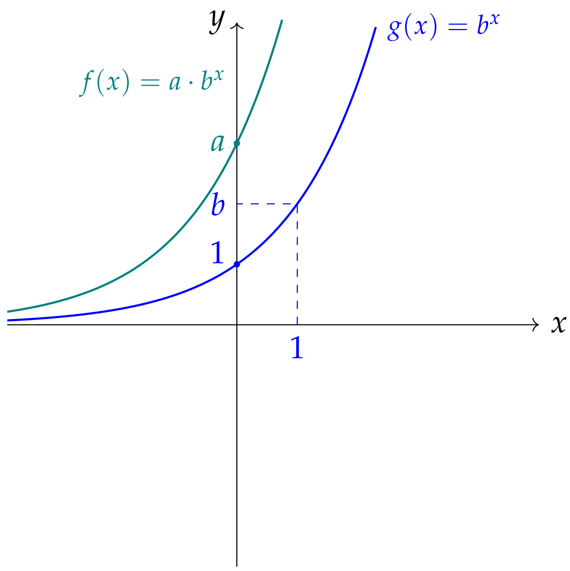
Se $c > 0$, o gráfico da função $f(x) = b^x + c$ será deslocado em c unidades para cima, como segue:



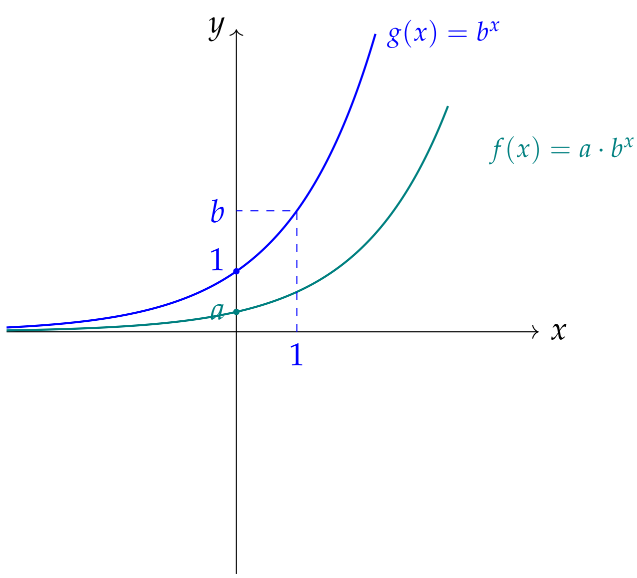
Se $c < 0$, o gráfico da função $f(x) = b^x + c$ será deslocado em c unidades para baixo, como segue:



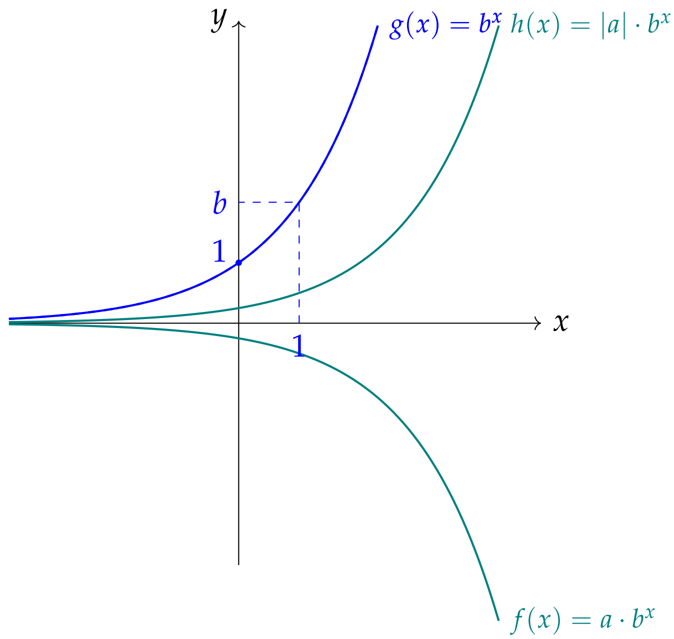
Agora, vejamos o que ocorre com o gráfico da função $f(x) = a \cdot b^x$, onde $a > 1$:



No caso em que $0 < a < 1$, temos:



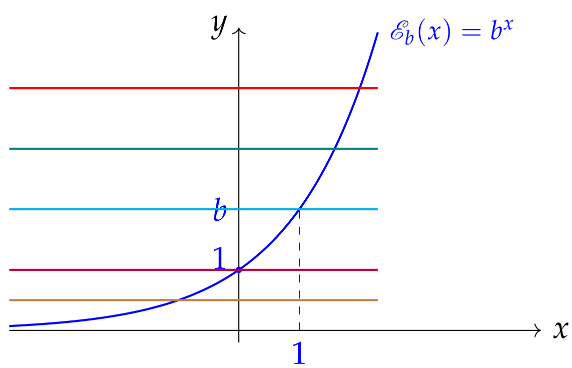
Se $a < 0$, o gráfico de $f(x) = a \cdot b^x$ é obtido pela reflexão, pelo eixo Ox, do gráfico de $h(x) = |a| \cdot b^x$:



Os efeitos dos parâmetros no caso em que $0 < b < 1$ é totalmente análogo aos efeitos mostrados acima, de modo que os omitiremos.

Resumimos, abaixo, algumas das principais propriedades das potências, que são frequentemente usadas no estudo das funções exponenciais.

Como sugere o teste das retas horizontais, a função exponencial elementar é bijetora:



3 O número e

Uma (importantíssima) base para sistemas de logaritmos e para funções exponenciais é o número e.

Suponha que seu banco pague 3% de juro, ao ano, sobre depósitos. Se estes juros são adicionados, ao fim de cada ano, por um período de três anos, o valor total de seu crédito, supondo-se um capital inicial de R$ 1 000,00, será calculado pela fórmula:

$$(1+0.03)^3$$

para cada real aplicado. Se os juros são *compostos* semestralmente, depois de um período de três anos, o total do principal com juros será:

$$\left(1+\frac{0.03}{2}\right)^{2\times 3}$$

Imagine que você teve a incrível sorte de encontrar um banco filantrópico que decida pagar 100% de juro por ano. Então o total de seu crédito ao fim de um ano será:

$$(1+1)^1,$$

ou seja, R$ 2000,00. Se os juros são compostos semestralmente, o total será baseado na fórmula:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,$$

ou R$ 2250,00. No caso de os juros serem compostos trimestralmente, o total seria o capital inicial multiplicado por:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,$$

ou R$ 2 370, 37. Parece claro que, quanto mais rapidamente os juros forem compostos, mais dinheiro você terá no banco. Com um pouco mais de imaginação, você pode conceber a possibilidade do banco filantrópico decidir compor juros *continuamente*, ou seja, *a cada instante do ano*. Quanto você terá, então, no fim do ano? Sem dúvida, uma fortuna, não? Infelizmente, o total do seu crédito ao final deste ano milagroso não chegaria a R$ 2 720,00. Conforme veremos posteriormente, à medida que n se torna muito grande, os valores sucessivos de:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

se aproximam mais e mais de um certo número, que denotamos por e, cujo valor aproximado é 2.71828. Este número é o *maior* fator que se pode obter em um crescimento composto de 100% a cada instante de tempo. O número e, deste modo, funciona como um "limite de velocidade", que nos diz o quão rapidamente uma quantidade pode crescer em um processo *contínuo*, ao final do período.

Pode-se demonstrar, com as ferramentas que desenvolveremos neste curso, que o número e é o limite da série:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots$$

ou seja, é melhor aproximado quanto mais termos forem acrescidos.

Desta forma, seu valor poderá ser tão aproximado quanto se queira, adicionando-se outros termos da série. Até a décima casa decimal, $e = 2.718281285$. Uma olhada na tabela abaixo nos sugere como esta série se comporta à medida em que adicionamos mais e mais termos:

$1 + \frac{1}{1!}$	2
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$	2.5
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$	$2.666\cdots$
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$	$2.708334\cdots$
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$	$2.71666\cdots$
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$	$2.7180555\cdots$
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$	$2.7182539\cdots$

Depois de alguns termos, e aparece como:

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\cdots$$

Mas o que nos garante que, em certo momento, os dígitos da parte decimal do número e não se repetirão, ou mesmo que a partir de certa posição decimal não poderemos encontrar uma sequência infinita de zeros?

Vamos assumir, por um momento, que sabemos que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots$$

Temos a seguinte:

Proposição 21. *O número e é irracional, ou seja, não pode ser expresso como quociente de dois números inteiros.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existam $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $e = p/q$, com m.d.c. $(p, q) = 1$. Como:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

segue que:

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \tag{4}$$

Vamos fazer uma estimativa do segundo membro de (4):

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \quad = \quad \frac{1}{q!} \cdot \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)} + \cdots\right) \quad < \quad \frac{1}{q!} \cdot \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) \tag{5}$$

A expressão:

$$\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^n} + \cdots\right)$$

é uma série geométrica, cuja soma é:

$$\frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{\frac{q+1}{q+1}}{(q+1)\cdot\left(1 - \frac{1}{q+1}\right)} = \frac{1}{q}.$$

Obtemos, assim, a seguinte estimativa:

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q} \tag{6}$$

Usando a estimativa (6) em (4), temos:

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

e daí:

$$0 < q! \cdot \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q} \tag{7}$$

Note, agora, que o termo do meio de (7) é inteiro, pois $q!$ cancela todos os denominadores das frações ali presentes. Como $1/q < 1$, chegamos a um absurdo – a saber, encontramos um número inteiro estritamente positivo e menor do que um. O absurdo provém de supormos que e é racional. □

Assim, conclui-se que, por ser irracional, e não admite representação decimal finita ou periódica.

A função exponencial de base e, $f(x) = e^x$ é o instrumento usado, de uma ou de outra forma, para descrever o comportamento de tudo o que *cresce*: é a única função de x com uma variação em relação a x exatamente igual ao valor da própria função calculada em x – o que é particularmente útil para descrever processos tais como o crescimento de uma população, o decaimento de uma substância radioativa, a disseminação de uma doença contagiosa, a taxa de resfriamento de um bolo retirado do forno em termos de sua temperatura em cada instante, ou mesmo – conforme já vimos – o aumento de capital aplicado a juros compostos.

O que é peculiar a todos os processos descritos acima é que *a razão de crescimento é proporcional ao estado de crescimento*. Quanto maior for uma grandeza, mais rapidamente ela crescerá. No exemplos acima, quanto maior for uma população, mais rapidamente ela poderá se reproduzir – por contar com mais agentes capazes de se reproduzirem; quanto menor for a quantia de uma substância radioativa, mais devagar ela decairá; quanto mais pessoas forem infectadas pelo novo coronavírus, mais rapidamente a doença se espalhará; quanto maior for a diferença entre a temperatura do bolo e a temperatura ambiente, mais rápido ele esfriará.

4 Funções Logarítmicas

Em que estágio estaria hoje o conhecimento astronômico se o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) tivesse tido à sua disposição uma calculadora eletrônica?

Esta questão provoca algumas reflexões interessantes. Por exemplo, o tempo dispendido por Kepler em cálculos desgastantes como 3.25694×1.78090 ou $3.25694 \div 1.78090$, tão frequentes em estudos astronômicos, poderia ter sido empregado em pesquisas, e talvez tivéssemos hoje uma "quarta lei de Kepler".

