MAT0220 - Cálculo Diferencial e Integral IV
Agenda 03: Séries de Potências

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Na parte inicial deste curso pudemos nos familiarizar com sequências e séries infinitas de números reais. A ideia de definir funções através de séries, ou de se exprimir funções como séries, surge naturalmente — até já fizemos isto. Consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} f: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

Vimos, em agendas anteriores, que sempre que $|x| < 1$, tem-se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, de modo que podemos escrever a seguinte igualdade:

$$(\forall x \in]-1,1[) \left(f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)$$

Ao estudar o comportamento das $p-$séries, vimos que sempre que $p > 1$, a série $\sum \frac{1}{n^p}$ converge. Desta forma, podemos definir a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} \zeta: &]1,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \end{array}$$

conhecida como "função zeta de Riemann".

O uso de séries de funções é, com certa frequência, inevitável na solução de certas equações diferenciais. Por exemplo, a solução da EDO de Bessel de índice p:

*jeancb@ime.usp.br

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) \cdot y = 0$$

é dada pela série:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

em que $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \cdot e^{-x} dx$. Nesta agenda vamos estudar a importante classe de sequências de funções denominada a classe das séries de potências, que conforme veremos, possui excelentes propriedades operatórias.

1 Sequências e Séries de Funções

Vamos convencionar a seguinte notação: dado $X \subset \mathbb{R}$, escreveremos:

$$\mathscr{F}(X, \mathbb{R}) = \{X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \mid f \text{ função}\}$$

para denotar o conjunto de todas as funções de domínio X e contradomínio $\mathbb{R}$.

Munidos desta notação, vamos generalizar o conceito de sequência numérica para "sequência de funções": uma sequência de funções será, simplesmente, uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} & \to & \mathscr{F}(X, \mathbb{R}) \\ & n & \mapsto & f_n : X \to \mathbb{R} \end{array}$$

Naturalmente, a notação para uma sequência de funções será $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots)$ ou $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, onde colocamos este x depois do f apenas para nos lembrarmos de que cada termo desta sequência é uma função (de variável x).

Dada uma sequência de funções, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{F}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, podemos definir a série que lhe é associada, a sequência das somas parciais:

$$(f_0(x), f_0(x) + f_1(x), f_0(x) + f_1(x) + f_2(x), \cdots, \underbrace{f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)}_{\sum_{i=0}^{n} f_i(x)}, \cdots)$$

que denotaremos por:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad \sum f_n(x)$$

Note que para cada $x_0 \in X$, temos uma série numérica, qual seja, $\sum f_n(x_0)$, que pode convergir ou divergir. O conjunto dos pontos de X tais que a série $\sum f_n(x)$ converge é denominado **domínio de convergência**, e será denotado por:

$$\operatorname{Conv}(f) \subset X = \{x \in X \mid \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge}\}$$

Podemos, desta forma, definir neste conjunto uma função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \operatorname{Conv}(f) \subset X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \end{array}$$

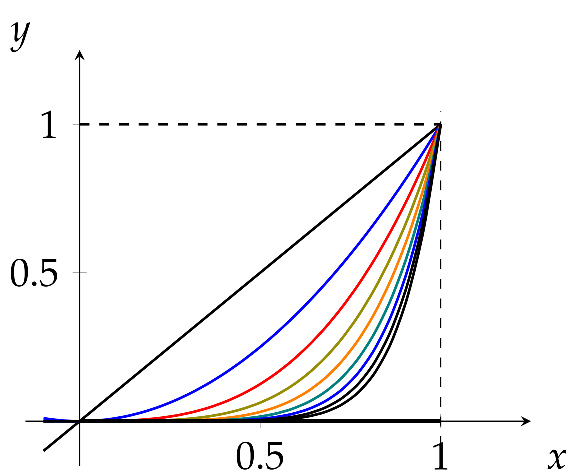
Observando que toda série de funções é, por definição, uma sequência de funções, tem-se que, dada uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathscr{C}^k$ etc), pelo fato de a soma finita de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathscr{C}^k$ etc) ser contínua (diferenciável etc), a série associada, que é a sequência de somas finitas, $(\sum_{i=0}^{n} f_i)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathscr{C}^k$ etc). Surge, naturalmente, o questionamento: será que a função definida por meio de uma série de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathscr{C}^k$ etc) é, novamente, contínua (diferenciáveis, de classe $\mathscr{C}^k$ etc)?

Vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Consideremos a seguinte sequência de funções:*

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{N} & \to & \mathscr{F}([0,1],\mathbb{R}) \\ & n & \mapsto & \begin{array}{rccc} f_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array} \end{array}$$

cujos gráficos estão esboçados abaixo:



Cada uma dessas funções contínua (na verdade, de classe $\mathscr{C}^\infty$ em $[0,1]$). Notamos que para qualquer $x \in [0,1[$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

mas que para $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Desta forma, ponto a ponto, concluímos que a sequência de funções contínuas $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0, & se\ x \in [0,1[\\ 1, & se\ x = 1 \end{cases} \end{array}$$

que é descontínua em 1*, pois* $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$.

O exemplo acima nos mostra que nem sempre o limite de uma sequência de funções contínuas é contínua (ou diferenciável etc).

Motivados pela fórmula de Taylor, vamos introduzir as séries de potências, e veremos que, a depender do caso, tais séries são extremamente bem comportadas no que diz respeito a propriedades como continuidade e mesmo resultados que nos permitem derivá-las ou integrá-las termo a termo.

2 Séries de Funções

A nossa primeira definição abrange *qualquer* tipo de sequência de funções:

Definição 2 ($n-$**ésima soma parcial**)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções de mesmo domínio,* $X \subset \mathbb{R}$*. A* $n-$***ésima soma parcial de*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é a função:*

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$$

Observe que se todas as funções do conjunto $\{f_n : X \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *forem contínuas (diferenciáveis, de classe* $\mathscr{C}^k$ *etc), então a* $n-$*ésima soma parcial destas funções também será contínua (diferenciável, de classe* $\mathscr{C}^k$ *etc).*

Exemplo 3. *Dada a sequência de funções* $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = x^n$*, a* $n-$*ésima soma parcial é:*

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \textit{soma da PG} \frac{(1-x^{n+1})}{1-x}$$

Definição 4 (série de funções). *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções de mesmo domínio,* $X \subset \mathbb{R}$*. A* ***série de funções associada a*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é a sequência das* $n-$*ésimas somas parciais de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, ou seja:*

$$\sum f_n(x) = (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exemplo 5. *A série associada à sequência dada no* ***Exemplo 3*** *é a sequência das somas parciais:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $x \in [0,1]$.

3 Séries de Potências

As técnicas de aproximação de funções por polinômios surgiram no século XVII. Na verdade, os matemáticos daquela época utilizavam as séries infinitas para representar funções, como se fossem polinômios. Uma vez que eles não possuíam qualquer teoria que tratasse da convergência — e não perceberam a necessidade desta teoria — manipulavam séries como se fossem polinômios. Era um expediente cômodo, que permitia representar funções complicadas por "polinômios infinitos". De fato, possuindo infinitos termos, estes entes eram tratados com as mesmas regras formais do cálculo algébrico. Por isso mesmo, era frequente obterem resultados estranhos e até mesmo contraditórios. Por exemplo, quando derivamos a série:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

como se o membro direito da igualdade fosse um "polinômio" (ou seja, termo a termo) , obtemos:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

Embora esses desenvolvimentos sejam ambos válidos para $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$, a primeira série continua convergente mesmo quando $x = 1$, ao passo que a segunda não faz nenhum sentido; De fato, veja que ao substituir x por 1 na segunda igualdade obteríamos:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

que, conforme já vimos, *diverge* (recorde que a série de Grandi diverge).

Evidentemente, o resultado acima não pode ser aceito como verdadeiro. Não é sempre que podemos derivar uma série de funções termo a termo, conforme já vimos. Neste caso, ao derivar a série de $\ln(1+x)$ obtemos uma série divergente.

Como careciam de uma noção precisa de convergência, os matemáticos acabavam lidando com séries divergentes, às vezes sem perceber. O que faltava à Matemática dos séculos XVII e XVIIII seria suprido somente pelos matemáticos do século XIX, a começar com os trabalhos de Bolzano (1781–1827) e Cauchy (1789 – 1857).

Nesta seção veremos que uma série de potências, quando converge, o faz uniformemente em um intervalo simétrico (limitado ou toda a reta), de tal modo que podemos derivá-las e integrá-las termo a termo.

