MAT0220 - Cálculo IV
Agenda 03: Funções de Uma Variável Complexa

Professores Marta Cilene Gadotti* e Jean Cerqueira Berni†

Sumário

*martacg@unesp.br
†jeancb@ime.usp.br

1 Números Complexos: construção, operações e propriedades

2 Um breve relato histórico

A história dos números complexos, segundo[2], começa com a busca por uma fórmula simples que resolvesse qualquer equação polinomial do 3º grau (como a fórmula resolvente da equação quadrática). Em 1510, Scipione Del Ferro conseguiu encontrar uma resolução para equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, porém ele acabou falecendo antes de conseguir publicar sua solução, a qual foi herdada por Antônio Maria Del Fiore que buscava reconhecimento na área matemática. Del Fiore então desafiou Nicolau Fontana, também conhecido como Tartaglia, já renomado no ramo, para um duelo de resoluções matemáticas que consistia em resolver 30 problemas propostos pelo oponente e cujo perdedor deveria pagar 30 banquetes ao vencedor. O desafio foi aceito e ganho por Tartaglia, o qual, apesar de Del Fiore não saber, também já tinha encontrado uma solução para as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e, além disso, para as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, em 1535. Com a vitória, Tartaglia recebeu um convite para ir à casa de Girolamo Cardano com intuito de convencer Tartaglia a compartilhar suas fórmulas. Após um tempo de insistência, Tartaglia acabou dando a sua fórmula à Cardano com a promessa de que este não a publicaria. Infelizmente para Tartaglia, Cardano quebrou sua promessa e publicou a fórmula para resolução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e que ficou conhecida como Fórmula de Cardano.

Nessa mesma época, Rafael Bombelli estava escrevendo seu livro "*L'Algebra Parte Maggiore Dell Arithmetica* " e percebeu que $x = 4$ era raiz da equação $x^3 - 15x = 4$. Porém, pela Fórmula de Cardano, o valor encontrado seria $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ o que, na época, levaria o matemático a considerar que a equação não teria raiz, uma contradição.

Por volta de 1572, Bombelli decidiu considerar a existência de números na forma $a + \sqrt{-b}$, para qualquer $b \in \mathbb{R}$. A partir daí, o conjunto dos números imaginários e, por consequência, o dos complexos foi tomando forma e sendo aprimorado por diversos matemáticos. Foi somente no século XVIII que Carl Friederich Gauss deu aos números complexos um formato lógico e consistente, tratando-os como uma extensão do sistema de números reais. Neste século, Jean Robert Argand e Friederich Gauss concluíram que os números complexos poderiam ser representados geometricamente em um sistema de coordenadas retangulares e foi convencionado que o eixo horizontal representaria os números reais enquanto o eixo vertical representaria os números imaginários. O símbolo i foi originalmente empregado como um disfarce para o "estranho"símbolo $\sqrt{-1}$. Hoje dizemos que i é a unidade imaginária definida pela propriedade $i^2 = -1$. Também vale destacar que em 1814, Augustin-Louis Cauchy apresentou à Academia Francesa um artigo contendo algumas de suas mais importantes contribuições à teoria das funções de variável complexa. Atualmente, a Análise Complexa é uma importantíssima área da Matemática por sua beleza estrutural e pelas diversas aplicações da vida real que carece desta teoria.

Como determinar as raízes da equação cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$?
De uma forma técnica, a seguir daremos os passos realizados para determinar as raízes de uma

L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.

Nouamente poſta in luce.

IN BOLOGNA
Nella ſtamperia di Giouanni Roſsi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Veſc. & Inquiſit.

Figura 1: Frontispício de *"L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri"*, de Rafael Bombelli

equação cúbica da forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

1º passo: Vamos transformar a equação na seguinte forma

$$y^3 + py + q = 0.$$

Para isto, façamos uma mudança de variável: $y = m + x$, (m constante). Assim, $x = y - m$ e substituimos em (1), isto é,

$$\begin{aligned} 0 =& (y-m)^3 + a(y-m)^2 + b(y-m) + c \\ =& y^3 - 3y^2m + 3ym^2 - m^3 + ay^2 - 2yam + am^2 + by - bm + c \\ =& y^3 + y^2(-3m + a) + y(3m^2 - 2am + b) - m^3 - bm + c + am^2. \end{aligned}$$

Tomando agora $m = \dfrac{a}{3}$, a equação acima se torna

$$0 = y^3 + y^2 \underbrace{(-3m + a)}_{0} + y \underbrace{(3m^2 - 2am + b)}_{p} - \underbrace{m^3 - bm + c + am^2}_{q}$$

$$y^3 + py + q = 0$$

2º passo: Se $x^3 + px + q = 0$, vamos buscar solução da forma $x = A + B$. Note que

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + B^3 + 3AB(A+B) \\ \Rightarrow x^3 &= A^3 + B^3 + 3ABx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0 \\ &\Rightarrow -3AB = p \quad \text{e} \quad -(A^3 + B^3) = q \\ &\Rightarrow AB = -\frac{p}{3} \quad \text{e} \quad A^3 + B^3 = -q\end{aligned}$$

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Então A^3 e B^3 são as raízes (por relações de Girard) da equação do 2Âº grau dada por:

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Determinando as raízes, temos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}, \quad \text{ou seja,} \\ x &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\end{aligned}$$

Portanto, $x = A + B$, solução da equação cúbica $x^3 + px + q = 0$, é dada por

$$x = \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{A} + \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{B} \tag{2}$$

Exemplo 1. Considere a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ (mencionada no relato histórico). Vamos usar (2) para escrever uma solução desta equação.