Até o século XVII, cálculos envolvendo multiplicações ou divisões eram bastante incômodos, não só na Astronomia, mas em toda ciência que usasse medidas. O escocês John Napier (1550-1617), também conhecido como Neper, preocupou-se seriamente em simplificar esses cálculos e, após vinte anos de pesquisa publicou, em 1614, o trabalho intitulado "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio"[1], apresentando ao mundo a **teoria dos logaritmos**.

O princípio básico dos logaritmos é **transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração**, uma vez que adicionar ou subtrair números é consideravelmente mais rápido do que multiplicá-los ou dividi-los.

Para compreender melhor a concepção de Napier dos logaritmos, usaremos uma ideia bem conhecida e engenhosa: vamos comparar dois pontos em movimento, um dos quais gera

[1] "Descrição Canônica dos Maravilhosos Logaritmos"

uma progressão aritmética e o outro, uma progressão geométrica.

Considere as seguintes progressões:

Aritmética	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Geométrica	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

As progressões acima guardam, entre si, a seguinte relação interessante: se os termos da progressão aritmética são considerados como expoentes (potências) de 2, os termos correspondentes na progressão geométrica representam o resultado da exponenciação. Assim, o número 64, por exemplo, se encontra abaixo do número 6 na tabela acima, o que pode ser interpretado como o fato de que $2^6 = 64$, e assim por diante.

Observe que, para determinar o *produto* de dois elementos da segunda linha, basta somarmos os valores correspondentes da primeira linha e, em seguida, verificar a qual valor esta soma corresponde na segunda linha.

Por exemplo, se desejamos efetuar o produto 32×64, observamos a quais números da primeira linha esses valores correspondem, o que se vê marcado abaixo, em vermelho:

Aritmética	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Geométrica	1	1	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Em seguida, somamos 5 e 6, obtendo $5 + 6 = 11$ e obtemos, como resultado, o valor da tabela abaixo de 11, marcado abaixo em azul:

Aritmética	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Geométrica	1	1	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Chamando 2 de *base*, cada termo da progressão aritmética é o **logaritmo** do termo correspondente na progressão *geométrica*.

A ideia de Neper é similar àquela exposta acima, onde a diferença é que representam-se os números positivos como potências de outros números positivos, como 10 e e, que veremos posteriormente. Por exemplo, cada coluna da tabela abaixo apresenta um número e a sua respectiva representação enquanto potência de 10.

Número	1.78090	1.82881	3.25694	5.80029
Potência de Base 10	$10^{0.25064}$	$10^{0.26217}$	$10^{0.51281}$	$10^{0.76345}$

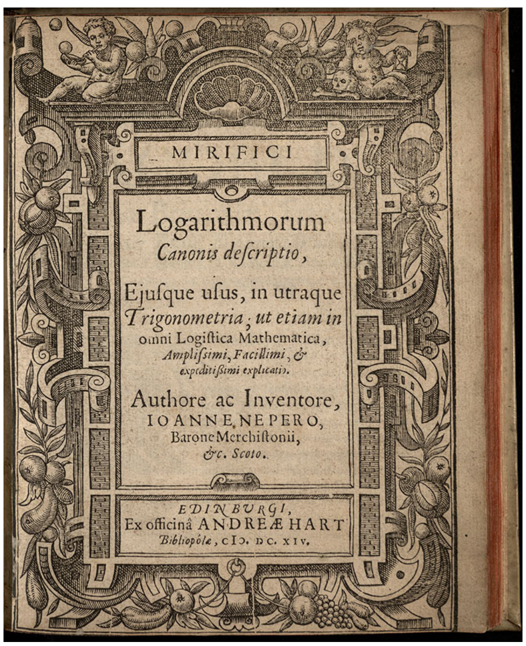
Com a tabela acima podemos calcular:

$$3.25694 \times 1.78090 \;=\; 10^{0.51281} \times 10^{0.25064} \;=\; 10^{0.51281+0.25064} \;=\; 10^{0.76345} \;=\; 5.80029$$

Observe que o produto foi calculado pela soma dos expoentes das potências de base 10.

$$3.25694 \div 1.78090 \;=\; 10^{0.51281} \div 10^{0.25064} \;=\; 10^{0.51281-0.25064} \;=\; 10^{0.26217} \;=\; 1.82881$$

Observe que o quociente acima foi calculado pela subtração dos expoentes das potências de base 10.



MIRIFICI

Logarithmorum

Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque

Trigonometria; ut etiam in

omni Logiſtica Mathematica,

Amplißimi, Facillimi, &

expeditißimi explicatio.

Authore ac Inventore,

IOANNE NEPERO,

Barone Merchiſtonii,

&c. Scoto.

EDINBVRGI,

Ex officinâ ANDREÆ HART

Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

MIRIFICI

Logarithmorum canonis deſcri-

ptio, eiuſque uſus in utrâque Trigonome-

tria, ut etiam in omni Logiſtica mathematica,

amplißimi, facillimi, & expe-

ditißimi explicatio.

LIBER I.

CAPVT. I.

De Definitionibus.

1.Def. *Linea æqualiter creſcere dicitur, quum punctus eam deſcribens, æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.*

Sit punctus A, à quo ducenda ſit linea fluxu alterius puncti, qui ſit B, fluat ergo primo momento B ab A in C.

B Secun-

Grandes tábuas de logaritmos foram logo construídas na base 10 e na base natural e (ou "neperiana"). Estas tábuas foram disseminadas tão amplamente que os matemáticos de toda a Europa puderam usar logaritmos muito pouco tempo após sua invenção. O próprio Johannes Kepler foi um dos que não só viu as tábuas de Neper, mas também ajudou a desenvolvê-las.

O valor das funções logarítmicas, no entanto, vai muito além de sua utilidade aritmética: diversos fenômenos que lidam com um espectro muito amplo de grandezas são apresentados em escalas ditas "logarítmicas". Um exemplo do uso das escalas logarítmicas é a Escala Richter, que mede a intensidade de terremotos e o movimento da crosta terrestre. Outro exemplo é a escala de pH (cologaritmo do teor, em mol/L, de íons de Hidrogênio) de uma solução. Em ambas as escalas, a distância entre duas marcas consecutivas equivale à mesma proporção. Assim, um terremoto de instensidade 3 libera o décuplo de energia que um terremoto de nível 2, por exemplo, e uma solução de pH 5 contém o décuplo da concentração de íons de Hidrogênio que uma solução de pH 6, e assim por diante.

5 Logaritmos

Definição 22. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ com $b \neq 1$. Chamamos de* ***logaritmo de*** *a* ***na base*** *b o expoente que se deve dar à base b, de modo que a potência seja igual a b.*
Em símbolos:

$$\log_b(a) = c \iff b^c = a.$$

Na expressão $\log_b(a) = c$, dizemos que b é a base do logaritmo, a é o logaritmando e c é o logaritmo.

Como exemplos, temos:

(1) $\log_2(8) = 3$, pois $2^3 = 8$;

(2) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$, pois $(3)^{-2} = \frac{1}{9}$

Dado qualquer par de números (b, a) com $a, b > 0$, $b \neq 1$, existirá um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $\log_b(a) = c$, ou seja, tal que $b^c = a$.

Alguns logaritmos podem ser computados rapidamente. Por exemplo, é imediato deduzir que $\log_2(16) = 4$ (pois $2^4 = 16$), que $\log_5(125) = 3$ (pois $5^3 = 125$) ou que $\log_7(49) = 2$ (pois $49 = 7^2$).

Alguns outros logaritmos requerem um pouco mais de cálculo. Por exemplo, para calcular $\log_{16} 1048576$, podemos dividir 1048576 sucessivas vezes por 16:

$$\begin{array}{r|l} 1048576 & 16 \\ 65536 & 16 \\ 4096 & 16 \\ 256 & 16 \\ 16 & 16 \\ 1 & \end{array}$$

donde concluímos que $\log_{16}(1048576) = 5$, pois $16^5 = 1048576$.

A maioria dos logaritmos, no entanto, pode ser apenas aproximada. De fato, note que $\log_{10}(2)$ é um número irracional, de modo que é impossível explicitar sua representação decimal.

Fato: $\log_{10}(2)$ é um número irracional.

Demonstração. Mostraremos que nenhum número racional, ou seja, nenhum número da forma m/n, onde m, n são inteiros e positivos, pode satisfazer a igualdade $\log_{10}(2) = \dfrac{m}{n}$. De fato, se existisse um tal número $\frac{m}{n}$, teríamos:

$$2 = 10^{\frac{m}{n}}$$

Elevando os dois membros da igualdade acima a n, obtemos:

$$2^n = 10^m = 2^m \cdot 5^m$$

Esta é uma igualdade de inteiros positivos, de modo que podemos aplicar o **Teorema Fundamental da Aritmética**, que garante que esta igualdade *não* pode acontecer, uma vez que para qualquer valor de n, 2^n é um inteiro não divisível por 5, enquanto $2^m \cdot 5^m$ é. Segue, portanto, que $\log_{10}(2)$ é um número irracional. $\square$

5.1 Consequências da Definição

Decorrem imediatamente da definição de logaritmo as seguintes propriedades:

(L1) O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero, ou seja, para qualquer $b > 0, b \neq 1$ tem-se:

$$\log_b(1) = 0.$$

(L2) O logaritmo da base b na base b, onde $b > 0, b \neq 1$ é sempre igual a 1:

$$\log_b(b) = 1.$$

(L3) A potência de base b e expoente $\log_b(a)$ é igual a b:

$$b^{\log_b(a)} = a.$$

Uma propriedade que requer uma pequena demonstração é apresentada abaixo, e repercutirá na injetividade da "função logarítmica", a ser definida:

(L4) Dois logaritmos na mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais, ou seja:

$$\log_b(x) = \log_b(y) \iff x = y$$

Demonstração. Pela definição de logaritmo, temos $\log_b(x) = \log_b(y)$ se, e somente se, $x = b^{\log_b(y)}$. Pela propriedade **(L3)**, no entanto, tem-se $b^{\log_b(y)} = y$, de modo que temos $x = b^{\log_b(y)} = y$. □

5.2 Propriedades dos Logaritmos

Vejamos, agora, as propriedades que tornam vantajoso o emprego dos logaritmos nos cálculos.

Teorema 23 (Logaritmo do Produto). *Dada qualquer base $b > 0, b \neq 1$, o logaritmo do produto de dois fatores positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores, ou seja:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y))$$

Demonstração. Sejam $\alpha = \log_b(x)$, $\beta = \log_b(y)$ e $\gamma = \log_b(x \cdot y)$. Vamos demonstrar que $\gamma = \alpha + \beta$.