As séries de potências são o tipo mais natural de séries de funções, por diversas razões. Em primeiro lugar, são a generalização natural dos polinômios, e em segundo lugar, são claramente sugeridas pela fórmula de Taylor.

Definição 6 (série de potências). *Uma série de potências em torno de um número real, $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma série de funções da forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-x_0)^n + \cdots$$

Nos pontos em que converge, $X \subset \mathbb{R}$, uma série de potências, $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ define uma função:

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \end{array}$$

Acerca desta função, podemos perguntar:

(a) Quais são as propriedades da função f definida por uma série de potências?

(b) Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, será possível encontrar uma série de potências de tal modo que:

$$(\forall x \in X)\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n\right)$$

O resultados a seguir nos indicam que o conjunto de pontos para os quais uma série de potências é convergente ou é unitário ou é um intervalo.

Lema 7. *Se a série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge para certo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, ou seja, se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é tal que $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$, enquanto série numérica, é convergente, então para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$, a série $\sum |a_n \cdot (x - x_0)^n|$ converge.*

Demonstração. Se $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$ é convergente, então:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n| = 0$$

de modo a sequência $(|a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, digamos pela constante $M > 0$, ou seja:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n| \leq M)$$

Mas observe que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$, podemos escrever, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| = |a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n| \cdot \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n$$

Assim, dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| \leq M \cdot \underbrace{\left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n}_{<1}$$

Pelo **Critério da Comparação**, observando que $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0| \Rightarrow \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right| < 1$ e que, portanto, a série geométrica $\sum M \cdot \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n$ converge, segue que $\sum |a_n \cdot (x - x_0)^n|$ converge, ou seja, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)$ não apenas converge, mas também é absolutamente convergente. $\square$

Lema 8. *Se a série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ diverge em $\bar{x} \in \mathbb{R}$, ou seja, se $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$ diverge, então para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| > |\bar{x} - x_0|$, a série (numérica) $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ diverge.*

Demonstração. (**contraposição**) De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| > |\bar{x} - x_0|$. Se a série $\sum |a_n \cdot (x - x_0)^n|$ converge, então pelo **Lema 7** seguiria que $\sum |a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n|$ converge. $\square$

Uma série de potências, $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$, pode convergir apenas para $x = x_0$, como é o caso da série $\sum n!(x - x_0)^n$. Com efeito, se $x = x_0$, a série em apreço é $\sum 0$, que converge, mas sempre que $x \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} |n! \cdot |x - x_0|^n| \neq 0$. Também pode acontecer de uma série de potências convergir para todo $x \in \mathbb{R}$, como é o caso da série $\sum \frac{x^n}{n!}$.

à parte desses dois casos extremos, veremos que existe um número positivo, R, tal que se $|x - x_0| < R$, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge, e se $|x - x_0| > R$, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ diverge.

Teorema 9. *Seja $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ uma série de potência tal que existem $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \neq x_0$ tal que $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$ converge e $\bar{\bar{x}} \in \mathbb{R}$, com $\bar{\bar{x}} \neq x_0$, tal que $\sum a_n \cdot (\bar{\bar{x}} - x_0)^n$ diverge. Então existe um número positivo R tal que:*

$$\begin{cases} |x - x_0| < R \Rightarrow \sum a_n \cdot (x - x_0)^n \ \ \textit{converge absolutamente} \\ |x - x_0| > R \Rightarrow \sum a_n \cdot (x - x_0)^n \ \ \textit{diverge} \end{cases}$$

Demonstração. Considere o conjunto $S = \{y \in \mathbb{R} \mid \sum a_n \cdot (y - x_0)^n \text{ converge absolutamente}\}$. Este conjunto é não-vazio, uma vez que $\bar{x} \in S$, e limitado superiormente. Seja:

$$R = \sup\{|x - x_0| \mid x \in S\}$$

Observe que $|\bar{x} - x_0| < R$ e que $|\bar{\bar{x}} - x_0| > R$ (uma vez que se $|\bar{\bar{x}} - x_0| < R$, então existiria $y \in \mathbb{R}$, $|\bar{\bar{x}} - x_0| < y < R$ tal que $\sum a_n \cdot (y - x_0)^n$ converge absolutamente, o que pelo **Lema 7** implicaria que $\sum a_n \cdot (\bar{\bar{x}} - x_0)^n$ também convergiria absolutamente, contrariando a definição de $\bar{\bar{x}}$).

Se x é tal que $|x - x_0| < R$, pela definição de supremo existe $x' \in S$, ou seja, existe $x' \in \mathbb{R}$ tal que $\sum a_n \cdot (x' - x_0)^n$ converge e tal que $|x - x_0| < |x' - x_0| \leq R$. Pelo **Lema 7**, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge absolutamente. A série diverge para $x \in \mathbb{R}$ ral que $|x - x_0| > R$, senão, pelo mesmo lema, teria que convergir em todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $R < |y - x_0| < |x - x_0|$, e portanto R não seria supremo do conjunto $\{|x - x_0| \mid x \in S\}$. $\square$

O número R introduzido no teorema anterior é chamado "**raio de convergência da série**".

O **Teorema 9** garante a convergência absoluta no intervalo aberto $]x_0 - R, x_0 + R[$, nada afirmando sobre os extremos, $x_0 - R$ e $x_0 + R$. Vamos ver, posteriormente, esses casos.

Há um outro modo de introduzir o conceito de raio de convergência de uma série de potências, que nos permite inclusive calculá-lo em termos dos coeficientes da série. Para tanto, aplicamos o critério da razão à série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$. Pelo **Teste da Razão**, teremos a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ absolutamente convergente sempre que:

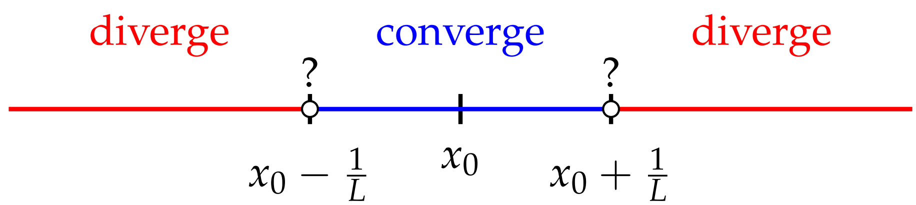
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n| \cdot |(x - x_0)^n|} < 1 \iff$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x - x_0| < 1 \tag{1}$$

Caso $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, a desigualdade (1) *sempre* se cumpre, de modo que a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge absolutamente para *todo* $x \in \mathbb{R}$.

Caso $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 0$, então pelo **Teste da Razão**, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ convergirá absolutamente sempre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x - x_0| < 1 \iff |x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$



Note que o teste é inconclusivo sempre que o limite de $|a_{n+1}|/|a_n|$ for 1 — por isto não podemos concluir nada sobre o comportamento da série nos pontos $x_0 - \frac{1}{L}$ e $x_0 + \frac{1}{L}$ (razão pela qual colocamos uma lacuna com um ponto de interrogação sobre esses pontos na figura acima: são pontos em que a série de potências pode ou não convergir).

Finalmente, se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$, então para todo $x \neq x_0$ teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}}{a_n \cdot (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$$

de modo que $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ diverge para todo $x \neq x_0$.

Se, no entanto, o limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ não existir, podemos apelar para o **Teste da Raiz**. Caso $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ seja um número real não nulo, a convergência absoluta da série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ fica assegurada sempre que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{|a_n| \cdot |x - x_0|^n} = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$0 = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} < 1$$

de modo que a série de potências $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ convergirá absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então para qualquer $x \neq x_0$ teremos $|x-x_0| \neq 0$ e, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$$

de modo que a série divergirá sempre que $x \neq x_0$.