Note que $p = -15$ e $q = -4$. Assim,

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} \\ \Rightarrow x &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}\end{aligned}$$

Por outro lado, $x = 4$ é raiz da equação (basta substituir na equação). Para obter as demais raízes, efetuamos a divisão:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 15x - 4 & \quad x - 4 \\ \cline{2-2} -x^3 + 4x^2 & x^2 + 4x + 1 \\ \cline{1-1} 4x^2 - 15x - 4 & \\ -4x^2 + 16x & \\ \cline{1-1} x - 4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Daí,

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Já temos todas as raízes (e sabemos, pelo Teorema Fundamental da álgebra que são 3 raízes, no máximo). Então supondo que $\sqrt{-1}$ (um símbolo matemático) funcione como um número real, fazendo as contas:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Extraindo a raiz cúbica,

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \\ 2 - \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \end{cases}$$
$$4 = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Logo, a raiz $x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$, com essa simbologia, é na verdade o número real $x = 4$.

3 O conjunto $\mathbb{C}$ e suas representações

Definição 1. *Um número complexo z é definido como um par ordenado $z = (a, b)$ de números reais satisfazendo os axiomas:*

1. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ *e* $b = d$ *(igualdade de números complexos);*
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ *(adição de números complexos);*
3. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ *(produto de números complexos).*

Denotamos por $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os números complexos.

Por exemplo, $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Observação 1. O Axioma 3 ilustra uma das diferenças entre o conjunto dos números complexos e o $\mathbb{R}^2$. Pois não é bem definido produto de dois pares ordenados em $\mathbb{R}^2$, com as propriedades que garantem a estrutura de corpo.

Observação 2. A definição de um número complexo na forma de um par ordenado possibilita uma interpretação geométrica. O plano que contém os números complexos é denominado **plano complexo** ou $z-$ plano. Pela observação anterior não devemos confundí-lo com o plano $\mathbb{R}^2$.

Exercício 1. (A) Mostre que $(\mathbb{C}, +)$ é um grupo abeliano.
(B) Mostre que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo.

Resolução: sejam (a, b), (c, d), $(e, f) \in \mathbb{C}$. Pela definição, sabemos que a, b, c, d, e e f são números reais.
(A).

- associativa

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f)$$

  como a, b, c, d, e e f são números reais, em $\mathbb{R}$ vale a associatividade, assim:

$$\begin{aligned} [(a, b) + (c, d)] + (e, f) &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \end{aligned}$$

- comutativa

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \overset{\mathbb{R}}{=} (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$$

- elemento neutro
  Tomemos $(0, 0) \in \mathbb{C}$, daí

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b),$$

  pela propriedade do corpo $\mathbb{R}$.

- inverso aditivo

  Seja $(a,b) \in \mathbb{C}$, tomemos $(-a,-b)$, daí

$$(a,b) + (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0)$$

Portanto, $(\mathbb{C},+)$ é grupo abeliano.

(B).

- comutativa com respeito ao produto

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc)\\ (c,d)\cdot(a,b) &= (ca-db, bc+ad)\end{aligned}$$

  pela propriedade comutativa dos números reais, segue que os pares acima são iguais.

- associativa com respeito ao produto

$$\begin{aligned}[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) &= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f)\\ &= ((ac-bd)\cdot e - (ad+bc)\cdot f, (ac-bd)\cdot f + (ad+bc)\cdot e)\\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] &= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de)\\ &= (a(ce-df) - b(cf+de), a(cf+de) + b(ce-df))\\ &= (ace - dfa - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf).\end{aligned}$$

  pelas propriedades distributiva, comutativa e associativa dos números reais segue a associativa de números complexos com respeito ao produto.

- elemento neutro

  Tomemos $(1,0)$. Assim, para todo $(a,b) \in \mathbb{C}$, temos

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - 0\cdot b, 0\cdot a + 1\cdot b) = (a,b)$$

- inverso multiplicativo

  Seja $(a,b) \in \mathbb{C}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Tomemos $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Daí,

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{a(-b)}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

A expressão do elemento inverso acima pode ser determinado pelos seguintes cálculos: seja $(a,b) \in \mathbb{C}$ com $(a,b) \neq (0,0)$ dado, queremos então encontrar $(x,y) \in \mathbb{C}$ tal que

$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0),$$

ou seja,

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0).$$

Pelo Axioma 1, temos as igualdades

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} abx - b^2y = b \\ abx + a^2y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} abx - b^2y = b \\ (a^2 + b^2)y = -b \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Substituíndo a expressão de y na primeira equação, obtemos:

$$\begin{aligned} abx - b^2\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) &= b \\ x = \frac{\left(b - \dfrac{b^3}{a^2+b^2}\right)}{ab} &= \frac{\left(\dfrac{b(a^2+b^2)}{a^2+b^2} - \dfrac{b^3}{a^2+b^2}\right)}{ab} \\ \Rightarrow x = \frac{a^2b + b^3 - b^3}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{ab} &= \frac{a}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

- distributiva

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] &= (a,b) \cdot (c+e, d+f) \\ &= (a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f) \end{aligned}$$

Portanto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo.