De fato, temos:

$$\alpha = \log_b(x) \iff b^\alpha = x$$

$$\beta = \log_b(y) \iff b^\beta = y$$

$$\gamma = \log_b(x \cdot y) \iff b^\gamma = xy$$

Assim,

$$b^\gamma = x \cdot y = b^\alpha \cdot b^\beta \overset{\overset{\text{(i)}}{\uparrow}}{=} b^{\alpha+\beta}$$

$$b^\gamma = b^{\alpha+\beta} \overset{\textbf{(L4)}}{\Rightarrow} \gamma = \alpha + \beta.$$

□

A propriedade acima pode ser estendida para o produto de n fatores reais positivos:

Proposição 24. *Sejam $b > 0, b \neq 1$, $b_1, b_2, \cdots, b_n > 0$. Tem-se:*

$$\log_b(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot b_n) = \\ = \log_b(b_1) + \log_b(b_2) + \log_b(b_3) + \cdots + \log_b(b_{n-2}) + \log_b(b_{n-1}) + \log_b(b_n)$$

Demonstração. O caso em que $n = 2$ já foi demonstrado no **Teorema 23**. Suponhamos, por hipótese de indução, que para $n \in \mathbb{N}$ tenhamos:

$$\log_b(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot b_n) \overset{\text{H.I.}}{\overset{\uparrow}{=}} \\ = \log_b(b_1) + \log_b(b_2) + \log_b(b_3) + \cdots + \log_b(b_{n-2}) + \log_b(b_{n-1}) + \log_b(b_n)$$

Mostremos que a afirmação é válida para $n+1$. Sejam $b_1, b_2, \cdots, b_n, b_{n+1} > 0$. Temos:

$$\log_b(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot b_n \cdot b_{n+1}) = \log_b((b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot b_n) \cdot b_{n+1}) = \\ = \log_b(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot b_n) + \log_b(b_{n+1}) \overset{\text{H.I.}}{\overset{\uparrow}{=}} \\ = \log_b(b_1) + \log_b(b_2) + \log_b(b_3) + \cdots + \log_b(b_{n-2}) + \log_b(b_{n-1}) + \log_b(b_n) + \log_b(b_{n+1}).$$

$\square$

Observe que , se $x, y > 0$, então $x \cdot y > 0$, de modo que para qualquer $b > 0, b \neq 1$ podemos escrever:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y).$$

No entanto, se soubermos apenas que $x \cdot y > 0$, devemos escrever:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b|x| + \log_b|y|,$$

uma vez que $x \cdot y > 0$ pode ocorrer quando $x, y < 0$ – situação na qual não definimos $\log_b(x)$ nem $\log_b(y)$.

Teorema 25 (Logaritmo do Quociente). *Dada qualquer base $b > 0, b \neq 1$, o logaritmo do quociente de dois fatores positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor, ou seja:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y))$$

Demonstração. Sejam $\alpha = \log_b(x)$, $\beta = \log_b(y)$ e $\gamma = \log_b(x/y)$. Vamos demonstrar que $\gamma = \alpha - \beta$.

De fato, temos:

$$\alpha = \log_b(x) \iff b^\alpha = x$$

$$\beta = \log_b(y) \iff b^\beta = y$$

$$\gamma = \log_b\left(\frac{x}{y}\right) \iff b^\gamma = \frac{x}{y}$$

Assim,

$$b^\gamma = \frac{x}{y} = \frac{b^\alpha}{b^\beta} \overset{\substack{\text{(ii)}\\ \uparrow}}{=} b^{\alpha-\beta}$$

$$b^\gamma = b^{\alpha-\beta} \overset{\textbf{(L4)}}{\Rightarrow} \gamma = \alpha - \beta.$$

$\square$

Observe que, dados quaisquer $b > 0, b \neq 1$ e $a > 0$, tem-se:

$$\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = \log_b(1) - \log_b(a) = -\log_b(a)$$

Chamamos o número $-\log_b(a)$ de **cologaritmo** de a na base b.

Teorema 26 (Logaritmo da potência). *Para qualquer base $b > 0, b \neq 1$, o logaritmo de uma potência de base positiva a e de expoente real α é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, ou seja:*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\log_b(a^\alpha) = \alpha \cdot \log_b(a))$$

Demonstração. Façamos $\log_b(a) = x$ e $\log_b(a^\alpha) = y$. Devemos mostrar que $y = \alpha \cdot x$.

De fato,

$$\log_b(a) = x \iff b^x = a$$
$$\log_b(a^\alpha) = y \iff b^y = a^\alpha$$

e portanto:

$$b^y = a^\alpha = (b^x)^\alpha \overset{\substack{\text{(v)}\\ \uparrow}}{=} b^{x \cdot \alpha}$$

$\square$

5.3 Mudança de Base

Existem muitas situações nas quais logaritmos de bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base conveniente. Vejamos como se dá esse processo.

Teorema 27 (Mudança de Base). *Se $a, b, c > 0$ e $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$, tem-se:*

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Demonstração. Sejam $x = \log_b(a), y = \log_c(a)$ e $z = \log_c(a) = z$. Como $a \neq 1$, $z = \log_c(b) \neq 0$. Devemos mostrar que $x = \dfrac{y}{z}$.

De fato,

$$x = \log_b(a) \iff b^x = a$$
$$y = \log_c(a) \iff c^y = a$$
$$z = \log_c(b) \iff c^z = b$$

Assim,

$$\begin{cases} (c^z)^x = b^x = a \\ c^y = a \end{cases}$$

$$\therefore c^y = c^{z \cdot x} \iff y = z \cdot x \iff x = \frac{y}{z}$$

$\square$

6 Funções Logarítmicas

Nesta e nas próximas seções introduziremos as funções logarítmicas, explorando algumas de suas principais propriedades.

Definição 28. *Seja $b > 0, b \neq 1$. A* ***função logarítmica de base*** *b é a função:*

$$\begin{array}{rrcl} \log_b : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_b(x) \end{array}$$

Assim, por exemplo, $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ e $h(x) = \ln(x)$ são funções logarítmicas.

Teorema 29. *Seja $b > 0, b \neq 1$. As funções:*

$$\begin{array}{rrcl} \log_b : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_b(x) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \mathscr{E}_b : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & y & \mapsto & b^y \end{array}$$

são inversas uma da outra.

Demonstração. De fato, dado qualquer $x \in \mathbb{R}_+^*$, temos:

$$(\mathscr{E}_b \circ \log_b)(x) = \mathscr{E}_b(\log_b(x)) = b^{\log_b(x)} = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

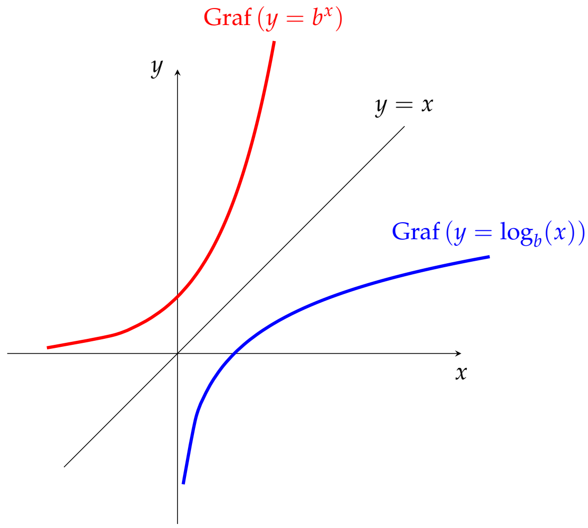
Também, dado qualquer $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$(\log_b \circ \mathscr{E}_b)(y) = \log_b(\mathscr{E}_b(y)) = \log_b(b^y) = y \cdot \log_b(b) = y \cdot 1 = y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(y)$$

□

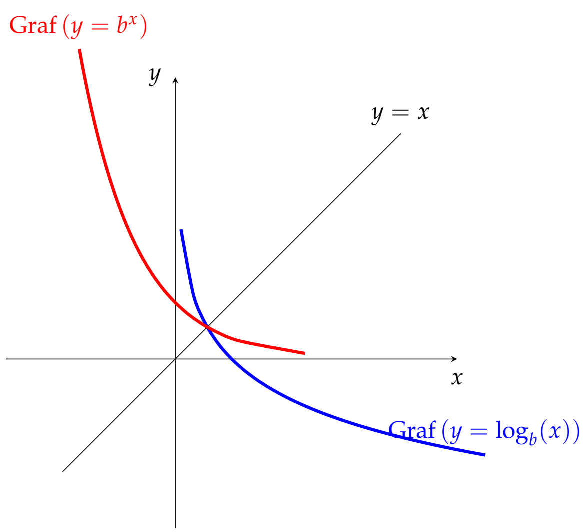
Em virtude do **Teorema 29**, podemos obter o gráfico da função logarítmica mediante uma reflexão do gráfico da função exponencial pela primeira bissetriz. Temos dois casos a considerar.

No caso em que $b > 1$, temos:

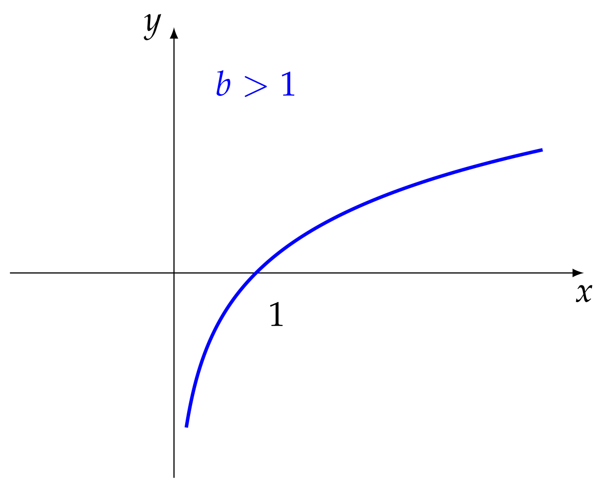


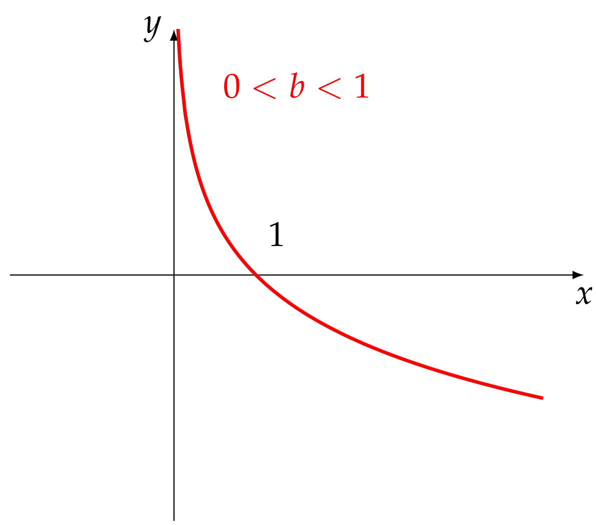
Note que, enquanto a função exponencial cresce cada vez mais rapidamente, a função logarítmica cresce cada vez mais vagarosamente.