Podemos resumir a discussão acima na seguinte:

Definição 10 (raio de convergência). *Seja $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ uma série de potências tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

*(i) Se $L = 0$, dizemos que **o raio de convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ é infinito**, ou seja, que a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$;*

*(ii) Se $L > 0$, então dizemos que o **raio de convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$** é $R = \frac{1}{L}$. Neste caso, garante-se que a série converge (pelo menos) no intervalo aberto $]x_0 - 1/L, x_0 + 1/L[$;*

*(iii) Se $L = \infty$, dizemos que **o raio de convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ é zero**. Neste caso, a série converge apenas no conjunto $\{x_0\}$.*

Definição 11 (intervalo de convergência). *O intervalo convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ é o maior intervalo centrado em x_0 restrita ao qual a série é convergente.*

Exemplo 12. *Determinar o intervalo de convergência da série de potências dada por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Solução: Aqui temos $a_n = \dfrac{1}{n}$. Calculamos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

de modo que o raio de convergência desta série de potências é $R = 1$. Notamos que a série está centrada em $x_0 = 0$, de modo que a série converge em todo ponto do intervalo $]-1, 1[$. Falta, portanto, testar os extremos deste intervalo. Para $x = -1$, a série é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que pelo critério de Leibniz, converge. Para $x = 1$, temos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que por ser a série harmônica, diverge. Logo, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ é $[-1, 1[$.

Exemplo 13. *Determinar o intervalo de convergência da série de potências:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Solução: Neste caso, $a_n = \frac{1}{n!}$. Vamos determinar o raio de convergência calculando, primeiramente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

de onde concluímos que a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$.

Exemplo 14. *Determinar o intervalo de convergência da série de potências:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^n \cdot (x-5)^n$$

Solução: Neste caso $a_n = (-1)^n \cdot n^n$. Calculamos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \cdot n^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n^n = \infty$$

Assim, exceto quando $x = 5$, a série de potências dada é divergente. Seu intervalo de convergência, neste caso, é degenerado, consistindo apenas do conjunto $\{5\}$.

Exemplo 15. *Determinar o intervalo de convergência da série:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}}{2n}$$

Solução: Note que, na forma acima, a série não é de potências. No entanto, podemos convertê-la em uma série de potências fazendo a mudança de variável $y = x^2$. Temos, assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n} \cdot y^n$$

que é uma série de potências centrada em $y_0 = 0$. Aqui $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n}$, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2\cdot(n+1)}}{2\cdot(n+1)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{2n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2\cdot(n+1)}}{2\cdot(n+1)} \cdot \frac{2n}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{2n}} \cdot 4 \cdot 2n}{(2n+2)\cdot \cancel{2^{2n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{2n+2} = 4,$$

de modo que o raio de convergência da série (envolvendo y) é:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{4}$$

e a série converge em $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Analisemos o que ocorre nos extremos: para $y = -1/4$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot (-1)^n}{2n \cdot \cancel{2^{2n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

que diverge. Para $y = 1/4$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot 1}{2n \cdot \cancel{2^{2n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n},$$

que, pelo **Teste de Leibniz**, converge. Logo, o intervalo de convergência para a série em y é:

$$\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

Falta retornarmos à variável x. Temos:

$$y \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \iff x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Desta forma, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}}{2n}$ é $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

4 Propriedades de Funções Definidas por Séries de Potências

Nesta seção apresentaremos e demonstraremos alguns fatos sobre as séries de potências, evidenciando suas "boas" propriedades, como a continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade.

Tais propriedades dependem do seguinte resultado, que será central na demonstração de nossos teoremas:

Lema 16. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *uma série de potências cujo raio de convergência é* $R > 0$. *Então, dado* $r_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < r_0 < R$, *existe uma série numérica convergente,* $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$, *tal que se* $|x - x_0| \le r_0$, *vale:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n \cdot (x - x_0)^n| \le M_n)$$

Demonstração. Como $r_0 < R$, certamente existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que $r_0 < r_1 < R$ (basta, por exemplo, tomarmos $r_1 = \frac{r_0+R}{2}$). Uma vez que $x = x_0 + r_1 < x_0 + R$, $x_0 + r_1$ pertence ao intervalo de convergência da série de potências, e por isso tem-se que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot [(x_0 + r_1) - x_0]^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r_1^n \text{ é convergente}$$

Pelo **Critério do Termo Geral** para séries numéricas, podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot r_1^n = 0$, de modo que $(a_n \cdot r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, por ser uma sequência que tem limite, é uma sequência limitada — ou seja, existe $M > 0$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n \cdot r_1^n| \le M)$$

Agora, se $x \in \mathbb{R}$ for tal que $|x - x_0| \le r_0$, então:

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| = |a_n| \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{\le r_0}^{\,n} \le |a_n| \cdot r_0^n = \overbrace{|a_n \cdot r_1^n|}^{<M} \cdot \frac{r_0^n}{r_1^n} < M \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$

Basta tomarmos $M_n = M \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$, e $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma progressão geométrica de razão $\frac{r_0}{r_1} < 1$ (visto que $r_0 < r_1$), de modo que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$ é a série numérica cuja existência o lema afirmava. □

4.1 Continuidade de uma Função Definida por Uma Série de Potências

Teorema 17. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $R > 0$. *Então a função definida por:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

é contínua em $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Demonstração. Seja $a \in]x_0 - R, x_0 + R[$ qualquer; desejamos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Comecemos escolhendo um $r_0 > 0$ tal que $|a - x_0| < r_0$.

Pelo **Lema 16**, existe uma série numérica convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$, tal que se $|x - x_0| \leq r_0$, vale:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n \cdot (x - x_0)^n| \leq M_n)$$

e portanto, se $|x - x_0| \leq r_0$, vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (x - x_0)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

Note que uma vez que temos, em particular, $|a - x_0| \leq r_0$, também temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (a - x_0)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, vamos escrever:

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Assim, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, vale:

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - s_m(x) + s_m(x) - s_m(a) + s_m(a) - f(a)| \leq |f(x) - s_m(x)| + |s_m(x) - s_m(a)| +$$
$$+ |s_m(a) - f(a)| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \right| + |s_m(x) - s_m(a)| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (a - x_0)^n \right|$$

ou seja,

$$|f(x) - f(a)| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \right| + |s_m(x) - s_m(a)| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (a - x_0)^n \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n \cdot (x - x_0)^n| + |s_m(x) - s_m(a)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n \cdot (a - x_0)^n|$$

Fato 1: uma vez que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{3}$, existe um índice $n_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \leq m \Rightarrow \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} M_n\right| = \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

Fato 2: Afirmamos que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|x-a| < \delta_1$, então tem-se $|x-x_0| \leq r_0$. Com efeito, basta escolhermos $\delta_1 > 0$ satisfazendo $\delta_1 < r_0 - |x_0 - a|$, e teremos $|x - x_0| = |x - a + a - x_0| \leq |x-a| + |a - x_0| < r_0 - |x_0 - a| + |a - x_0| = r_0$, e *a fortiori*, $|x - x_0| \leq r_0$.

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado. Pela continuidade de s_m em a (contínua porque é uma função polinomial de grau m), dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|x-a| < \delta_2$ garante que $|s_m(x) - s_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Desta forma, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e fixando $m \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, tem-se, para $|x-a| < \delta$:

$$|f(x) - f(a)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n \cdot (x-x_0)^n| + |s_m(x) - s_m(a)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n \cdot (a-x_0)^n| <$$
$$< \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n + |s_m(x) - s_m(a)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Desta forma, como dado $\varepsilon > 0$ qualquer, é possível exibir $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ garante que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, segue que f é contínua em a, e portanto é contínua em *qualquer* ponto de $]x_0 - R, x_0 + R[$, conforme afirmávamos. □

4.2 Diferenciabilidade de uma Função Definida por Uma Série de Potências

Os próximos resultados dizem respeito à diferenciação e à integração de séries de potências.

Proposição 18. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ uma série de potências de raio de convergência $R > 0$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ também tem raio de convergência igual a R.*

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < R$, escolhemos $r_0 > 0$ tal que $|x - x_0| < r_0 < R$. Pelo **Lema 16**, existe uma série geométrica da forma $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n$, em que $0 < q < 1$, tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n \cdot (x-x_0)^n| \leq M \cdot q^n)$$

Agora,

$$|n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}| = \frac{n}{|x-x_0|} \cdot |a_n \cdot (x-x_0)^n| \leq \frac{M \cdot q^n}{|x-x_0|}$$

Observamos, agora, que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{M \cdot q^n}^{=a_n}}{|x - x_0|}$ converge, pois pelo **Teste da Razão**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{M\cdot(n+1)\cdot q^{n+1}}{|x-x_0|}\right|}{\left|\frac{M\cdot n\cdot q^n}{|x-x_0|}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot q = q < 1$$

Concluímos daí e do **Critério da Comparação** que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < R$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ converge absolutamente, e portanto converge. Assim, para todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ converge. $\square$

Uma vez demonstrada a **Proposicção 18**, é natural supormos que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$; não obstante, nós ainda nem sequer sabemos se f é derivável ou não!