Definição 2. *Dado $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, chamamos o número a de parte real de z e o número b de parte imaginária de z. Notação:*

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re}(z), \\ b &= \operatorname{Im}(z). \end{aligned}$$

Em particular, o par ordenado $(0,1)$ é denominado unidade imaginária de $\mathbb{C}$.

Observação 3. 1. O conjunto $\mathbb{C}$ é também uma extensão do corpo $\mathbb{R}$.

Para isto, considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = (a, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Notemos que

- φ é injetora.
  Pois, se $\varphi(a) = \varphi(b)$, isto é, $(a,0) = (b,0)$, pelo Axioma 1 da definição de $\mathbb{C}$, tem-se $a = b$.
- φ não é sobrejetora.
  Por exemplo, todos os elementos $(0,b)$ com $b \neq 0$, não pertencem a imagem de φ e são elementos de $\mathbb{C}$.

- φ é homomorfismo.

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b) = (a+b,0) &= (a,0)+(b,0) \quad \text{(pelo Axioma 2)}\\
&= \varphi(a)+\varphi(b), \quad \forall a,b \in \mathbb{R}\\
\varphi(a\cdot b) = (a\cdot b,0) &= (a,0)\cdot(b,0), \quad \text{(pelo Axioma 3)}\\
&= \varphi(a)\cdot\varphi(b), \quad \forall a,b \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Agora, vamos restringir a função ao conjunto imagem, isto é, $\mathbb{C}_1 = \varphi(\mathbb{R})$. Assim, temos

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_1, \text{ bijetora.}$$

Logo, $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$ e podemos identificar $\mathbb{R}$ com $\mathbb{C}_1$. Portanto, $\mathbb{C}$ é uma extensão do corpo dos números reais.

Uma primeira vantagem que vemos, ao considerar $\mathbb{C}$ em vez de $\mathbb{R}$, é podermos resolver certas equações. Por exemplo, a equação $x^2+1=0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, mas em $\mathbb{C}$ tem. Vamos reescrever a equação usando a identificação acima, isto é, identificando o número real $1 \sim (1,0)$, temos a equação:

$$z^2+(1,0)=0.$$

Resolver esse problema é equivalente a determinar $z=(x,y)$ tal que:

$$\Rightarrow \begin{array}{c}(x,y)\cdot(x,y) = (-1,0)\\ (x^2-y^2,2xy) = (-1,0)\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-1\\ 2xy=0\end{cases}$$

Logo, $x=0$ e $y=1$; e $x=0$ e $y=-1$. Ou seja, temos duas soluções:

$$z_1=(0,1) \quad \text{e} \quad z_2=(0,-1)$$

Isto é, existem em $\mathbb{C}$, mais precisamente em $\mathbb{C}-\mathbb{C}_1$, dois números complexos cujo quadrado coincide com o número real -1.

2. O corpo $\mathbb{C}$, como extensão do corpo $\mathbb{R}$, não pode ser ordenado.
Lembrando: um corpo $(\mathbb{K},+,\cdot)$ é ordenado quando existir uma relação de ordem em $\mathbb{K}$, isto é, uma relação binária $<$, transitiva e tricotômica:

   - se $x<y$ e $y<u \Rightarrow x<u$;
   - dados $x,y \in \mathbb{K}$, tem-se $x<y$ ou $y<x$ ou $x=y$;
   - se $x<y \Rightarrow x+u<y+u$, $\forall u \in \mathbb{K}$;
   - se $x<y$ e $u>0 \Rightarrow x\cdot u<y\cdot u$.

   Por exemplo, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ e $(\mathbb{R},+,\cdot)$ são corpos ordenados. Fica como exercício, mostrar que $\mathbb{C}$ não é um corpo totalmente ordenado.

Vamos ver agora que podemos identificar um número complexo por uma matriz de $M_2(\mathbb{R})$. Mais precisamente, existe um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e um subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$.

Primeiramente, vamos observar a equação matricial

$$X \cdot X = -I,$$

onde $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e I indica a matriz identidade e, portanto, $-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a qual será identificada com o número real -1. Assim, essa equação pode ser escrita na forma $X^2 + 1 = 0$. Nota-se que a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é solução desta equação matricial.

Então, se "identificarmos"a unidade imaginária (a qual é solução de $z^2 + 1 = 0$) pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ poderemos escrever um número complexo na forma matricial, pois

$$(a, b) \in \mathbb{C} \Rightarrow (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \sim a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Agora estamos prontos para definir

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C} &\to M_2(\mathbb{R}) \\ (a, b) &\mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mostremos que ψ é homomorfismo injetor. De fato, para quaisquer (a, b), $(c, d) \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned} \psi((a, b) + (c, d)) = \psi((a + c, b + d)) &= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \psi(a, b) + \psi(c, d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi((a, b) \cdot (c, d)) = \psi(ac - bd, ad + bc) &= \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \psi(a, b) \cdot \psi(c, d) \end{aligned}$$

- ψ é injetora mas não é sobrejetora.