No caso em que $0 < b < 1$, temos:



Assim, a depender de b estar no intervalo $]0, 1[$ ou no intervalo $]1, \infty[$, o gráfico da função logarítmica assume um dos seguintes aspectos:
2

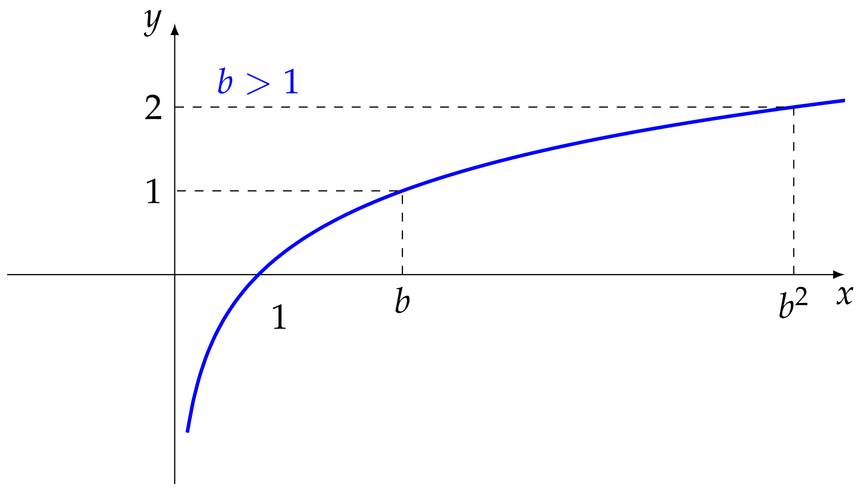




A partir de certos *pontos característicos*, podemos esboçar o gráfico da função logarítmica de base b.

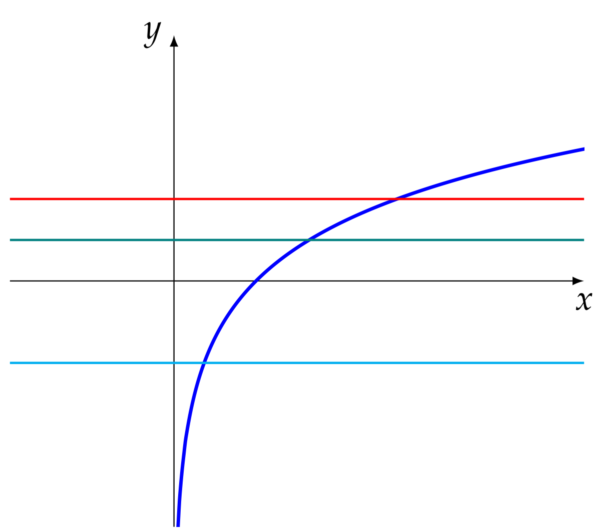
Considere o caso em que $b > 1$, ou seja, o caso em que a função logarítmica é crescente.

Os valores que podem ser calculados imediatamente são, evidentemente, os das potências inteiras de b, $\log_b(1) = 0, \log_b(b) = 1, \log_b(b^2) = 2, \cdots, \log_b(b^n) = n$. Veremos, posteriormente, que o gráfico da função logarítmica de base maior do que 1 tem o seguinte aspecto:



assumindo valores negativos em $]0,1[$ e positivos em $]1,\infty[$. No caso em que $0 < b < 1$, ou seja, o caso em que a função logarítmica é decrescente, veremos que a situação se inverte, ou seja, a função assumirá valores positivos em $]0,1[$ e negativos em $]1,\infty[$:

O teste das retas horizontais nos sugere que a função logarítmica é bijetora: qualquer reta horizontal de equação $y = k$ intercepta o gráfico da função logarítmica em, no mínimo um, e no máximo um ponto. A prova deste fato será feita mais cuidadosamente após estabelecidos alguns pré-requisitos. Em particular, a prova de que toda reta horizontal intersecta o gráfico em, no mínimo, um ponto, requer o uso de propriedades estruturais de $\mathbb{R}$ (nomeadamente, a de "ser arquimediano" e a de "satisfazer a Propriedade dos Intervalos Encaixados") que são apresentadas com mais detalhe no Material Suplementar.



Antes de prosseguirmos, recordemos as seguintes três propriedades das funções logarítmicas, independentes do valor de sua base, $b \in]0,1[\cup]1,\infty[$:

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y))$;

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y))$;

(iii) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x))$.

Observação 30. *Em se tratando de funções logarítmicas, se a base for $b = e$, denotamos $\log_e(x)$ por $\ln(x)$, e se $b = 10$ denotamos $\log_{10}(x)$ simplesmente por $\log(x)$.*

7 Descrição Axiomática de Função Logarítmica

Nesta seção mostraremos que *todas* as propriedades relevantes das funções logarítmicas derivam, na verdade, de duas características bem simples: do fato de que a função é monótona (ou seja, ou é estritamente crescente ou estritamente decrescente) e do fato de aplicar produtos em somas.

Começamos com a seguinte:

Definição 31 (função logarítmica crescente). *Seja $b > 1$. Uma função real:*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}_b : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathscr{L}_b(x) \end{array}$$

*é chamada **uma função logarítmica de base** b, ou ainda um **sistema logarítmico de base** b, quando satisfaz:*

($\mathrm{I}'_{\mathscr{L}}$) *$\mathscr{L}_b$ é estritamente crescente, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $x < y$ tem-se $\mathscr{L}_b(x) < \mathscr{L}_b(y)$;*

($\mathrm{II}_{\mathscr{L}}$) *$\mathscr{L}_b$ aplica produtos em somas, ou seja:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x \cdot y) = \mathscr{L}_b(x) + \mathscr{L}_b(y))$$

*Dado $x \in \mathbb{R}_+^*$, o número $\mathscr{L}_b(x)$ denomina-se **o logaritmo de** x **segundo** $\mathscr{L}_b$, ou simplesmente **o logaritmo de** x **na base** b.*

Naturalmente, de acordo com a definição dada acima, para qualquer $b > 1$, a função:

$$\begin{array}{rccc} \log_b : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_b(x) \end{array}$$

é uma função logarítmica crescente.

Proposição 32. *O logaritmo crescente de 1 é 0.*

Demonstração. De fato,

$$\mathscr{L}_b(1) = \mathscr{L}_b(1 \cdot 1) = \mathscr{L}_b(1) + \mathscr{L}_b(1)$$

logo,

$$\mathscr{L}_b(1) = 0.$$

□

Proposição 33. *Uma função logarítmica crescente, $\mathscr{L}_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é injetora.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $x \neq y$. Então há somente duas possibilidades:

- $x < y$, e neste caso, pela propriedade ($\mathrm{I}_{\mathscr{L}}$) tem-se $\mathscr{L}_b(x) < \mathscr{L}_b(y)$, donde $\mathscr{L}_b(x) \neq \mathscr{L}_b(y)$;
- $y < x$, e neste caso, pela propriedade ($\mathrm{I}_{\mathscr{L}}$) tem-se $\mathscr{L}_b(y) < \mathscr{L}_b(x)$, donde $\mathscr{L}_b(x) \neq \mathscr{L}_b(y)$.

Como $x \neq y \Rightarrow \mathscr{L}_b(x) \neq \mathscr{L}_b(y)$, segue que $\mathscr{L}_b$ é injetora. □

Proposição 34. $(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(y > 1 \Rightarrow \mathscr{L}_b(y) > 0)$.

Demonstração. De fato, pela propriedade ($\mathrm{I}_{\mathscr{L}}$),

$$1 < y \Rightarrow \mathscr{L}_b(1) < \mathscr{L}_b(y) \Rightarrow 0 < \mathscr{L}_b(y).$$

□

Proposição 35. $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(0 < x < 1 \Rightarrow \mathscr{L}_b(x) < 0)$.

Demonstração. De fato, pela propriedade ($\mathrm{I}_{\mathscr{L}}$),

$$x < 1 \Rightarrow \mathscr{L}_b(x) < \mathscr{L}_b(1) \Rightarrow \mathscr{L}_b(x) < 0.$$

□

Proposição 36. *Tem-se:*

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\left(\mathscr{L}_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathscr{L}_b(x)\right);$

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\left(\mathscr{L}_b\left(\frac{x}{y}\right) = \mathscr{L}_b(x) - \mathscr{L}_b(y)\right);$

Demonstração. Ad (i): Tem-se:

$$0 = \mathscr{L}_b(1) = \mathscr{L}_b\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) = \mathscr{L}_b\left(\frac{1}{x}\right) + \mathscr{L}_b(x)$$

donde:

$$\mathscr{L}_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathscr{L}_b(x).$$

Ad (ii): Tem-se:

$$\mathscr{L}_b\left(\frac{x}{y}\right) = \mathscr{L}_b\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \mathscr{L}_b(x) + \mathscr{L}_b\left(\frac{1}{y}\right) = \mathscr{L}_b(x) - \mathscr{L}_b(y).$$

□

Proposição 37. *Se $r \in \mathbb{Q}$, tem-se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x^r) = r\cdot\mathscr{L}_b(x)).$$

Demonstração. Primeiramente demonstramos a proposição para números naturais, depois para números inteiros e finalmente para números racionais quaisquer.

Caso 1: $r = n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos primeiramente que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x^n) = n\cdot\mathscr{L}_b(x)).$$

O caso $n = 1$ está claro, uma vez que $\mathscr{L}_b(x^1) = \mathscr{L}_b(x) = 1\cdot\mathscr{L}_b(x)$;

Hipótese de Indução (H.I.): Suponhamos que valha $\mathscr{L}_b(x^{n-1}) = (n-1)\cdot\mathscr{L}_b(x)$. Mostremos, agora, que $\mathscr{L}_b(x^n) = n\cdot\mathscr{L}_b(x)$.

Com efeito,

$$\mathscr{L}_b(x^n) = \mathscr{L}_b(x^{n-1}\cdot x) \overset{(\mathrm{II})_{\mathscr{L}}}{=} \mathscr{L}_b(x^{n-1}) + \mathscr{L}_b(x) \overset{\text{H.I.}}{=} (n-1)\cdot\mathscr{L}_b(x) + \mathscr{L}_b(x) = n\cdot\mathscr{L}_b(x).$$

Caso 2: $r = 0$.

$$\mathscr{L}_b(x^0) = \mathscr{L}_b(1) = 0 = 0 \cdot \mathscr{L}_b(x).$$

Caso 3: $r = n \in \mathbb{Z}^*_-$.

Vamos demonstrar o caso em que $n = -m$ para $m \in \mathbb{N}$. Tem-se:

$$\mathscr{L}_b(x^n) = \mathscr{L}_b(x^{-m}) = \mathscr{L}_b\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\mathscr{L}_b(x^m) = -m \cdot \mathscr{L}_b(x) = n \cdot \mathscr{L}_b(x).$$

Caso 4: $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$.

Observe que $(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p$, e portanto:

$$\mathscr{L}_b((x^r)^q) = q \cdot \mathscr{L}_b(x^r),$$

pelos **casos 1** e **3**. Como $(x^r)^q = x^p$, segue que:

$$q \cdot \mathscr{L}_b(x^r) = \mathscr{L}_b((x^r)^q) = \mathscr{L}_b(x^p) = p \cdot \mathscr{L}_b(x).$$

Segue, portanto, que:

$$\mathscr{L}_b(x^r) = \frac{p}{q} \cdot \mathscr{L}_b(x) = r \cdot \mathscr{L}_b(x).$$

□

Posteriormente, veremos que a **Proposição 37** implica que:

Proposição 38. *Para* qualquer $r \in \mathbb{R}$, *tem-se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*_+)(\mathscr{L}_b(x^r) = r \cdot \mathscr{L}_b(x)).$$

Encerramos esta seção apresentando o seguinte teorema, cuja demonstração depende de resultados provados no apêndice deste material.