Os próximos dois teoremas estabelecem definitivamente a diferenciabilidade de uma série de potências:

Teorema 19. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ uma série de potências de raio de convergência $R > 0$, e definamos:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

Seja $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Então:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} a_n \cdot (t - x_0)^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot (x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Demonstração. Considere $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < R$, e observe que:

$$\int_{x_0}^{x} a_n \cdot (t - x_0)^n dt = \frac{a_n \cdot (x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Podemos escrever:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - x_0)^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (t - x_0)^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (t - x_0)^n$$

e portanto:

$$f(t) - \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (t - x_0)^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (t - x_0)^n$$

e para $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| \leq r_0 < R$, temos também $|t - x_0| \leq r_0$. Desta forma,

$$\left|f(t) - \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (t - x_0)^n\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (t - x_0)^n\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot r_0^n \tag{2}$$

Como $r_0 < R$, esta última série converge absolutamente, de onde concluímos que:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot |r_0^n|\right) = 0$$

isto é, a cauda tende a zero. Desta forma,

$$\left|F(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n \cdot (x - x_0)^{n+1}}{n+1}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \sum_{n=0}^{m} \int_{x_0}^{x} a_n \cdot (t - x_0)^n dt\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x}\left(f(t) - \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (t - x_0)^n\right) dt\right| \leq \int_{x_0}^{x}\left|f(t) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - x_0)^n\right| dt \overset{(2)}{=}$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot (t - x_0)^n\right| dt \leq \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot |t - x_0|^n\right) dt \leq$$

$$\overset{|t-x_0|\leq r_0}{\leq} \left|\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot r_0^n\right) dt\right| = |x - x_0| \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot r_0^n$$

Assim, tem-se, para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < R$:

$$\left|F(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n \cdot (x - x_0)^{n+1}}{n+1}\right| \leq |x - x_0| \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot r_0^n$$

e passando os dois membros da desigualdade acima ao limite conforme $m \to \infty$, obtemos:

$$\lim_{m\to\infty}\left|F(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n \cdot (x - x_0)^{n+1}}{n+1}\right| \leq |x - x_0| \cdot \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot r_0^n = 0$$

de modo que para todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, tem-se:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot (x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

que é o que queríamos demonstrar. □

Teorema 20. *Se a série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot (x - x_0)^n \tag{3}$$

obtida da série dada por integração termo a termo, tem o mesmo raio de convergência, $R > 0$.

Demonstração. Note que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1} \text{ converge} \iff (x-x_0) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-x_0)^n \text{ converge}$$

Para concluirmos nossa tese, basta observarmos, como na demonstração do lema anterior, que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}^{=1} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

□

Teorema 21. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ uma série de potências de raio de convergência $R > 0$. Definindo:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \end{array}$$

tem-se que f é diferenciável em $]x_0 - R, x_0 + R[$, e vale, para todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}$$

Demonstração. Já vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ converge sempre que $|x - x_0| < R$. Definamos, então:

$$\begin{array}{rccc} g: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1} \end{array}$$

que é, evidentemente, uma função contínua em razão do **Teorema 17**. Vale, também:

$$\int_{x_0}^{x} g(t)dt \overset{\textbf{Teo 21}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{a_n \cdot (x-x_0)^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \overset{\text{def.}}{=} f(x) - a_0$$

Logo,

$$f(x) = a_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

e como g é contínua, temos que f é diferenciável e $f'(x) = g(x)$, conforme afirmamos. □

Teorema 22. *Se a série de potências* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$, *então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot (x - x_0)^n \tag{4}$$

obtida da série dada por derivação termo a termo, tem o mesmo raio de convergência, $R > 0$.

Demonstração. De fato, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} \text{ converge} \iff (x - x_0) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} \text{ converge}$$

O raio de convergência desta última série, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^n$, é o recíproco do número:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \overbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}^{=1} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

de modo que o raio de convergência da nova série é:

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

$\square$

Proposição 23. *Sejam* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $R > 0$ *e* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervalos tais que* $J \subseteq]-R, R[$. *Definindo:*

$$\begin{array}{rccc} f: & J \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \end{array}$$

se $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *for uma função tal que:*

$$(\forall x \in I)(u(x) \in J)$$

então:

$$\sum a_n \cdot u(x)^n$$

converge (pontualmente) para $f \circ u : I \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Por definição:

$$f \circ u(x) = f(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u(x)^n.$$

Para qualquer $x \in I$ fixado, como $u(x) \in J \subseteq]-R, R[$, segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u(x)^n$ converge para o valor $f(u(x))$. $\square$

Vejamos algumas aplicações importantes da proposição acima, obtendo novas séries de potências a partir de séries já conhecidas.
Sabemos que a soma da série geométrica de razão t com $|t| < 1$, é:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots + t^n + \cdots \tag{5}$$

Substituindo t por $-x$ (ou seja, tomando $u :]-1,1[\to \mathbb{R}, t \mapsto -x$ na **Proposição 23**) em (5), obtemos:

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + \cdots$$

Se substituirmos x por $-x^2$ (ou seja, tomando $u :]-1,1[\to]-1,0[\subset \mathbb{R}, t \mapsto -x^2$ na **Proposição 23**) em (5), obteremos, por sua vez:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \cdots$$

Exemplo 24. *Sabemos que para todo $t \in]-1,1[$ temos:*

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + \cdots + t^n + \cdots$$

*Aplicando o **Teorema 19**, podemos integrar os dois membros da igualdade acima em qualquer intervalo da forma $[0,x] \subset]-1,1[$, ou seja, com $-1 < x < 1$, e obtemos:*

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \int_0^x 1dt + t + \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^3 dt + \int_0^x t^4 dt + \int_0^x t^5 dt + \cdots + \int_0^x t^n dt + \cdots$$

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Exemplo 25. *Sabemos que para todo $t \in]-1,1[$ temos:*

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$$

*Aplicando o **Teorema 19**, podemos integrar os dois membros da igualdade acima em qualquer intervalo da forma $[0,x] \subset]-1,1[$, ou seja, com $-1 < x < 1$, e obtemos:*

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x 1dt - t + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \int_0^x t^4 dt - \int_0^x t^5 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Exemplo 26. *Sabemos que para qualquer $t \in]-1,1[$, podemos escrever:*

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n \cdot t^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}$$

*e portanto, para qualquer $\theta \in [0,1[$, podemos aplicar o **Teorema 19** ao intervalo $[0,\theta] \subset]-1,1[$, obtendo:*

$$\int_0^\theta \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^\theta 1 dx - \int_0^\theta x^2 dx + \int_0^\theta x^4 dx - \int_0^\theta x^6 dx + \int_0^\theta x^8 dx - \int_0^\theta x^{10} dx - \cdots$$

$$\arctan(\theta) - \arctan(0) = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\arctan(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Exemplo 27. *Podemos utilizar o **Teorema 23** para obter séries como, por exemplo, o desenvolvimento de $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno de $x_0 = 3$. Temos:*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x - 3 + 3} = \frac{1}{(x-3)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-3}{3}\right) + 1}$$

Assim,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-3)^n}{3^{n+1}}$$

Agora, para determinar o raio de convergência da série, calculamos o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3}} = \frac{1}{3} > 0$$

e assim, o raio de convergência será:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Isto significa que, para todo $x \in]3-3, 3+3[=]0,6[$, vale a igualdade:

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-3)^n}{3^{n+1}}$$

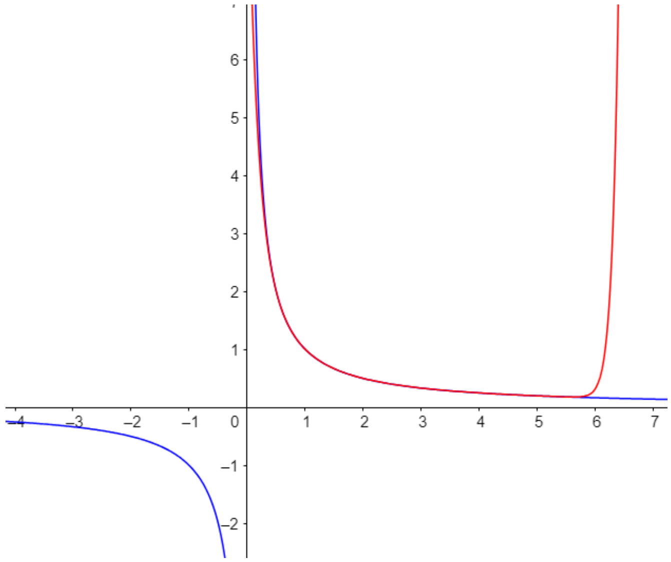


Figura 1: Na figura acima temos, em azul, o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ e, em vermelho, o gráfico da soma dos trinta primeiros termos da série obtida neste exemplo. Interaja com o *applet* em https://www.geogebra.org/classic/pbr92dtv

Observação 28. *Note que, similarmente, podemos obter o desenvolvimento de $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno de $x_0 = 2$ para obter:*

$$(\forall x \in]0,4[) \left(\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-2)^n}{2^{n+1}} \right)$$

A seguir veremos resultados que nos permitem, sob certas condições, calcular o valor de uma série de potências de raio de convergência R no extremo direito de seu intervalo.