  Sejam (a, b), $(c, d) \in \mathbb{C}$ tais que

  $$\psi(a, b) = \psi(c, d),$$

  então

  $$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ -b = -d \\ b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

  Portanto, $(a, b) = (c, d)$, implicando ψ injetora.

  Agora, considere por exemplo um elemento da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ c & a \end{bmatrix}$ com $b \neq c$. Então, ele pertence a $M_2(\mathbb{R})$ mas não a $\mathrm{Im}\,(\psi)$, portanto, ψ não é sobrejetora.

Concluí-se que $\mathbb{C}$ é isomorfo a $\psi[\mathbb{C}]$, onde

$$\psi(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

Observação 4. Deste último isomorfismo, podemos observar que todas as operações definidas em $\mathbb{C}$ são herdadas do conjunto das matrizes, destacando o produto de números complexos. A definição de produto que aparece no Axioma 3, é na verdade o produto de matrizes que já tão bem conhecemos.

Outro cálculo que pode ser usado no contexto das matrizes é o de inverso multiplicativo. Para isto, veremos que basta encontrar a matriz inversa da matriz identificada ao número complexo. Isto é, dado $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$, podemos identificá-lo pela matriz $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e daí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^T$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2 + b^2} & \dfrac{b}{a^2 + b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2 + b^2} & \dfrac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix}$$

$$z^{-1} \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} \sim \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Definição 3. *O número complexo $(0, 1)$, unidade imaginária, a partir de agora será representado pelo simbolo i.*
Assim, $i \sim (0, 1)$ e, portanto, $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. (Neste sentido, muitas referências utilizam também $i = \sqrt{-1}$).
Além disso, pelo produto $(y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y)$ e, usando o significado de i, podemos escrever um número complexo (a, b) por

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot \underbrace{(0, 1)}_{i} \sim a + bi.$$

Assim, definimos $a + bi$ como sendo a **forma algébrica** *do número complexo (a, b).*

Exercício 2. Consideremos então os conjuntos $\mathbb{C} = \{(a, b)$, satisfazendo os Axiomas 1,2 e 3, $\ a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\tilde{\mathbb{C}} = \{a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}\}$, sendo as operações em $\tilde{\mathbb{C}}$:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Prove que $\mathbb{C}$ é isomorfo a $\tilde{\mathbb{C}}$.

Observação 5. Vimos que existem três representações distintas de um número complexo, a saber, par ordenado, matriz e forma algébrica. Foi demonstrado que essas representações são equivalentes, logo, qualquer uma delas pode ser utilizada.

3.1 Lista de exercícios

1. Mostre que:

a) $(\forall z \in \mathbb{C})(-(-z) = z)$, b) $(\forall z \in \mathbb{C}^*)(z^{-1} = \frac{1}{z})$,

c) $(\forall z \in \mathbb{C}^*)((z^{-1})^{-1} = z)$, d) $(\forall z \in \mathbb{C}^*)(\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z))$

2. Reduza à forma $a + bi$:

a) $(2 - \sqrt{3}i) - i[(2-i)(3-3i) - 5]$ b) $(3i - 1)(\dfrac{3}{i} - \dfrac{i}{3})$

c) $\dfrac{(2+3i)}{(1-3i)} - (2+5i)(2-5i)$ d) $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5$

3. Descreva o conjunto de pontos do plano que satisfazem:

a) $Re((1+i)z - 1) = 0$ b) $Im(z^2 + 2 + 2i) = 0$.

4. Dados z, w números complexos arbitrários, verifique se é verdadeiro ou falso e justifique:

a) $Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$. b) $Im(z.w) = Im(z).Im(w)$.

4 Operação de divisão, conjugado e módulo

Como sabemos efetuar a soma e o produto de dois números complexos e, além disso, determinar o inverso aditivo e o multiplicativo, podemos definir subtração e divisão entre números complexos.

Definição 4. *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, a* **subtração** *de z_1 por z_2 é dada por*

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Para $z_2 \neq 0$, a **divisão** *de z_1 por z_2 é definida por*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

Definição 5. *Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definimos*

(i) o **conjugado** *de z como sendo o número complexo: $\bar{z} = a - bi$;*

(ii) o **módulo** *de z como sendo o número real: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Observação 6. 1. Como um número complexo $z = a + bi$ pode ser visto como um vetor de posição bidimensional, ou seja, um vetor cujo ponto inicial é a origem do sistema de eixos e cuja extremidade é o ponto (a, b), então o comprimento do vetor z é dado pela distância $\sqrt{a^2 + b^2}$ da origem ao ponto (a, b), cujo nome dado é módulo.

Assim, dados dois números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, segue que a **distância** entre esses dois pontos é dada por:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2. Note também que o conjugado $\bar{z} = a - bi$ de z, geometricamente, é a reflexão do ponto $z = (a, b)$ com respeito ao eixo real.