Teorema 39. *Toda função logarítmica,* $\mathscr{L}_b : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ *é bijetora.*

Demonstração. Pela **Proposição 33** $\mathscr{L}_b$ é injetora, e pelo **Teorema 57** do **Apêndice**, $\mathscr{L}_b$ é sobrejetora. □

No que segue, apresentamos a definição da função logarítmica no caso em que $0 < b < 1$, ou seja, da função logarítmica decrescente. Você notará que diversos resultados continuam válidos, e que apenas o comportamento – e portanto, o gráfico – da função muda.

Definição 40 (função logarítmica decrescente). *Seja $0 < b < 1$. Uma função real:*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}_b : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathscr{L}_b(x) \end{array}$$

*é chamada **uma função logarítmica de base** b, ou ainda um **sistema logarítmico de base** b, quando satisfaz:*

($\mathrm{I}'_{\mathscr{L}}$) *$\mathscr{L}_b$ é estritamente decrescente, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $x < y$ tem-se $\mathscr{L}_b(y) < \mathscr{L}_b(x)$;*

($\mathrm{II}'_{\mathscr{L}}$) *$\mathscr{L}_b$ aplica produtos em somas, ou seja:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x \cdot y) = \mathscr{L}_b(x) + \mathscr{L}_b(y))$$

*Dado $x \in \mathbb{R}_+^*$, o número $\mathscr{L}_b(x)$ denomina-se **o logaritmo de** x **segundo** $\mathscr{L}_b$, ou simplesmente **o logaritmo de** x **na base** b.*

Naturalmente, de acordo com a definição dada acima, para qualquer $b > 1$, a função:

$$\begin{array}{rccc} \log_b : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_b(x) \end{array}$$

é uma função logarítmica.

Proposição 41. *O logaritmo decrescente de 1 é 0.*

Proposição 42. *Uma função logarítmica decrescente, $\mathscr{L}_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é injetora.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $x \neq y$. Então há somente duas possibilidades:

- $x < y$, e neste caso, pela propriedade ($\mathrm{I}'_{\mathscr{L}}$) tem-se $\mathscr{L}_b(y) < \mathscr{L}_b(x)$, donde $\mathscr{L}_b(x) \neq \mathscr{L}_b(y)$;
- $y < x$, e neste caso, pela propriedade ($\mathrm{I}'_{\mathscr{L}}$) tem-se $\mathscr{L}_b(x) < \mathscr{L}_b(y)$, donde $\mathscr{L}_b(x) \neq \mathscr{L}_b(y)$.

Como $x \neq y \Rightarrow \mathscr{L}_b(x) \neq \mathscr{L}_b(y)$, segue que $\mathscr{L}_b$ é injetora. □

Proposição 43. $(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(y > 1 \Rightarrow \mathscr{L}_b(y) < 0)$.

Demonstração. De fato, pela propriedade $(\mathrm{I}'_{\mathscr{L}})$,

$$1 < y \Rightarrow \mathscr{L}_b(y) < \mathscr{L}_b(1) \Rightarrow \mathscr{L}_b(y) < 0.$$

□

Proposição 44. $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(0 < x < 1 \Rightarrow \mathscr{L}_b(x) > 0)$.

Demonstração. De fato, pela propriedade $(\mathrm{I}'_{\mathscr{L}})$,

$$x < 1 \Rightarrow \mathscr{L}_b(1) < \mathscr{L}_b(x) \Rightarrow 0 < \mathscr{L}_b(x).$$

□

Proposição 45. *Tem-se:*

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\left(\mathscr{L}_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathscr{L}_b(x)\right)$;

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\left(\mathscr{L}_b\left(\frac{x}{y}\right) = \mathscr{L}_b(x) - \mathscr{L}_b(y)\right)$;

Demonstração. Idêntica à prova da **Proposição 36**. □

Proposição 46. *Se* $r \in \mathbb{Q}$, *tem-se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x^r) = r \cdot \mathscr{L}_b(x)).$$

Demonstração. Demonstração. Idêntica à prova da **Proposição 37**. □
□

Posteriormente, depois de abordada a noção de limite e continuidade, veremos que a **Proposição 37** implica que:

Proposição 47. *Para* qualquer $r \in \mathbb{R}$, *tem-se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x^r) = r \cdot \mathscr{L}_b(x)).$$

Em tudo o que foi exposto acima, feitas as considerações adequadas, podemos substituir $\mathscr{L}_b$ por $\log_b$. Listamos, abaixo, as propriedades deduzidas:

Proposição 48. *Seja* $b \in]0,1[\cup]1,\infty[$. *Temos:*

(a) *Se* $b > 1$, *temos:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(x < y \Rightarrow \log_b(x) < \log_b(y))$$

(b) *Se* $0 < b < 1$, *temos:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(x < y \Rightarrow \log_b(y) < \log_b(x))$$

(c) *Vale:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y))$$

(d) $\log_b(1) = 0$;

(e) *A função* $\log_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é bijetora.*

(f) *Se* $b > 1$ *tem-se* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(x > 1 \Rightarrow \log_b(x) > 0)$;

(g) *Se* $b > 1$ *tem-se* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(0 < x < 1 \Rightarrow \log_b(x) < 0)$;

(h) *Se* $0 < b < 1$ *tem-se* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(x > 1 \Rightarrow \log_b(x) < 0)$;

(i) *Se* $0 < b < 1$ *tem-se* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(0 < x < 1 \Rightarrow \log_b(x) > 0)$;

(j) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\left(\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)\right)$;

(k) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\left(\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)\right)$;

(k) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall r \in \mathbb{R})(\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x))$

Finalmente, para encerrar esta seção, apresentamos um importante resultado da teoria dos logaritmos:

Proposição 49. *Sejam $b, d \in]1, \infty[$ e $\mathscr{L}_b, \mathscr{L}_d : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ duas funções logarítmicas. Pelo* ***Teorema Fundamental de Unicidade da Teoria dos Logaritmos****, existe $k > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x) = k \cdot \mathscr{L}_d(x)).$$

Em particular, para $x = d$ tem-se:

$$\mathscr{L}_b(d) = k \cdot \mathscr{L}_d(d) = k \cdot 1 = k$$
$$k = \mathscr{L}_b(d).$$

Portanto,

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x) = \mathscr{L}_b(d) \cdot \mathscr{L}_d(x)),$$

ou seja,

$$\mathscr{L}_b(d) = \frac{\mathscr{L}_b(x)}{\mathscr{L}_d(x)}.$$

Esta relação é conhecida como a ***fórmula de mudança de base****.*

Da proposição acima, concluímos que toda função logarítmica é um múltiplo constante do logaritmo natural. Basta fazermos $b = e$, e teremos:

$$\log_b(d) = \frac{\ln(x)}{\log_b(x)}$$

ou seja,

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}, \ \ b > 0, \ b \neq 1$$

Tradicionalmente, as bases mais comuns para os sistemas de logaritmos são 10 (porque nosso sistema de numeração é decimal) e $e = 2,71828\cdots$, que estudaremos em aulas posteriores.

Conforme provado no apêndice deste material, as funções logarítmicas e exponenciais se relacionam como segue:

Proposição 50. *Seja $\log_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica de base b. Tem-se:*

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\log_b(x) = r \iff b^r = x).$$

https://courses.lumenlearning.com/ivytech-collegealgebra/chapter/build-a-logarithmic-model-from-data/
https://mathbits.com/MathBits/TISection/Statistics2/logarithmic.htm

7.1 Modelagem com Funções Exponenciais

Parte do texto abaixo foi extraída do sítio:

http://www.cprm.gov.br/publique/CPRM-Divulga/Como-Sabemos-a-Idade-das-Rochas%3F-1070.html.

A idade absoluta de uma rocha pode ser determinada de duas maneiras: pelo conteúdo fossilífero ou pela datação radiométrica, que utiliza a radioatividade natural das rochas. Se a rocha contém fósseis, sua idade será a idade desses fósseis. Isso é muito simples, mas é um método com enormes limitações. Nem toda rocha contém fósseis; as ígneas, por exemplo, nunca os têm. E, mesmo quando a rocha contém restos ou vestígios de animais ou plantas, eles podem ser de difícil obtenção.

Outro problema é que alguns fósseis viveram durante um período de tempo muito grande, portanto o intervalo possível para a formação da rocha em que estão é muito amplo e de pouca utilidade. Por isso, são muito importantes os chamados fósseis-índices. São seres vivos que viveram durante um período de tempo curto (em termos geológicos) e em amplas áreas do planeta. Desse modo, são relativamente fáceis de encontrar e, quando descobertos, sabe-se que a rocha em que estão tem uma idade que está num intervalo de tempo não muito amplo. São fósseis-índices, por exemplo, trilobitas, foraminíferos, graptolitos e amonitas.

Fósseis de trilobites[2]

Para superar as grandes limitações da datação pelo conteúdo fossilífero, usa-se a datação radiométrica, que só se tornou possível quando, há cerca de 100 anos, descobriu-se a radioatividade. Radioatividade é o processo de desintegração espontânea de átomos de alguns

[2]imagem obtida em http://origens.org/os-olhos-dos-trilobites/

elementos químicos encontrados na natureza. Toda matéria é formada de átomos e os átomos são constituídos de um núcleo - onde existem prótons e nêutrons - e de elétrons - que "orbitam" esse núcleo.

Os elementos químicos radioativos emitem uma radiação que pode ser de três tipos: dois prótons e dois nêutrons - como o núcleo do elemento Hélio (radiação alfa) -, elétrons (radiação beta) ou uma radiação eletromagnética - semelhante aos raios X (radiação gama). Com a emissão dessas radiações, os átomos originais, radioativos, transformam-se em átomos de outro elemento, estáveis, isso é, não radioativos. Sabendo-se a velocidade com que esse processo ocorre, determina-se a quantidade do elemento formado pela radioatividade e, assim, determina-se há quanto tempo o processo está ocorrendo naquela rocha. Esse tempo será sua idade. Essa é uma explicação extremamente resumida da que seja datação radiométrica.

Todo elemento químico tem um número atômico (número de prótons) e um número de massa (a média das somas de seus prótons e nêutrons relativamente à abundância daquele elemento). O número atômico não varia, é como o número da nossa carteira de identidade. Mas o número de massa pode mudar, como pode mudar nossa massa (ou peso, como habitualmente dizemos). O Carbono, por exemplo, tem número atômico 6, mas número de massa que pode ser 12, 13 ou 14. O número de massa do Carbono 12 (12C) é invariável, mas o Carbono 14 (14C) é radioativo e seus átomos podem sofrer alteração no número de massa (transformando-se em outro elemento químico). Átomos que têm mesmo número atômico, mas diferentes números de massa são chamados de isótopos. O 12C e o 14C são isótopos do Carbono.

O 14C ao emitir radiação transforma-se em 14N (Nitrogênio). Do mesmo modo, o 147Sm (Samário) transforma-se em 143Nd (Neodímio); 87Rb (Rubídio) transforma-se em 87Sr (Estrôncio); 238U (Urânio) transforma-se em 206Pb (Chumbo) e 40K (Potássio) transforma-se em 40Ar (Argônio). Esse processo chama-se decaimento radioativo.