Exemplo 29. *Usando o exemplo acima e o* ***Teorema da Estimativa*** *(**Teorema 56** da* AGENDA 2*), obter uma aproximação para* $\ln(2)$ *com erro inferior a* 10^{-1}*.*

Solução: Pelo **Teorema da Estimativa**, temos:

$$\left| \ln(2) - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{j} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Queremos erro inferior a $\frac{1}{10}$. Comparando:

$$\frac{1}{n+1} \text{ com } \frac{1}{10}$$

notamos que basta tomarmos $n = 9$. Assim,

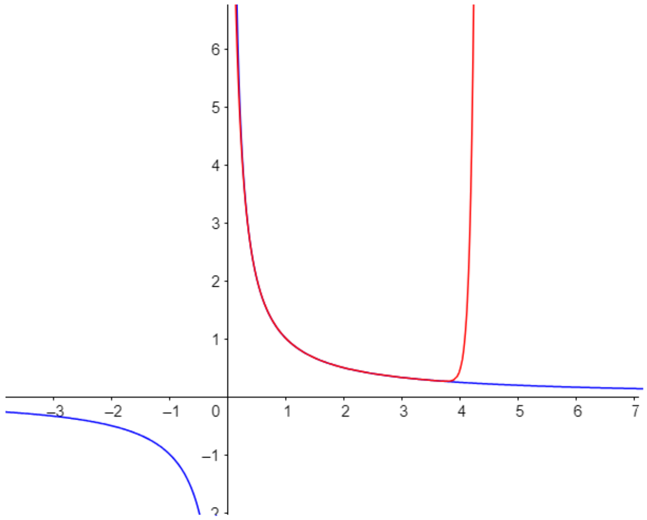


Figura 2: Na figura acima temos, em azul, o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ e, em vermelho, o gráfico da soma dos trinta primeiros termos da série obtida neste exemplo. Observe que o gráfico *desta* série de potências difere do da série anterior (conforme sugere o intervalo de convergência). Interaja com o *applet* em https://www.geogebra.org/classic/pbr92dtv

$$\sum_{j=1}^{9}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{1879}{2520} = 0.74563492063$$

será uma aproximação de $\ln(2)$ com erro inferior a $1/10$. O valor que encontramos na calculadora é 0.69314718056, e de fato tem-se:

$$0.74563492063 - 0.69314718056 = 0.05248774007 < 0.1$$

Observação 30. *Notamos, no exemplo anterior, que a convergência se dá de modo bastante lento: para obtermos uma aproximação de $ln(2)$ com erro inferior a $1/100$, será necessário computarmos a soma dos 99 primeiros termos da série, e assim por diante. Temos:*

$$\sum_{j=1}^{99}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 0.69817\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{999}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 0.69364\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{9999}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 0.69319\cdots$$

Corolário 31. *Se a série de potências* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$*, com raio de convergência igual a* R *converge em* $x = x_0 + R$*, então ela converge uniformemente em* $[x_0, x_0 + R]$*, de modo que:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [x_0, x_0 + R] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

é uma função contínua neste intervalo. Em particular, tem-se:

$$\lim_{x \to x_0 + R_-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$$

Demonstração. Similar à do **Teorema de Abel**, trocando-se $(x - x_0)$ por $R \cdot (x - x_0)$. □

Teorema 32 (unicidade de séries de potências). *Se uma função* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *admite um desenvolvimento em série de potências em um ponto* $x_0 \in I$*, este desenvolvimento é único.*

Demonstração. Suponhamos que f tenha dois desenvolvimentos em série de potências numa vizinhança de $x_0 \in I$, $|x - x_0| < R$:

$$x \in]x_0 - R, x_0 + R[\Rightarrow f(x) = \sum a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum b_n \cdot (x - x_0)^n$$

Estas séries podem ser derivadas repetidamente, termo a termo em $]x_0 - R, x_0 + R[$, donde seguirá que $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = b_n)$. □

O teorema acima nos diz que, se uma função tem série de potências em torno de um ponto x_0, não importa que método empregamos para obtê-la, já que esta série é única. Muitas séries serão obtidas a partir das "séries de Taylor", como veremos posteriormente.

Os resultados vistos acima nos mostram que as funções definidas por séries de potências têm propriedades muito boas: por exemplo, são infinitamente deriváveis (se f é definida por uma série de potências e f é derivável, então f' também é definida por uma série de potências) e assim por diante.

Assim como pudemos derivar e integrar séries de potências, podemos operá-las, como segue:

Proposição 33 (soma/subtração de séries de potências e produto por escalar). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$, $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ os raios de convergência das séries de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ e $\sum b_n \cdot (x - x_0)^n$, respectivamente. Se definirmos as funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R_1, x_0 + R_1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: &]x_0 - R_2, x_0 + R_2[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

então a série de potências dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot (x - x_0)^n$$

converge para a função

$$\begin{array}{rccc} f \pm g: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \pm g(x) \end{array}$$

onde $R = \min\{R_1, R_2\}$. Também, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, então a série $\sum_{n=k}^{\infty} \alpha \cdot (x - x_0)^k \cdot a_{n-k} \cdot (x - x_0)^n$ converge para $\alpha \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_0)^k$ em $]x_0 - R_1, x_0 + R_1[$.

Demonstração. Temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k \pm \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot (x - x_0)^k =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot (x - x_0)^k \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \cdot (x - x_0)^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot (x - x_0)^n$$

Quanto à segunda parte, fazendo $m = n + k$, temos $n = m - k$, de modo que quando $n = 0$ tem-se $m = k$. Naturalmente $\lim_{n \to \infty} m = \infty$, e portanto:

$$\alpha \cdot (x - x_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{m=k}^{\infty} \alpha \cdot a_{m-k} \cdot (x - x_0)^m$$

Trocando m por n, segue que:

$$\alpha \cdot (x - x_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha \cdot a_{n-k} \cdot (x - x_0)^n$$

$\square$

Exemplo 34. *Exibir a série de potências da função dada por:*

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

e determinar seu raio de convergência.

Solução: Vimos que:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 - \cdots$$

e que ambas têm raio de convergência igual a 1. Pela **Proposição 33**, temos:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \cdots\right) - \\ - \left(-x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 - \cdots\right) = \\ = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{7} \cdot x^7 + \cdots\right)\end{aligned}$$

e o raio de convergência desta série também é 1.

Observação 35. *Podemos obter, a partir do exemplo anterior, uma fórmula recursiva bastante cômoda para calcular* $\ln(n)$ *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$. *Fazendo:*

$$x = \frac{1}{2n+1} \text{ ou seja, } \frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$$

Note que para qualquer $n > 0$, $|x| = \left|\frac{n+1}{n}\right| < 1$, *de modo que podemos escrever:*

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3 \cdot (2n+1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2n+1)^5} + \frac{1}{7 \cdot (2n+1)^7} + \cdots\right)$$

$$\ln(n+1) = \ln(n) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3 \cdot (2n+1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2n+1)^5} + \frac{1}{7 \cdot (2n+1)^7} + \cdots\right)$$

Para obtermos, por exemplo, $\ln(3)$, *basta tomarmos* $n = 2$ *e teremos:*

$$\ln(3) = \ln(2) + 2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \cdots \right)$$

Apresentamos a seguinte:

Definição 36 (função analítica). *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, x_0 *um ponto de acumulação de* X *e* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $\mathscr{C}^\infty$. *Dizemos que* f *é* ***analítica em*** $x_0 \in \operatorname{int}.(X)$ *se existir* $\delta > 0$ *tal que, no intervalo* $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, f *é igual a uma série de potências. Se* f *é analítica em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que* f ***é analítica em*** X.