3. Observa-se que, com essas notações, é possível expressar o inverso de $z \neq 0$ por

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Proposição 1 (Propriedades-conjugação). *Dados z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, então temos:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, *para* $z_2 \neq 0$.

Demonstração. 4. Dados z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} &= \overline{(a+bi) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{di}{c^2+d^2}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{ac}{c^2+d^2} + \frac{bd}{c^2+d^2} + i\left(-\frac{ad}{c^2+d^2} + \frac{bc}{c^2+d^2}\right)\right)} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i \\
&= (a-bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{di}{c^2+d^2}\right) \\
&= (a-bi) \cdot \frac{1}{c-di} = \bar{z_1} \cdot \frac{1}{\bar{z_2}}.
\end{aligned}$$

A prova dos demais ítens fica de exercício. □

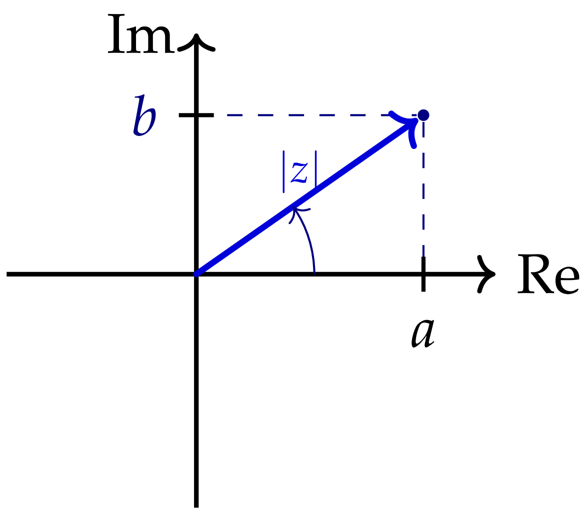
Proposição 2 (Propriedades- módulo). *Dados os números z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, então temos:*

1. $|z| \geq |\mathrm{Re}\,(z)| \geq \mathrm{Re}\,(z)$,
   $|z| \geq |\mathrm{Im}\,(z)| \geq \mathrm{Im}\,(z)$;
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ *e* $|z| = |\bar{z}|$;
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *para* $z_2 \neq 0$;
5. *(Desigualdade triangular)* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
6. $|z_1 - z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$.

5 Forma Trigonométrica ou Polar de Números Complexos

Recordemos do cálculo que um ponto P do plano de coordenadas retangulares (a, b) também pode ser descrito em termos de coordenadas polares (r, θ). Assim, se $z = a + bi \neq 0$ é um número complexo, então basta tomar $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ e θ satisfazendo

$$a = |z| \cos\theta;$$
$$b = |z| \sin\theta.$$



Assim, o número complexo $z = a + bi \neq 0$ possui a **forma polar** (ou forma trigonométrica)

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

O ângulo θ é chamado um **argumento de** z e denotado com $\theta = \arg(z)$.

A representação do número complexo na forma polar não é única, pois

$$z = |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i \cdot \sin(\theta + 2k\pi)),\ k \in \mathbb{Z}.$$

O argumento θ do número complexo z com valor no intervalo $]-\pi, \pi]$ é chamado de **argumento principal**, denotado por $\mathrm{Arg}\,(z)$ e neste caso é único (o que implica na representação polar única). Muitas vezes, é utilizado o intervalo $[0, 2\pi[$, neste caso, o argumento é denominado **argumento positivo mínimo**.

5.1 Operações: produto e divisão

é possível definir as operações conhecidas entre números complexos, usando a forma polar, com o objetivo de facilitar a interpretação geométrica. No caso da adição, efetua-se geomentricamente como no caso do $\mathbb{R}^2$. Assim, serão discutidos o caso do produto (consequentemente, potência de números complexos) e divisão.

Dados dois números complexos z_1, z_2, diferentes de zero, então podemos escrevê-los na forma polar por

$$z_1 = |z_1|(\cos(\arg(z_1)) + i\sin(\arg(z_1)),$$
$$z_2 = |z_2|(\cos(\arg(z_2)) + i\sin(\arg(z_2)).$$

Pela definição de **igualdade** $z_1 = z_2$, temos:

$$\begin{aligned} |z_1|\cos(\arg(z_1)) &= |z_2|\cos(\arg(z_2)) \\ |z_1|\sin(\arg(z_1)) &= |z_2|\sin(\arg(z_2)), \text{ ou seja,} \end{aligned}$$

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \cos(\arg(z_1)) &= \cos(\arg(z_2)) \\ \sin(\arg(z_1)) &= \sin(\arg(z_2)). \end{aligned}$$

Logo, $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \mod 2\pi \end{cases}$

Também, pela definição de **conjugado** de z_1, temos

$$\bar{z_1} = |z_1|(\cos(-\arg(z_1)) + i\sin(-\arg(z_1)) = |z_1|(\cos(\arg(z_1)) - i\sin(\arg(z_1)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\bar{z}_1| &= |z_1|, \\ \arg(\bar{z}_1) &\equiv [-\arg(z_1)] \mod 2\pi. \end{aligned}$$