O decaimento radioativo pode se dar numa só etapa (ex.: transformação de Rubídio em Estrôncio) ou envolver várias etapas (ex.: transformação de Urânio em Chumbo). Ele ocorre com diferentes velocidades em cada um desses pares de elementos e teoricamente nunca termina. Por isso, na datação radiométrica trabalha-se com o conceito de meia-vida, que é o tempo necessário para que metade dos isótopos instáveis se transformem nos correspondentes isótopos estáveis. Numa rocha são necessários, por exemplo, 106 bilhões de anos para que metade do Samário original (147Sm) se transforme em neodímio. Portanto, a meia-vida do Samário é de 106 bilhões de anos (106 Ga ou 106.000 milhões de anos).

O decaimento radioativo de um elemento pode ser descrito pela função:

$$P(t) = P_0 \cdot 2^{-b \cdot t},$$

onde t é um instante de tempo medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a quantidade inicial da substância analisada.

Tomemos, por exemplo, o rubídio (Rb). Para que metade do rubídio se transforme em estrôncio, bastam 48,8 Ga, ou seja, $48.8 \cdot 10^9$ anos. No caso do urânio (U), leva $4.5 \cdot 10^9$ anos para metade de uma amostra se transformar em chumbo.

Vamos obter uma função exponencial que modele o decaimento do rubídio.

Seja $R(t) = R_0 \cdot 2^{-b \cdot t}$ a função que descreve a quantidade de rubídio presente em uma amostra no instante t (em anos) a partir de um instante inicial.

Sabe-se que a meia-vida do rubídio é de $48.8 \cdot 10^9$ anos, de modo que:

$$R(48.8 \cdot 10^9) = \frac{1}{2} \cdot R_0 = 2^{-1} \cdot R_0$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\cancel{R_0} \cdot 2^{-b \cdot 48.8 \cdot 10^9} = 2^{-1} \cdot \cancel{R_0}$$

$$2^{-b \cdot 48.8 \cdot 10^9} = 2^{-1}$$

Aplicando $\log_2$ nos dois membros da igualdade acima, obtemos:

$$\log_2(2^{-b \cdot 48.8 \cdot 10^9}) = \log_2(2^{-1})$$

o que ocorre se, e somente se:

$$-b \cdot 48.8 \cdot 10^9 = -1$$

Desta forma, concluímos que:

$$b = \frac{1}{48.8} \cdot 10^{-9} = 2.049 \cdot 10^{-12}.$$

A função que descreve a quantidade de rubídio é, portanto:

$$R(t) = R_0 \cdot 2^{-2.049 \cdot 10^{-9} \cdot t}$$

7.2 Aplicação: Datação por Carbono 14

Todo ser vivo tem em sua constituição átomos de Carbono. Dentre os átomos de Carbono, existe um tipo específico que nos possibilita datar com relativa exatidão em que época tais seres viveram.

A técnica do carbono-14 foi descoberta na década de 1940 por Willard Libby, e se baseia no fato de que a concentração do isótopo 14 do Carbono se mantém constante na atmosfera. Ele percebeu que a quantidade de Carbono-14 dos tecidos orgânicos mortos diminui a um ritmo constante com o passar do tempo. Assim, a medição dos valores de Carbono-14 em um objeto fóssil nos dá pistas dos anos decorridos desde sua morte. Isso equivale a dizer que o Carbono-14 morre junto com o ser vivo e é a partir desta datação que ele vai diminuindo de quantidade com o passar dos anos. Isso possibilita entendermos em que época esses seres viveram. Hoje este é o método mais eficiente para estimar a idade de espécimes arqueológicas de origem biológica. Esta técnica é aplicável à madeira, carbono, sedimentos orgânicos, ossos, conchas marinhas, ou seja, todo material que conteve carbono em alguma de suas formas. Como o exame se baseia na determinação de idade através da quantidade de Carbono-14 e esta diminui com o passar do tempo, ele só pode ser usado para datar amostras que tenham idades estimadas em até 50 a 70 mil anos.

Seja $C(t) = C_0 \cdot 2^{-b \cdot t}$ a função que descreve a quantidade de Carbono 14 presente em uma amostra no instante t (em anos) a partir de um instante inicial.

Sabe-se que a meia-vida do Carbono-14 é de 5730 anos, de modo que:

$$C(5730) = \frac{1}{2} \cdot C_0$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\cancel{C_0} \cdot 2^{-5730 \cdot b} = 2^{-1} \cdot \cancel{C_0}$$
$$2^{-b \cdot 5730} = 2^{-1}$$

Aplicando $\log_2$ aos dois membros da igualdade acima, obtemos:

$$\log_2(2^{-b \cdot 5730}) = \log_2(2^{-1})$$

o que ocorre se, e somente se:

$$-b \cdot 5730 = -1$$

Desta forma, concluímos que:

$$b = 0.00017452006$$

Desta forma, a função que procuramos é:

$$C(t) = C_0 \cdot 2^{-0.00017452006 \cdot t}$$

Assim, considere um exemplo para ver como determinar a idade dos fósseis. Digamos que um fóssil de um animal seja encontrado e, após análise, descobre-se que ele apresenta um teor de Carbono 14 igual a 1,25 ppb. Então, ele possui 12,5% do teor de Carbono encontrado nos seres que estão vivos. Vamos determinar, aproximadamente, a idade deste fóssil.

$$0.125 \cdot \cancel{C_0} = 2^{-0.00017452006 \cdot t} \cdot \cancel{C_0}$$

$$2^{-3} = 2^{-0.00017452006 \cdot t}$$

$$t = \frac{3}{0.00017452006} \approx 17190 \text{ anos}$$

Isso significa que o animal em questão morreu e de lá para cá o carbono 14 completou três meias vidas, o que dá um total de 17 190 anos. Essa é a idade do fóssil!

Apêndice: Mudança de Base e Sobrejetividade das Funções Logarítmicas

Proposição 51. *Se $\mathscr{L} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica, então para qualquer $k \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\begin{array}{rccc} k \cdot \mathscr{L} : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & k \cdot \mathscr{L}(x) \end{array}$$

também é uma função logarítmica.

Demonstração. Basta mostrarmos que para qualquer $k > 0$, a função $k \cdot \mathscr{L}$ satisfaz $(\mathrm{I}_{\mathscr{L}})$ e $(\mathrm{II}_{\mathscr{L}})$.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $x < y$, temos $\mathscr{L}(x) < \mathscr{L}(y)$, e como $k > 0$, segue que:

$$k \cdot \mathscr{L}(x) < k \cdot \mathscr{L}(y),$$

$$(k \cdot \mathscr{L})(x) < (k \cdot \mathscr{L})(y),$$

e portanto $k \cdot \mathscr{L}$ é estritamente crescente, e $k \cdot \mathscr{L}$ satisfaz $(\mathrm{I}_{\mathscr{L}})$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se:

$$\mathscr{L}(x \cdot y) = \mathscr{L}(x) + \mathscr{L}(y),$$

e multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $k > 0$, obtemos:

$$k \cdot \mathscr{L}(x \cdot y) = k \cdot (\mathscr{L}(x) + \mathscr{L}(y)) = k \cdot \mathscr{L}(x) + k \cdot \mathscr{L}(y)$$

$$(k \cdot \mathscr{L})(x \cdot y) = (k \cdot \mathscr{L})(x) + (k \cdot \mathscr{L})(y)$$

e segue que $k \cdot \mathscr{L}$ satisfaz $(\mathrm{II}_{\mathscr{L}})$. □

O teorema a seguir nos diz que, a menos de um fator constante, existe um único sistema de logaritmos possível:

Teorema 52 (Teorema Fundamental de Unicidade da Teoria dos Logaritmos). *Sejam $\mathscr{L}, \mathscr{M} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ duas funções logarítmicas. Então existe uma constante $k > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{M}(x) = k \cdot \mathscr{L}(x)),$$

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que exista $a > 1$ tal que $\mathscr{L}(a) = (a)$. Neste caso, provaremos que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}(x) = (x))$.

Naturalmente que se $\mathscr{L}(a) = (a)$, então para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ tem-se $\mathscr{L}(a^r) = r \cdot \mathscr{L}(a) = r \cdot (a) = (a^r)$.

De fato, se não fosse o caso, existiria algum $b > 0$ tal que $(b) \neq \mathscr{L}(b)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $b > 1$ e, consequentemente, $\mathscr{L}(b) > 0$ e $(b) > 0$, pois se tivéssemos$b < 1$ então $1/b > 1$ e ainda teríamos $(1/b) \neq \mathscr{L}(1/b)$, uma vez que $(1/b) = -(b)$ e $\mathscr{L}(1/b) = -\mathscr{L}(b)$.

Mas $\mathscr{L}(b) \neq (b)$ significa que:

- ou bem $\mathscr{L}(b) < (b)$;

- ou bem $(b) < \mathscr{L}(b)$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathscr{L}(b) < (b)$ (o outro caso é análogo). Como $\mathbb{R}$ satisfaz a **Propriedade Arquimediana**, dados $x = (b) - \mathscr{L}(b) > 0$ e $y = \mathscr{L}(a)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 \cdot [(b) - \mathscr{L}(b)] > \mathscr{L}(a),$$

ou seja,

$$(b) - \mathscr{L}(b) > \frac{\mathscr{L}(a)}{n_0} = \mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}}).$$

Os números $c = \mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}}), 2 \cdot c = 2\mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}}), 3 \cdot c = 3\mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}}), \cdots$ decompoem a semirreta $\mathbb{R}_+^*$ em intervalos de comprimento $c = \mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}})$.

Como o intervalo $[\mathscr{L}(b), (b)]$ tem comprimento $(b) - \mathscr{L}(b) > \mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}})$, existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathscr{L}(b) < m \cdot \mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}}) < (b).$$

Mas $m \cdot \mathscr{L}(a^{\frac{1}{n_0}}) = \mathscr{L}(a^{\frac{m}{n_0}}) = \dfrac{m}{n_0} \cdot \mathscr{L}(a) = \dfrac{m}{n_0} \cdot (a) = (a^{\frac{1}{n_0}})$, e como $\mathscr{L}$ e são funções estritamente crescentes, $\mathscr{L}(b) < \mathscr{L}(a^{\frac{m}{n_0}})$ e $(a^{\frac{m}{n_0}}) < (b)$, decorre que:

$$\underbrace{(b < a^{\frac{m}{n_0}})}_{\text{pois } \mathscr{L}(b) < \mathscr{L}(a^{\frac{m}{n_0}})} \quad \& \quad \underbrace{(a^{\frac{m}{n_0}} < b)}_{\text{pois } (a^{\frac{m}{n_0}}) < (b)}$$

donde conclui-se que:

$$b < b,$$

o que é um absurdo. O absurdo provém de supor que existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $(b) \neq \mathscr{L}(b)$. A conclusão natural é:

$$((\exists a \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}(a) = (a))) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}(x) = (x)).$$

Passemos, agora, à demonstração do resultado principal tomando um valor concreto para a, digamos $a = 2$. Como $1 < 2$ e tanto $\mathscr{L}$ quanto são funções crescentes, segue que $0 = \mathscr{L}(1) < \mathscr{L}(2)$ e $0 = (1) < (2)$. Consideremos $k = (2)/\mathscr{L}(2)$ e a função logarítmica:

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{N}: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{(2)}{\mathscr{L}(2)}\mathscr{L}(x) \end{array}$$

Pelo que provamos anteriormente, como $\mathscr{N}(2) = (2)$, segue que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \left(\mathscr{N}(x) = \underbrace{\frac{(2)}{\mathscr{L}(2)}}_{=k} \mathscr{L}(x) = (x) \right),$$

ou seja,

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\,(k \cdot \mathscr{L}(x) = (x)),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

A grosso modo, o teorema acima nos diz que não importa como definimos um sistema de logaritmos: todas as definições conduzem ao mesmo resultado, a menos de uma mudança de escala. Tudo o que se exige de um sistema de logaritmos é que seja uma função crescente que transforme soma em produto [*i.e.*, uma função $\mathscr{L} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que satisfaça $(\mathrm{I}_{\mathscr{L}})$ e $(\mathrm{II}_{\mathscr{L}})$].