Na próxima seção veremos como representar diversas funções de classe $\mathscr{C}^\infty$ como séries de potências.

5 Expansão de Funções em Séries de Potências

Nesta seção vamos responder ao segundo questionamento sobre funções representáveis por meio de séries de potências. Isto é importante porque séries de potências nos dão aproximações *calculáveis* de uma função — por exemplo, não há método de cálculo razoável para o cálculo da função arco-tangente, mas usando a série $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots$ obtemos uma bom valor aproximado.

Na seção anterior conseguimos representar algumas funções em séries de potências, com base essencialmente no conhecimento da soma de uma série geométrica através do uso de certas manipulações algébricas do importante resultado a respeito da derivação e integração termo a termo de uma série de potências. é natural, então, procurarmos saber mais quais funções podem ser representadas assim e como obter a representação.

Começamos observando que se, em seu intervalo de convergência, tivermos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

então:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

e:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

e assim por diante. Avaliando cada uma das igualdades acima em x_0, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 \\ f'(x_0) &= a_1 \\ f''(x_0) &= 2 \cdot a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= n! \cdot a_n \end{aligned}$$

de modo que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$, então:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Definição 37 (série de Taylor). *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^{\infty}(I, \mathbb{R})$ e $x_0 \in I$. A **série de Taylor de f em torno de** x_0 é:*

$$T_{x_0}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

*Se $x_0 = 0$, a série é chamada **série de MacLaurin** da função.*

Do exposto acima, concluímos que, pelo **Teorema 32**, se uma função tem desenvolvimento em série de potências em torno de um ponto x_0, esta série é necessariamente sua série de Taylor.

Vamos calcular algumas séries de Taylor.

Exemplo 38. *Expandir a função $f(x) = e^x$ em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ e apresentar seu intervalo de convergência.*

Solução: Neste caso, temos:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(f^{(n)}(x) = e^x)$$

de modo que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Assim, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x - 0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para determinar o raio de convergência da série acima, calculamos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

e concluímos que a série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 39. *Expandir a função $f(x)=\sin(x)$ em série de Taylor em torno de $x_0=0$.*

Solução: Observamos que:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \sin(x)\\ f^{(2)}(x) &= -\sin(x)\\ f^{(4)}(x) &= \sin(x)\\ f^{(6)}(x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

de modo que:

$$f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cdot\sin(x)$$

Também notamos que:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \cos(x)\\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x)\\ f^{(5)}(x) &= \cos(x)\\ f^{(7)}(x) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

de modo que:

$$f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cdot\cos(x)$$

Segue, então, que:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}0, \text{ se } n=2k\\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \text{ se } n=2k+1\end{cases}$$

Portanto, a série de Taylor de $f(x)=\sin(x)$ em torno de $x_0=0$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Para determinar o raio de convergência desta série não podemos considerar a razão $|a_{n+1}|/|a_n|$, uma vez que sempre que n for par, teremos $a_n = 0$. No entanto, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (x^{\frac{2k+1}{k}})^k y = x^{\frac{2k+1}{k}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot y^k$$

Neste caso, temos $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot(n+1)+1)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n+1)!}} = 0$$

e portanto o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot y^k$ é infinito, ou seja, seu intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. Consequentemente, o intervalo de convergência da série original, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$, também é $\mathbb{R}$.

Exemplo 40. *Expandir a função $f(x) = \cos(x)$ em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$.*

Solução: Observamos que:

$$f^{(0)}(x) = \cos(x)$$
$$f^{(2)}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$
$$f^{(6)}(x) = -\cos(x)$$

de modo que:

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot \cos(x)$$

Também notamos que:

$$f^{(1)}(x) = -\sin(x)$$
$$f^{(3)}(x) = \sin(x)$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin(x)$$
$$f^{(7)}(x) = \sin(x)$$

de modo que:

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \sin(x)$$

Segue, então, que:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 2k+1 \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}, \text{ se } n = 2k \end{cases}$$

Portanto, a série de Taylor de $f(x) = (x)$ em torno de $x_0 = 0$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Para determinar o raio de convergência desta série não podemos considerar a razão $|a_{n+1}|/|a_n|$, uma vez que sempre que n for ímpar, teremos $a_n = 0$. No entanto, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (x^2)^k y = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot y^k$$

Neste caso, temos $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot(n+1))!}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2\cdot(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n)}!}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot\cancel{(2n)}!} = 0$$

e portanto o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot y^k$ é infinito, ou seja, seu intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. Consequentemente, o intervalo de convergência da série original, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$, também é $\mathbb{R}$.

Exemplo 41. *Expandir a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (1+x)^\alpha \end{array}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, em série de Taylor e determinar seu raio de convergência.

Solução: Temos:

$$f^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha$$

$$f^{(1)}(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$$
$$f^{(2)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2}$$
$$f^{(3)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (1+x)^{\alpha-3}$$

de onde podemos inferir que:

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1)) \cdot (1+x)^{\alpha-n}$$

e portanto:

$$f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))$$

e:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$$

Logo, a série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!} \cdot x^n$$

Se denotarmos:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$$

obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

que generaliza a fórmula binomial, denominada **série binomial**.

Vamos determinar agora o raio de convergência desta série. Tem-se:

$$a_n = \binom{\alpha}{n}$$

Observe que:

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1)) \cdot (\alpha-n)}{(n+1) \cdot n!} = \binom{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-n}{n+1}$$

de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-n}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1,$$

de modo que o raio de convergência desta série é 1.

Exemplo 42. *Usar a série binomial para calcular* $\sqrt{630}$ *aproximadamente.*

Solução: O quadrado perfeito mais próximo de 630 é 625. Escrevemos, então:

$$\sqrt{630} = \sqrt{625+5} = \sqrt{25^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{125}\right)} = 25 \cdot \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}$ na série binomial, obtemos:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3 - \frac{5}{128} \cdot x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot x^n$$

Em nosso caso, $x = \dfrac{1}{125} = 0.008$, de modo que:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (0.008)^n = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (0.008) + \frac{1}{16} \cdot (0.008)^3 - \frac{5}{128} \cdot (0.008)^4 - \frac{7}{256} \cdot (0.008)^5 + \cdots = \\ &= 1 + 0.004 - 0.000008 + 0.000000032 - 0.000000000000896 \cdots\end{aligned}$$

e portanto, usando os 3 primeiros termos da série binomial, obtemos:

$$\sqrt{630} = 25 \cdot \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 25 + 0.1 - 0.0002 = 25.0998$$

Pelo **Teorema da Estimativa**, o erro cometido será menor que:

$$\left|\sum_{n=0}^{2} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (0.008)^n - \sqrt{630}\right| < \frac{1}{16} \cdot (0.008)^3 = 0.000008$$

Exemplo 43. *Determinar a série de MacLaurin de* $f(x) = \sin(x) + \sin(3x)$.

Solução: Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \frac{t^{11}}{11!} + \cdots$$

Podemos aplicar a **Proposição 23**, substituindo t por $3x$ para obter:

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} (3x)^{2n+1} = \\ = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \frac{(3x)^9}{9!} - \frac{(3x)^{11}}{11!} + \cdots = \\ = 3x - \frac{3^3}{3!}x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5 - \frac{3^7}{7!}x^7 + \frac{3^9}{9!}x^9 - \frac{3^{11}}{11!}x^{11} + \cdots\end{aligned}$$

Pela **Proposição 33**, tem-se:

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \\ = 4x - \frac{1+3^3}{3!}x^3 + \frac{1+3^5}{5!}x^5 - \frac{1+3^7}{7!}x^7 + \frac{1+3^9}{9!}x^9 + \cdots\end{aligned}$$

Exemplo 44. *Determinar a série de MacLaurin de* $f(x) = x^3 \cdot e^x$.