Produto: Dados dois números complexos, diferentes de zero, na forma polar:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad \theta_1 = \arg(z_1), \\ z_2 &= |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2), \quad \theta_2 = \arg(z_2) \end{aligned}$$

o produto é dado por:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &\equiv [\arg(z_1) + \arg(z_2)] \mod 2\pi. \end{aligned}$$

Se considerarmos n números complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$, diferentes de zero, podemos definir

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_2 \cdots z_n = |z_1| \cdots |z_n|(\cos(\theta_1 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \ldots + \theta_n)).$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$, temos

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = |z|^n(\cos(n\theta + 2k\pi) + i\sin(n\theta + 2k\pi)) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Observação 7. Quando $|z| = 1$, a fórmula da potência se reduz ao **Teorema de Moivre** para expoentes inteiros:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Divisão: Dados $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, para descrever o quociente de dois números complexos, é preciso especificar $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ e $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Primeiramente, vamos descrever $\left|\frac{1}{z_2}\right|$ e $\arg\left(\frac{1}{z_2}\right)$. Como

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_2} &= \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = (|\bar{z}_2|(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)) \cdot \frac{1}{|z_2|^2} \\ &= \frac{1}{|z_2|}\left(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\right),\end{aligned}$$

temos

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|} \\ \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) \equiv -\theta_2 \mod 2\pi \end{cases}$$

Agora, usando esta expressão e a expressão polar no caso do produto, conclui-se que:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv (\theta_1 - \theta_2) \mod 2\pi. \end{cases}$$

5.2 Lista de exercícios

1. Represente geometricamente o conjunto de números complexos que satisfazem:

a) $Re(z) = 0$ b) $Im(z) > 0$ c) $|z| = 3$ d) $z^2 = i|z|^2$

e) $|z - (1+i)| = 2$ f) $1 < |z-2| \leq 3$ g) $Re(z) + Im(z) = 1$

h) $|Re(z)| + Im(z) = 1$ i) $|Re(z)| + |Im(z)| < 1$

2. Utilizando as operações envolvendo números complexos deduza as fórmulas do $\cos(2\theta)$ e sen (2θ). é possível deduzir uma expressão para $\cos(3\theta)$ e sen (3θ)?

3. Determinar o menor número natural n para o qual:

a) $(i - \sqrt{3})^n$ é imaginário puro. b) $(\sqrt{3} + i)^n$ é real e negativo.

c) $(\sqrt{3} + i)^n$ é real e positivo.

4. Mostre que:

a) $1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

b) Use a) e prove que

$$1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\theta}{2\operatorname{sen}(\theta/2)},$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$. Este resultado é conhecido como **identidade de Lagrange**. (Utilizada em Análise de Fourier)

5. Prove o Teorema de Moivre com expoentes negativos.

5.3 Radiciação

Já vimos as operações de adição, produto, subtração, divisão, potenciação e agora trataremos da radiciação (veja que ainda nos concentramos nas operações - sem a preocupação de definir uma função). Observaremos que a forma trigonométrica tem grande vantagem no cálculo da raiz n-ésima de um número complexo.

Dado um número complexo $z_0 \neq 0$ em sua forma polar

$$z_0 = |z_0|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0),$$

obter a raiz $n-$ésima de z_0 corresponde a determinar um número complexo z que satisfaça $z^n = z_0$.

Se denotarmos $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ então

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Pela igualdade de números complexos, se $z^n = z_0$, tem-se, com respeito ao módulo:

$$|z|^n = |z_0| \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|z_0|}$$

e com respeito ao argumento

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$z = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A princípio podemos pensar que há infinitas soluções para o problema $z^n = z_0$ ou $z = \sqrt[n]{z_0}$, já que $k \in \mathbb{Z}$. Mas isto não ocorre, pois haverá uma repetição das raízes, conforme k varia devido à periodicidade das funções reais seno e cosseno. Note que

- $k = 0$
$$w_0 = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0}{n}\right)\right)$$

- $k = 1$
$$w_1 = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{n}\right)\right)$$

- $k = 2$
$$w_2 = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 4\pi}{n}\right)\right)$$

$\vdots$

- $k = n - 1$
$$w_{n-1} = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 2(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

- $k = n$

$$w_n = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0}{n} + 2\pi\right)\right)$$

Logo, $w_n = w_0$. Analogamente, teremos $w_{n+1} = w_1$, $w_{n+2} = w_2$, ..., $w_{2n} = w_0$ e assim, sucessivamente, gerando um número finito de soluções. Portanto, precisamente, teremos n números complexos $\{w_0, w_1, ..., w_{n-1}\}$ que são as raízes n-ésimas de z_0. Todas as raízes estão na circunferência contida no z-plano, de raio $\sqrt[n]{|z_0|}$ e centro na origem.