Lema 53. *Seja $\mathscr{L} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $a < \mathscr{L}(x) < b$.*

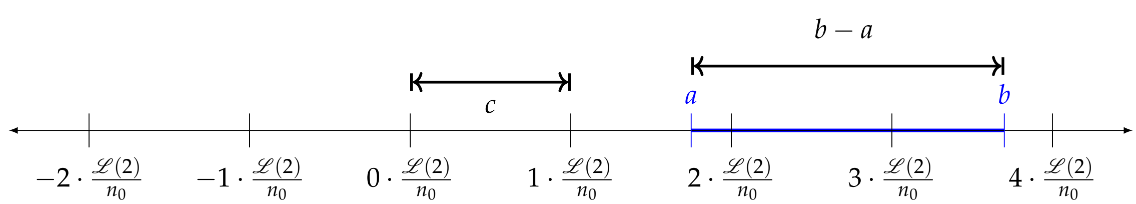
Demonstração. Usando a **Propriedade Arquimediana** para $x = b - a > 0$ e $y = \mathscr{L}(2)$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 \cdot (b - a) > \mathscr{L}(2),$$

ou seja,

$$b - a > \frac{\mathscr{L}(2)}{n_0}.$$

Escrevemos $c = \mathscr{L}(2)/n_0$. Os múltiplos inteiros $m \cdot c = m \cdot \mathscr{L}(2)/n_0 = \mathscr{L}(2^{\frac{m}{n_0}}), m \in \mathbb{Z}$ decompõem a reta como uma reunião de intervalos justapostos cujo comprimento, c, é menor do que $b - a$, que é o comprimento de $]a, b[$.



Como a reunião destes intervalos justapostos recobre a reta toda, ou seja,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[(m-1) \cdot \frac{\mathscr{L}(2)}{n_0}, m \cdot \frac{\mathscr{L}(2)}{n_0} \right],$$

existe pelo menos um $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $m_0 \cdot \dfrac{\mathscr{L}(2)}{n_0} = \mathscr{L}(2^{\frac{m_0}{n_0}}) \in]a, b[$. Deste modo, basta tomarmos $x = 2^{\frac{m_0}{n_0}}$, e teremos:

$$a < \mathscr{L}(2^{\frac{m_0}{n_0}}) < b.$$

□

Corolário 54. *Se $\mathscr{L} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica, então $\mathscr{L}$ é ilimitada, ou seja, para qualquer $M > 0$ existem $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que:*

$$(\mathscr{L}(y) < -M) \& (M < \mathscr{L}(x)).$$

Demonstração. Basta aplicar o **Lema 53** tomando $a = M, b = M+1$ para encontrar x e tomando $a = -M-1$ e $b = -M$ para encontrar y. $\square$

Devido ao corolário anterior, podemos deduzir que o gráfico de qualquer função logarítmica jamais estará contido em qualquer faixa horizontal do plano cartesiano.

Observação 55. *Recorde que todo número real x admite uma representação decimal:*

$$x = n_0, d_1 d_2 d_3 \cdots = n + \frac{d_1}{10^1} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots,$$

onde a parte inteira, n_0, é um número inteiro qualquer e os algarismos decimais, $d_n, n \geq 1$, podem assumir os valores $0, 1, 2, 3, \cdots, 8, 9$. Para todo $n \geq 0$, escreveremos:

$$x_n = n_0, d_1 d_2 d_3 \cdots d_n = n_0 + \frac{d_1}{10^1} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n}.$$

Tem-se, evidentemente,

$$\begin{aligned} x_n = n_0 + \frac{d_1}{10^1} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} \leq \\ \leq n_0 + \frac{d_1}{10^1} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots = x_n + \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{d_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots = x \end{aligned}$$

e para todo $n \geq 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} x - x_n = \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{d_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{10^n}\left(\frac{d_{n+1}}{10} + \frac{d_{n+2}}{10^2} + \cdots + \frac{d_{n+k}}{10^k} + \cdots\right) \overset{\overset{d_{n+k} \leq 9}{\uparrow}}{\leq} \\ \leq \frac{1}{10^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}\right) = \frac{1}{10^n} \cdot \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

*Se um número real w é menor do que x, então deve existir $n \geq 0$ tal que $w < x_n$. Com efeito, $w < x$ significa que $x - w > 0$, de modo que pela **Propriedade Arquimediana** existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \cdot (x - w) > 1$, logo $1/n_0 < x - w$. Como $n_0 \leq 10^{n_0}$ para qualquer $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, segue que:*

$$\frac{1}{10^{n_0}} \leq \frac{1}{n_0} < x - w,$$

de modo que:

$$x - x_{n_0} < \frac{1}{n_0} < x - w \tag{8}$$

logo $x - x_{n_0} < x - w$, e daí resulta que $w < x_{n_0}$.

A observação acima pode ser sintetizada na seguinte:

Proposição 56. *Sejam $x, w \in \mathbb{R}$. Se $w < x$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w < x_{n_0}$.*

Teorema 57. *Se $\mathscr{L} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica então $\mathscr{L}$ é sobrejetora.*

Demonstração. Devemos demonstrar que dado qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe um único (por quê?) $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\mathscr{L}(x) = y$.

Dado $y \in \mathbb{R}$, se $y = 0$ bastará tomarmos $x = 1$, e teremos $\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(1) = 0 = y$. Suponhamos, portanto, $y \neq 0$, de modo que ou bem $y > 0$ ou bem $-y > 0$. Sem perda de generalidade (o outro caso é análogo), suporemos $y > 0$.

Pelo **Corolário 54** (fazendo M igual a y), existe(m infinitos) $n \in \mathbb{N}$ (que no **Corolário 54** corresponde a x) tal que $\mathscr{L}(n) > y$ (pois $\mathscr{L}$ é estritamente crescente, e qualquer número natural $m > n$ satisfará $\mathscr{L}(m) > \mathscr{L}(n) > y$). Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ o <u>menor</u> número natural tal que $\mathscr{L}(n_0 + 1) > y$. Desta forma, tem-se:

$$\mathscr{L}(n_0) \leq y < \mathscr{L}(n_0 + 1),$$

ou então $n_0 + 1$ não seria o menor inteiro com a propriedade indicada.

Afirmamos que existe $x \in [n_0, n_0 + 1]$ tal que $\mathscr{L}(x) = y$.

Para demonstrar isto, construiremos uma sequência de intervalos encaixados e mostraremos que o único elemento na interseção de todos estes intervalos é o x que desejamos.

Considere os seguintes números:

$$n_0, n_0 + \frac{1}{10}, n_0 + \frac{2}{10}, \cdots, n_0 + \frac{9}{10}, n_0 + 1.$$

Como $y \in [\mathscr{L}(n_0), \mathscr{L}(n_0+1)] = \left[\mathscr{L}(n_0), \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{1}{10}\right)\right] \cup \cdots \cup \left[\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{8}{10}\right), \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{9}{10}\right)\right] \cup \left[\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{9}{10}\right), \mathscr{L}(n_0 + 1)\right]$, existe um <u>único</u> número $d_1 \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ tal que:

$$\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10}\right) \leq y < \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1 + 1}{10}\right).$$

Obtemos, deste modo, um intervalo:

$$I_1 = \left[n_0 + \frac{d_1}{10}, n_0 + \frac{d_1 + 1}{10}\right]$$

Note que $I_1 \subseteq [n_0, n_0 + 1]$.

Repetimos o procedimento, observando que como:

$$y \in \left[\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10}\right), \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1+1}{10}\right)\right] =$$

$$= \left[\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10}\right), \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{100}\right)\right] \cup \cdots$$

$$\cup \left[\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{100}\right), \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{2}{100}\right)\right] \cup \left[\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{9}{100}\right), \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1+1}{10}\right)\right]$$

existe um <u>único</u> número $d_2 \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ tal que:

$$\mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100}\right) \leq y < \mathscr{L}\left(n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{100}\right)$$

e obtemos o intervalo:

$$I_2 = \left[n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100}, n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{100}\right]$$

Note que $I_2 \subseteq I_1 \subseteq [n_0, n_0+1]$.

Prosseguindo deste modo, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtemos um intervalo:

$$I_k = \left[n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots + \frac{d_k}{10^k}, n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots + \frac{d_k+1}{10^k}\right]$$

tal que $I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq I_2 \subseteq I_1 \subseteq [n_0, n_0+1]$.

Denotemos por x_k o número $n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} = n_0, d_1 d_2 d_3 \cdots d_{k-1} d_k$. Desta forma, podemos escrever:

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \left(\mathscr{L}(x_k) \leq y < \mathscr{L}\left(x_k + \frac{1}{10^k}\right)\right) \tag{9}$$

Assim, pelo **Teorema dos Intervalos Encaixados**, existirá <u>um único x</u> na interseção de todos esses intervalos, ou seja, existe um único:

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Afirmação: $\mathscr{L}(x) = y$.

Suponhamos, por absurdo, que $\mathscr{L}(x) < y$. Então, pelo **Lema 53**, existiria $w \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$\mathscr{L}(x) < \mathscr{L}(w) < y.$$

Como $\mathscr{L}$ é estritamente crescente, segue que $x < w$, de modo que pela **Proposição 56**, existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$w < x_n$$

donde:

$$x_n + \frac{1}{10^n} \leq x + \frac{1}{10^n} < w$$

Logo, por (9) e pelo fato de $\mathscr{L}$ ser estritamente crescente, tem-se:

$$y \overset{\overset{(9)}{\uparrow}}{<} \mathscr{L}\left(x_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\right) \leq \mathscr{L}\left(x + \frac{1}{10^{n_0}}\right) < \mathscr{L}(w)$$

Daí concluímos que $y < \mathscr{L}(w)$ - o que contradiz ser $\mathscr{L}(w) < y$. Daí segue que não é o caso que $\mathscr{L}(x) < y$.

Analogamente, não se pode ter $y < \mathscr{L}(x)$. Com efeito, usando o **Lema** , obteríamos $w \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$y < \mathscr{L}(w) < \mathscr{L}(x).$$

Como $\mathscr{L}$ é crescente, de $\mathscr{L}(w) < \mathscr{L}(x)$ concluímos que $w < x$, e isto implicaria que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $w < x_n$. Então $\mathscr{L}(w) < \mathscr{L}(x_n) \leq y$, contrariando que w foi obtido de modo a satisfazer $y < \mathscr{L}(w)$.