Solução: Temos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

de modo que pela segunda parte da **Proposição 33**, vale:

$$x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^3 \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^{n+3} = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-3)!} x^m$$

Desta forma, podemos escrever:

$$x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = x^3 + x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots$$

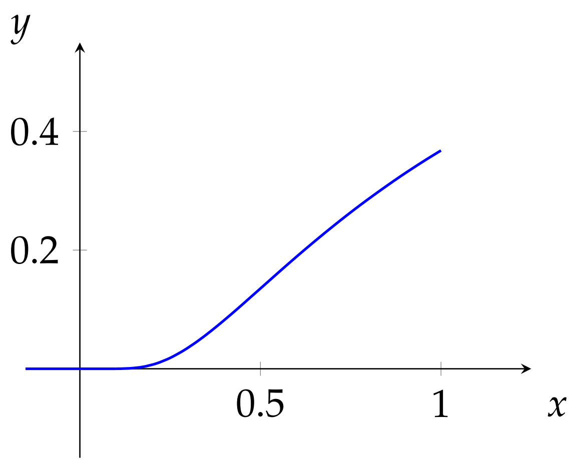
Até aqui vimos exemplos de séries de Taylor que aproximam a função em torno de um certo ponto. Nem sempre este é o caso, como veremos a seguir.

Exemplo 45. *Expandir a função:*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, \ se \ x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, \ se \ x > 0 \end{cases} \end{array}$$

em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$.

Solução: Apresentamos, abaixo, o gráfico da função:



Pode-se demonstrar que:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

onde $p_n(y)$ é um polinômio na indeterminada y. Por exemplo, no caso da derivada primeira, verifica-se que $p_1(y) = y^2$. Para determinar o valor da derivada na origem, é necessário calcular suas derivadas laterais. A $n-$ésima derivada lateral à esquerda de f é:

$$f_-^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0_-} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0_-} 0 = 0$$

A $n-$ésima derivada lateral à direita em 0, por sua vez, é:

$$f_+^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0_+} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0_+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to \infty} e^{-y} \cdot p_n(y) = \lim_{y \to \infty} \frac{p_n(y)}{e^y} = 0$$

Desta forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $f^{(n)}(0) = 0$, e a série de Taylor de f em torno de 0 é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$$

Resta claro que a função f é diferente de sua série de Taylor em qualquer intervalo centrado em $x_0 = 0$.

Vimos, acima, um exemplo de função de classe $\mathscr{C}^\infty$ que não é analítica no ponto 0.

5.1 Aplicação da Série de Taylor ao Cálculo de Derivadas

Se $n, k \in \mathbb{N}$, então a $k-$ésima derivada de x^n é 0 em $x = 0$, exceto se $n = k$, caso em que a derivada é $k!$:

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n)\bigg|_{x=0} = \begin{cases} 0, \text{ para } k \neq n \\ k!, \text{ para } k = n \end{cases} \tag{6}$$

Por exemplo, se $n = 3$, então x^3 e suas duas primeiras derivadas, $(x^3)' = 3x^2$ e $(x^3)'' = 6x$ se anulam em $x = 0$, enquanto que $(x^3)^{(3)} = 6 = 3!$ e todas as derivadas de ordem mais alta são zero para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, se a série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \tag{7}$$

tiver um raio de convergência não-nulo, então:

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left[\frac{d^k}{dx^k}(x^n)\right]_{x=0} = a_k \cdot k! \tag{8}$$

Assim, se conhecemos a série de MacLaurin de uma função, podemos facilmente calcular suas derivadas em $x = 0$.

Exemplo 46. *Vimos que para todo $\theta \in]-1, 1[$, temos:*

$$\arctan(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \theta^{2n+1} \tag{9}$$

Usar esta série para calcular $\dfrac{d^9}{d\theta^9}(\arctan(\theta))\bigg|_{\theta=0}$.

Solução: A fórmula (8) mostra que $f^{(9)}(0) = 9! \cdot a_9$, onde a_9 é o coeficiente de θ^9 na série de potências de f. Obtemos a potência θ^9 na série (9) fazendo $n = 4$. Desta forma, $a_9 = \dfrac{(-1)^4}{2 \cdot 4 + 1} = \dfrac{1}{9}$ e:

$$\frac{d^{(9)}}{d\theta^9}(\arctan(\theta))\bigg|_{\theta=0} = \frac{1}{9} \cdot 9! = 8!$$

6 Multiplicação, Divisão e Composição de Séries de Potências

Grande parte da utilidade das séries de potências está no fato de que, nos intervalos de convergência, elas podem ser adicionadas, multiplicadas, divididas, compostas, derivadas e integradas, realizando-se as operações “como se fossem polinômios” (somas finitas) em vez de séries infinitas. Nesta seção, descreveremos resultados-chave relativos a essas operações com séries de potências.

Consideremos o problema de multiplicar duas séries de potências:

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots \quad \text{e} \quad b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots \tag{10}$$

Aplicando o procedimento formal algébrico, como se as séries fossem polinômios, o resultado seria a nova série de potências:

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot x + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \cdot x^2 + \cdots = \\ & \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i} \right) \cdot x^n \end{aligned} \tag{11}$$

A justificativa do porquê de multiplicarmos séries de potências como fizemos em (11) está no seguinte:

Teorema 47. *Se $A = \sum a_n$ e $B = \sum b_n$ são duas séries absolutamente convergentes, então a chamada série produto, $\sum c_n$, onde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$, também é absolutamente convergente e, além disso:*

$$A \cdot B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0)$$

Demonstração. Sejam A_n e B_n as $n-$ésimas somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente, ou seja:

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$

e seja C_n a $n-$ésima soma parcial de $\sum c_n$. Analigamente, sejam A'_n e B'_n as $n-$ésimas somas parciais reduzidas de $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n|$, respectivamente, e seja C'_n a $n-$ésima soma parcial de $\sum c'_n$, onde $c'_n = |a_0| \cdot |b_n| + |a_1| \cdot |b_{n-1}| + \cdots + |a_n| \cdot |b_0|$. Para cada índice $n \in \mathbb{N}$ dado, seja m o maior inteiro menor do que $n/2$, ou seja, $m \leq n/2 < m + 1$.

é fácil ver que o produto $A'_n \cdot B'_n$ contém todos os termos $|a_i| \cdot |b_j|$ que aparecem em C'_n; e todos os termos do produto $A'_m \cdot B'_m$ aparecem em C'_n. Portanto, tem-se:

$$A'_m \cdot B'_m \leq C'_n \leq A'_n \cdot B'_n$$

Como $\lim_{m\to\infty} n = \infty$, segue do **Teorema do Confronto** que $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $A' \cdot B'$.

Observe que $(\forall n \in \mathbb{N})(|c_n| \leq c'_n)$, de modo que a série produto, $\sum c_n$, é absolutamente convergente. Seja C o valor para o qual a série $\sum c_n$ converge. Resta provarmos que $C = A \cdot B$. Para isto, observe que cada termo da diferença $A'_n \cdot B'_n - C'_n$ é o módulo do termo correspondente à diferença $A_n \cdot B_n - C_n$, portanto:

$$0 \leq |A_n \cdot B_n - C_n| \leq |A'_n \cdot B'_n - C'_n|$$

Como $\lim_{n\to\infty} |A'_n \cdot B'_n - C'_n| = 0$, segue do **Teorema do Confronto** que $\lim_{n\to\infty} |A_n \cdot B_n - C_n| = 0$, ou seja, $A \cdot B = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = C$.

□

Conforme mencionamos anteriormente, o **Teorema 47** justifica o produto de série de potências dado em (47), pressupondo, evidentemente, que as séries $\sum a_n \cdot x^n$ e $\sum b_n \cdot x^n$ tenham raios de convergência positivos. A série do produto converge pelo menos no domínio $|x| < R$, sendo R o menor dos raios de convergência dessas séries.

Teorema 48 (produto de séries de potências). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$, $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ os raios de convergência das séries de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ e $\sum b_n \cdot (x - x_0)^n$, respectivamente. Se definirmos as funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R_1, x_0 + R_1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: &]x_0 - R_2, x_0 + R_2[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

então a série de potências dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j} \right) \cdot (x - x_0)^n$$

converge para a função

$$\begin{array}{rccc} f \cdot g: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

onde $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Exemplo 49. *Dar os termos até grau 5 da série de MacLaurin de* $\sin(x) \cdot \cos(x)$.