Exemplo 2. Vamos descrever as soluções de $z^n = 1$, ou descrever as raízes da unidade. Primeiramente, escrevemos o número $z_0 = 1$ e aplicamos a expressão obtida acima. Ou seja,

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) \\ z &= \sqrt[n]{1}\left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

As soluções são dadas por

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Logo, as raízes são dadas pelos números:

$k = 0$

$$z = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$k = 1$

$$z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$k = 2$

$$z = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$$

$k = 3$

$$z = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}$$

$\vdots$

$k = n-1$

$$z = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Exemplo 3. Determine:

a) $\sqrt[4]{1}$

b) $\sqrt[4]{4}$

c) $\sqrt{1 + \sqrt{3}i}$

a) $1 = |1|(\cos 0 + i\sin 0) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ As raízes são dadas por

$$z = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, as raízes são:

$k = 0$

$$z = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$k = 1$

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$k = 2$

$$z = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$k = 3$

$$z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$S = \{1, -1, i, -i\}$$

Como representá-las geometricamente?

b) Como $4 = 4 + 0i$ temos então na forma polar: $4 = 4(\cos 0 + i\sin 0)$. Assim,

$$z = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$k = 0$

$$z = \sqrt[4]{4}$$

$k = 1$

$$z = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt[4]{4}$$

$k = 2$

$$z = \sqrt[4]{4}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\sqrt[4]{4}$$

$k = 3$

$$z = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt[4]{4}$$

$$S = \{-\sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{4}, i\sqrt[4]{4}, -i\sqrt[4]{4}\}$$

Represente-os geometricamente.

c) Exercício.

6 Noções topológicas

Definido o módulo, é possível definir a **distância** entre dois números complexos quaisquer $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d)$:

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2},$$

pois estão satisfeitas, para quaisquer z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$, as seguintes propriedades:

d1) $d(z_1,z_2) \geq 0$. E vale $d(z_1,z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;

d2) $d(z_1,z_2) = d(z_2,z_1)$;

d3) $d(z_1,z_2) \leq d(z_1,z_3) + d(z_3,z_2)$ $\forall z_1$, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$.

A prova das propriedades d1, d2 seguem rapidamente da definição e

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2 + z_3 - z_3| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| = d(z_1,z_3) + d(z_3,z_2).$$

Portanto, $(\mathbb{C}, d)$ é um espaço métrico.

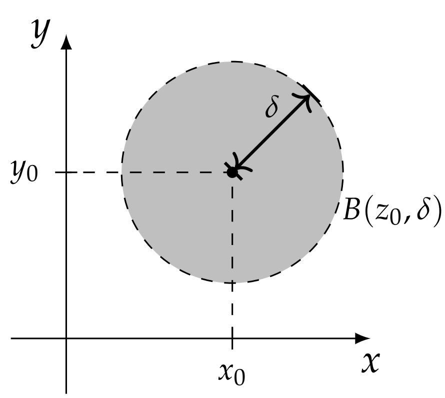
Definição 6. *Dados um $z_0 = x_0 + i \cdot y_0 \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ um número real, denotamos por*

$$B(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : d(z,z_0) < \varepsilon\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

o **disco aberto** *de centro z_0 e raio ε. E*

$$B[z_0,\varepsilon] = \{z \in \mathbb{C} : d(z,z_0) \leq \varepsilon\}$$

o **disco fechado** *de centro z_0 e raio ε.*



Definição 7. *Um número complexo z_0 é um* **ponto interior** *de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ quando existir um disco aberto centrado em z_0 inteiramente contido em Ω. Ou seja, z_0 é ponto interior de $\Omega \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(z_0,\varepsilon) \subset \Omega$.*
Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é denominado de **conjunto aberto** *se todo ponto de Ω é ponto de interior.*

Exemplo 4. São abertos de $\mathbb{C}$ os seguintes conjuntos:

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\,(z) > 0 \text{ e } \text{Im}\,(z) > 0\}$

b) $\Omega = D(z_0, \varepsilon)$

c) $\Omega = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : x + y > 0\}$

Justificativas:

a) Mostremos que todo ponto de Ω é ponto interior. Para isto, tome $z_0 = (a, b) \in \Omega$ arbitrário, logo $a > 0$ e $b > 0$. Basta então tomar $\varepsilon = \min\{a, b\}$ e mostrar que $B(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$.

De fato, seja $z = (x, y)$ um ponto arbitrário de $B(z_0, \varepsilon)$. Assim, $|z - z_0| < \varepsilon$. Sabemos que

$$\text{Re}\,(z - z_0) \leq |\text{Re}\,(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \varepsilon$$

e

$$\text{Im}\,(z - z_0) \leq |\text{Im}\,(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\text{Re}\,(z - z_0)| = |x - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - a < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + a < x < \varepsilon + a.$$

Se $\varepsilon = a$, então $0 < x < 2a$, logo $\text{Re}\,(z) > 0$.

Se $\varepsilon = b$, como $\varepsilon = \min\{a, b\}$, $b \leq a$, segue que

$$0 \leq -b + a < x < a + b,$$

ou seja, $\text{Re}\,(z) > 0$.

Analogamente, prova-se que $\text{Im}\,(z) > 0$.

Portanto, $B(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ para $\varepsilon = \min\{a, b\}$, concluindo que Ω é um conjunto aberto.

b) Dado $z \in \Omega$ arbitrário, tomemos
$$\rho = \varepsilon - |z - z_0| > 0.$$

Mostremos que $B(z, \rho) \subset \Omega$, isto é, $|w - z_0| < \varepsilon$, $\forall w \in B(z, \rho)$.