Segue, assim, que:

$$\mathscr{L}(x) = y,$$

e a função $\mathscr{L}$ é sobrejetora.

□

Corolário 58. *Seja $\mathscr{L} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Então existe um único elemento $b \in]1, \infty[$ tal que:*

$$\mathscr{L}(b) = 1.$$

Pelo **Teorema 39**, toda função logarítmica é bijetora, donde segue que qualquer função logarítmica admite uma função inversa. Em seguida apresentamos a função exponencial como a inversa da função logarítmica. Veremos que as propriedades da função exponencial são consequências diretas das propriedades das funções logarítmicas (ou, simplesmente, "manifestações das propriedades dualizadas").

Definição 59 (função exponencial de base b). *Seja $b \in]1, \infty[$. A* ***função exponencial de base*** *b é a função inversa de $\mathscr{L}_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, ou seja, é a única função, que denotaremos por:*

$$\mathscr{E}_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

tal que:

$$(\mathscr{L}_b \circ \mathscr{E}_b = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \& (\mathscr{E}_b \circ \mathscr{L}_b = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}).$$

Teorema 60. *Seja $\mathscr{E}_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ a função exponencial de base b com $b > 1$. Então valem:*

($\mathrm{I}_{\mathscr{E}}$) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow \mathscr{E}_b(x) < \mathscr{E}_b(y))$;

($\mathrm{II}_{\mathscr{E}}$) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\mathscr{E}_b(x+y) = \mathscr{E}_b(x) \cdot \mathscr{E}_b(y))$;

($\mathrm{III}_{\mathscr{E}}$) $(\forall r \in \mathbb{Q})(\mathscr{E}_b(r) = b^r)$

Demonstração. Ad ($\mathrm{I}_{\mathscr{E}}$): Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$. Mostraremos que não podem ocorrer nem $\mathscr{E}_b(x) = \mathscr{E}_b(y)$ nem $\mathscr{E}_b(x) > \mathscr{E}_b(y)$, e seguirá da tricotomia da ordem que $\mathscr{E}_b(x) < \mathscr{E}_b(y)$.

Suponhamos que $\mathscr{E}_b(x) = \mathscr{E}_b(y)$. Desta forma, ao calcular $\mathscr{L}_b$ nos dois membros da igualdade acima, obteríamos:

$$\mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x)) = \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(y))$$
$$x = y,$$

o que é absurdo. Vamos supor, então, que $\mathscr{E}_b(x) > \mathscr{E}_b(y)$. Como $\mathscr{L}_b$ é estritamente crescente, segue que:

$$\mathscr{E}_b(y) < \mathscr{E}_b(x) \Rightarrow \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(y)) < \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x)) \Rightarrow y < x,$$

o que é absurdo. Logo, $\mathscr{E}_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é uma função estritamente crescente.

Ad ($\mathrm{II}_{\mathscr{E}}$): Temos, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, por um lado:

$$x + y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x+y) = \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x+y)) \tag{10}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} x + y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(y) = \mathscr{L}_b \circ \mathscr{E}_b(x) + \mathscr{L}_b \circ \mathscr{E}_b(y) = \\ = \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x)) + \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(y)) = \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x) \cdot \mathscr{E}_b(y)) \end{aligned} \tag{11}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x+y)) \overset{(10)}{=} x+y \overset{(11)}{=} \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x)\cdot\mathscr{E}_b(y)).$$

Como $\mathscr{L}_b$ é uma função injetora, segue que:

$$\mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x+y)) = \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x)\cdot\mathscr{E}_b(y)) \Rightarrow \mathscr{E}_b(x+y) = \mathscr{E}_b(x)\cdot\mathscr{E}_b(y).$$

Ad ($\mathrm{III}_{\mathscr{E}}$): A demonstração é feita primeiramente para $r \in \mathbb{N}$, depois para $r \in \mathbb{Z}$ e, finalmente, para $r \in \mathbb{Q}$.

$$\mathscr{E}_b(x+y+z) = \mathscr{E}_b(x)\cdot\mathscr{E}_b(y)\cdot\mathscr{E}_b(z)$$

Caso 1: $r \in \mathbb{N}$, ou seja, mostraremos que $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathscr{E}_b(n\cdot x) = \mathscr{E}_b(x)^n)$.

A demonstração, neste caso, é feita por indução. O caso $n = 1$ está claro, uma vez que $\mathscr{E}_b(1\cdot x) = \mathscr{E}_b(x)^1$. Suponhamos que:

$$\mathscr{E}_b((n-1)\cdot x) = \mathscr{E}_b(x)^{(n-1)}.$$

Temos, assim:

$$\mathscr{E}_b(n\cdot x) = \mathscr{E}_b((n-1)\cdot x + x) = \mathscr{E}_b((n-1)\cdot x)\cdot\mathscr{E}_b(x) = \mathscr{E}_b(x)^{n-1}\cdot\mathscr{E}_b(x) = \mathscr{E}_b(x)^n$$

Caso 2: $r = 0$.
Sabemos que $\mathscr{L}_b(1) = 0$, de modo que:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_b(\mathscr{L}_b(1)) &= \mathscr{E}_b(0)\\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}(1) &= \mathscr{E}_b(0)\\ 1 &= \mathscr{E}_b(0)\\ b^0 &= \mathscr{E}_b(0).\end{aligned}$$

Caso 3: $r \in \mathbb{Z}_-$.
Neste caso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r = -n$. Neste caso $r = -1 - \cdots - 1$, e tem-se:

$$\mathscr{E}_b(r) = \mathscr{E}_b(-1-\cdots-1) = \mathscr{E}_b(-1)^n$$

Também,

$$\mathscr{L}_b\left(\frac{1}{b}\right) = -\mathscr{L}_b(b) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}_b\left(\frac{1}{b}\right) = -1 \Rightarrow \mathscr{E}_b\left(\mathscr{L}_b\left(\frac{1}{b}\right)\right) = \mathscr{E}_b(-1) \Rightarrow \mathscr{E}_b(-1) = \frac{1}{b}$$

Segue assim que:

$$\mathscr{E}_b(r) = \mathscr{E}_b(-n) = \frac{1}{b^n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n = b^{-1} = b^r.$$

Dos **Casos 1,2** e **3** segue que:

$$(\forall r \in \mathbb{Z})(\mathscr{E}_b(r) = b^r).$$

Caso 4: $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Temos:

$$\mathscr{E}_b(r) = \mathscr{E}_b\left(\frac{p}{q}\right).$$

Sabemos que:

$$\mathscr{L}_b(b^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\mathscr{L}_b(b) = \frac{p}{q},$$

de modo que aplicando $\mathscr{E}_b$ aos membros da igualdade acima, obtemos:

$$\mathscr{E}_b\left(\mathscr{L}_b(b^{\frac{p}{q}})\right) = \mathscr{E}_b\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$b^{\frac{p}{q}} = \mathscr{E}_b\left(\frac{p}{q}\right)$$

□

Finalmente, examinaremos o comportamento da função exponencial cuja base é um número entre 0 e 1.

Teorema 61. *Seja $\mathscr{E}_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ a função exponencial de base b com $0 < b < 1$. Então valem:*

($\mathrm{I}'_{\mathscr{E}}$) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow \mathscr{E}_b(y) < \mathscr{E}_b(x))$;

($\mathrm{II}'_{\mathscr{E}}$) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\mathscr{E}_b(x+y) = \mathscr{E}_b(x) \cdot \mathscr{E}_b(y))$;

($\mathrm{III}'_{\mathscr{E}}$) $(\forall r \in \mathbb{Q})(\mathscr{E}_b(r) = b^r)$

Demonstração. Demonstraremos apenas ($\mathrm{I}'_{\mathscr{E}}$), pois os demais itens têm demonstrações idênticas às do teorema análogo já demonstrado.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$. Mostraremos que não podem ocorrer nem $\mathscr{E}_b(x) = \mathscr{E}_b(y)$ nem $\mathscr{E}_b(x) < \mathscr{E}_b(y)$, e seguirá da tricotomia da ordem que $\mathscr{E}_b(x) > \mathscr{E}_b(y)$.

Suponhamos que $\mathscr{E}_b(x) = \mathscr{E}_b(y)$. Desta forma, ao calcular $\mathscr{L}_b$ nos dois membros da igualdade acima, obteríamos:

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x)) = \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(y)) \\ x = y,\end{gathered}$$

o que é absurdo. Vamos supor, então, que $\mathscr{E}_b(x) < \mathscr{E}_b(y)$. Como $0 < b < 1$, $\mathscr{L}_b$ é estritamente decrescente, e segue que:

$$\mathscr{E}_b(x) < \mathscr{E}_b(y) \Rightarrow \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(x)) > \mathscr{L}_b(\mathscr{E}_b(y)) \Rightarrow x > y,$$

o que é absurdo. Logo, $\mathscr{E}_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é uma função estritamente decrescente.

□

Corolário 62. *Seja $\mathscr{L}_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica de base b. Tem-se:*

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\mathscr{L}_b(x) = r \iff b^r = x).$$

Demonstração. Seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\mathscr{L}_b(x) = r$. Então:

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_b(x) = r = r \cdot 1 = r \cdot \mathscr{L}_b(b) = \mathscr{L}_b(b^r) \\ \mathscr{L}_b(x) = \mathscr{L}_b(b^r) \\ x = b^r\end{gathered}$$

Reciprocamente, se $x = b^r$, então:

$$\begin{gathered}b^r = b^0 \cdot b^r \\ \mathscr{L}_b(x) = \mathscr{L}_b(b^r) = \mathscr{L}_b(b^0 \cdot b^r) = \mathscr{L}_b(b^0) + \mathscr{L}_b(b^r)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_b(x) = r \cdot \mathscr{L}_b(b) \\ \mathscr{L}_b(x) = r.\end{gathered}$$

□

O aspecto do gráfico da função exponencial é, conforme já argumentado, obtido pela reflexão do gráfico da função logarítmica correspondente pela primeira bissetriz.

Referências

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Figueiredo, D. G., **Números Irracionais e Transcendentes**, 3ª edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Hughes-Hallett, Gleason, McCallum et al., **Cálculo de Uma Variável**, 3ª edição. Editora LTC. Tradução de de Rafael José Iório Júnior e Valéria de Magalhães Iório, Rio de Janeiro, 2008.

[5] Iezzi, G., Dolce, O., Murakami, C., **Fundamentos de Matemática Elementar 2: Logaritmos**, 8ª edição, Editora Atual, São Paulo, 1993.

[6] Kasner, E., Newman, J., **Matemática e Imaginação**. Tradução de Jorge Fortes. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1968.

[7] Lima, E. L., **Logaritmos**, Coleção Matemática Universitária, 1ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1996.

[8] Niven, I. M., **Números Racionais e Irracionais**. Tradução de Renate Watanabe. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1984.

[9] Paiva, M., **Matemática 1**, Editora Moderna, 2^a edição, 2013.

[10] https://special-collections.wp.st-andrews.ac.uk/2017/09/07/maths-week-scotland/