Solução: Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \cdots = x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \cdots = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{720} \cdot x^6 + \cdots$$

de modo que:

$$\sin(x)\cdot\cos(x) = \left(x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 - \frac{1}{7!}\cdot x^7 + \cdots\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \frac{1}{6!}\cdot x^6 + \cdots\right) =$$

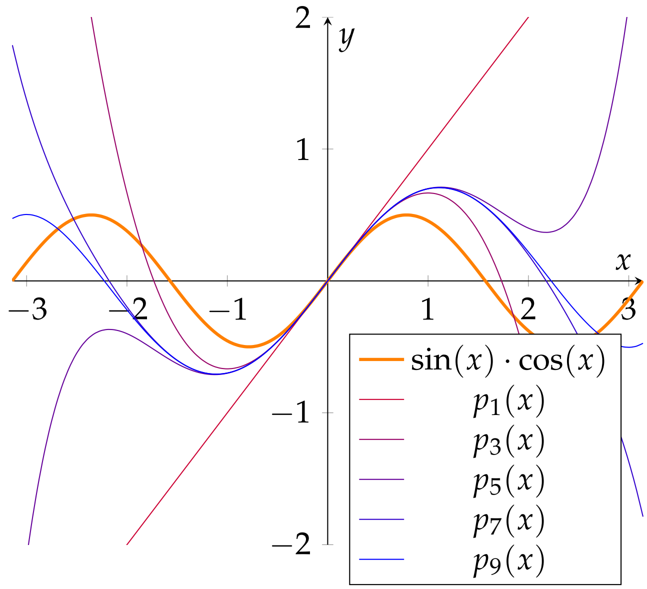
$$= x\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \cdots\right) - \frac{1}{6}\cdot x^3\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \cdots\right) +$$

$$+ \frac{1}{120}\cdot x^5\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \cdots\right) - \cdots =$$

$$= x - \frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot x^5 - \cdots - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{12}\cdot x^5 - \cdots + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \cdots =$$

$$= x - \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{15}\cdot x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Uma vez que as duas séries convergem para todo $x \in \mathbb{R}$, o intervalo de convergência da série acima é $\mathbb{R}$.

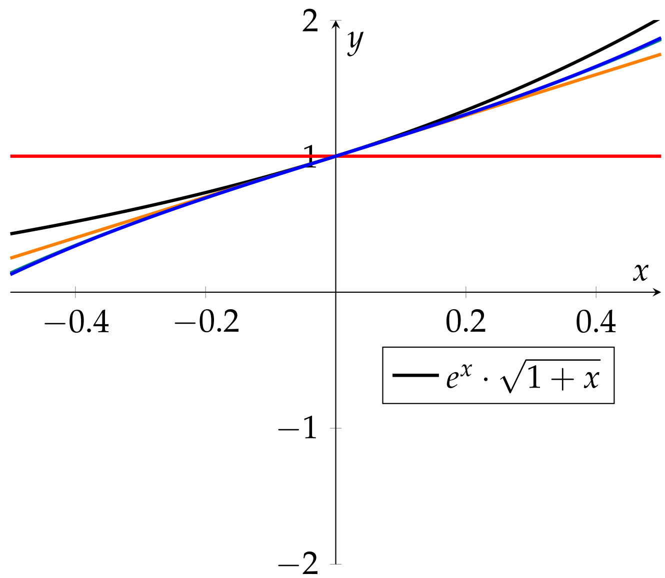


Exemplo 50. *Obter o desenvolvimento do produto $e^x\cdot\sqrt{1+x}$ em série de potências de x em torno de* 0.

Solução: Temos:

$$e^x\cdot\sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\cdot\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots\right) =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot x + \frac{7}{8}\cdot x^3 + \frac{17}{48}\cdot x^5 + \cdots$$



Como se vê no exemplo acima, não é fácil obter uma forma geral simples para o termo genérico deste desenvolvimento, é importante observar, todavia, que é sempre possível calcular os primeiros coeficientes da série, o que muitas vezes é suficiente para as aplicações.

Com o **Teorema 47**, podemos obter a série de potências de uma função $1/f$ conhecendo a série de potências de f. Assim, colocando $1/f = q = \sum a_n \cdot x^n$, determinamos os coeficientes q_n a partir da relação $f \cdot q = 1$. Devemos ter $a_0 \cdot q_0 = 1$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_0 \cdot q_n + a_1 \cdot q_{n-1} + \cdots + a_n \cdot q_0 = 0$$

Daqui obtemos todos os coeficientes q_n:

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{1}{a_0} \\ a_0 \cdot q_1 + a_1 \cdot q_0 = 0 \Rightarrow q_1 = -\dfrac{a_1 \cdot q_0}{a_0} \\ a_0 \cdot q_2 + a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_0 = 0 \Rightarrow q_2 = -\dfrac{a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_0}{a_0} \end{cases}$$

e assim por diante.

Exemplo 51. *Obter a série de potências de*

Um procedimento análogo a esse permite obter o desenvolvimento, em potências de x, de um quociente do tipo f/g (desde que, evidentemente, $g(0) = b_0 \neq 0$):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \cdots}{b_0 + b_1 \cdot x + \cdots} = \frac{a_0}{b_0} + \cdots$$

Exemplo 52. *Dar os termos até grau 6 da série de MacLaurin de $f(x) = \sec(x)$. Determinar, ainda o raio de convergência.*

Solução: Temos $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, e sabendo que:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

podemos escrever $\cos(x) = 1 - z$, onde:

$$z = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

de modo que:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

para valores de z com $|z| < 1$. Temos:

$$z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \text{ termos de grau mais alto}$$

$$z^3 = \frac{x^6}{8} + \text{ termos de grau mais alto}$$

O cálculo acima mostra que $\sec(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot x^2 + \dfrac{5}{24} \cdot x^4 + \dfrac{61}{720} \cdot x^6 + \cdots$

O raio de convergência desta série de potências é 1.

7 Funções Definidas por Séries

Até agora só temos obtido desenvolvimentos em séries de potências de funções conhecidas, ou então, dada uma série de potências, temos procurado identificá-la com o desenvolvimento de alguma função já conhecida anteriormente.

Mas a importância das séries de potência não reside apenas nisso. Elas são usadas para definir funções novas, do mesmo modo que a integral é assim utilizada. De fato, podemos imaginar uma série de potências qualquer, como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2 + 4n + 1}$$

Pelo **Teste da Razão**, é fácil ver que essa série converge quando $|x| < 1$; logo, ela define uma função f com domínio $]-1,1[$. Uma função dada dessa maneira só muito raramente poderá ser identificada com funções já conhecidas. Um importante exemplo de função oriundo da Física dada por uma série é a função de Bessel de ordem zero, dada por:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{4^n \cdot (n!)^2}$$

Em geral, uma série define uma função totalmente nova. E essa possibilidade de criar novas funções através das séries de potências é extremamente importante para as aplicações. Para resolver equações diferenciais, por exemplo, as séries de potências são um recurso muito poderoso e, frequentemente, nos conduzem à construção de novas funções, que não podem ser expressas em termos de funções já conhecidas mas que, no entanto, devem ser estudadas pela sua grande importância prática.

As séries de potências são também usadas para definir as funções que já nos são familiares, como a exponencial, o seno e o cosseno. Estas três funções, por exemplo, costumam ser definidas por suas séries de potências. Esse procedimento é preferível em Análise Matemática, pois evita, então, a necessidade de utilizar conceitos geométricos na definição dessas funções.

As funções que admitem desenvolvimentos em séries de potência formam uma classe importante, a das chamadas **funções analíticas**. Assim, são analíticas as funções trigonométricas, a função exponencial, o logaritmo e as demais funções que já nos são familiares e que admitem um desenvolvimento em série de potências.

Referências

[1] Ávila, G., **Cálculo das Funções de Uma Variável**, volume 2, 7ª edição, Edgard Blücher, 1999.

[2] Ávila, G., **Introdução à Análise Matemática**, Edgard Blücher, 1999.

[3] Boulos, P.; Abud, Z. I., **Cálculo Diferencial e Integral**, Volume 2, Makron Books, São Paulo, 2000.

[4] Figueiredo, D. G., **Análise I**, 2ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[5] Flemming, D. M., Gonçalves, M. B. **Cálculo A** – Funções, limite, derivação e integração, 6ª edição revista e ampliada. Editora Pearson. São Paulo, 2006.

[6] Gouvêa, F. Q., **Séries Infinitas**, Notas de aula. São Paulo, 1982.

[7] Granville, W. A., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Editora Científica. Rio de Janeiro, 1961.

[8] Hyslop, J. M., **Infinite Series**, 5th edition, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1970.

[9] Lima, E.L., **Curso de Análise**, volume 1, 14ª edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2016.

[10] Piskunov, L., **Differential and Integral Calculus**, MIR Publishers, Moscow. Traduzido do Russo por G. Yankovsky, 1965.