De fato, para $w \in B(z, \rho)$ arbitrário, temos:

$$|w - z_0| = |w - z + z - z_0| \leq |w - z| + |z - z_0| < \rho + |z - z_0| = \varepsilon - |z - z_0| + |z - z_0| = \varepsilon.$$

Logo, $|w - z_0| < \varepsilon$, concluindo que Ω é aberto.

c) Exercício.

Exemplo 5. Sejam Ω_1 e Ω_2 dois abertos em $\mathbb{C}$, então

i) $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é aberto;

ii) $\Omega_1 \cup \Omega_2$ é aberto.

i) Se $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \Rightarrow z \in \Omega_1 \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$ tal que $B(z, \varepsilon_1) \subset \Omega_1$. Mas também tem-se $z \in \Omega_2 \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0$ tal que $B(z, \varepsilon_2) \subset \Omega_2$.

   Basta tomar
$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0.$$
   Pois, $B(z, \varepsilon) \subseteq B(z, \varepsilon_1) \subset \Omega_1$ e $B(z, \varepsilon) \subseteq B(z, \varepsilon_2) \subset \Omega_2$. Portanto, $B(z, \varepsilon) \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$.

ii) Exercício.

Exercício 3. Podemos generalizar (i) e (ii) para uma quantidade infinita de conjuntos $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$? Justifique.

Definição 8. *Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é chamado* **ponto de acumulação** *de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ quando todo disco aberto centrado em z_0 contém pelo menos um ponto de Ω distinto de z_0.*
Um ponto $w_0 \in \Omega$ é chamado **ponto isolado** *de Ω quando existir $r > 0$ tal que $B(w_0, r) \cap \Omega = \{w_0\}$.*

Exemplo 6. Seja $\Omega = \{z_1, \ldots, z_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$ fixado, então todo ponto de Ω é isolado.

Exemplo 7. $\Omega = B(z_0, \varepsilon)$.

i) todos os pontos de Ω são de acumulação;

ii) os pontos z tais que $|z - z_0| = \varepsilon$ também são pontos de acumulação.

i) Seja $z \in B(z_0, \varepsilon)$ arbitrário. Mostremos que z é um ponto de acumulação. Para ito, considere o segmento de extremos z_0 e z, isto é,
$$w_t = (1-t)z_0 + tz, \quad 0 \leq t \leq 1.$$
   Vamos mostrar que $\exists\, t \in (0,1)$ tal que
$$w_t \in \Omega \cap B(z, r),\ \forall r > 0.$$
   Verifiquemos primeiramente que todo o segmento está contido em $D(z_0, \varepsilon)$, ou seja, $w_t \in D(z_0, \varepsilon)$, $\forall t \in (0,1)$. De fato,
$$\begin{aligned} |w_t - z_0| &= |(1-t)z_0 + tz - z_0| = |z_0 - tz_0 + tz - z_0| = |t(z - z_0)| = |t||z - z_0|. \\ \Rightarrow |w_t - z_0| &< |z - z_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$
   Agora, mostremos que dado $r > 0$, $\exists\, t \in (0,1)$ tal que
$$|w_t - z| < r.$$
   Dado $r > 0$ notemos que para w_t estar em $\Omega \cap B(z, r)$ devemos ter
$$\begin{gathered} |(1-t)z_0 + tz - z| < r \\ \Rightarrow |(1-t)z_0 - z(1-t)| < r \\ |(1-t)(z_0 - z)| < r \\ |1-t||z - z_0| < r \qquad t \in [0,1]. \end{gathered}$$

Para encontrarmos o valor de t, $0 < t < 1$, devemos então impor que:

$$(1-t)|z-z_0| < r \Rightarrow \quad 1-t < \frac{r}{|z-z_0|} \Rightarrow 1 - \frac{r}{|z-z_0|} < t.$$

Basta tomar

$$\max\left\{0, 1 - \frac{r}{|z-z_0|}\right\} < t < 1,$$

concluindo que $w_t \in \Omega \cap B(z,r)$.

ii) Exercício.

Definição 9. *Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é chamado* **ponto de fronteira** *de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ quando todo disco aberto de centro z_0 contém pontos de Ω e de seu complementar $\mathbb{C} \setminus \Omega$. (Lembrando que $\mathbb{C} \setminus \Omega = \mathbb{C} - \Omega$). O conjunto de todos os pontos de fronteira de Ω é denotado por $\partial\Omega$.*

Logo $(z \in \partial\Omega) \Leftrightarrow (\forall r > 0),\ (B(z,r) \cap \Omega \neq \varnothing) \& (B(z,r) \cap \mathbb{C} \setminus \Omega \neq \varnothing)$.

Definição 10. *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é* **fechado** *quando seu complementar for aberto.*

Definição 11. *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é denominado* **limitado** *quando existir $r > 0$ tal que $\Omega \subset D[0,r]$, ou seja, $|z| \leq r$, $\forall z \in \Omega$.*
Dizemos que Ω é um conjunto **compacto** *quanto Ω for fechado e limitado.*

Exemplo 8. Seja $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{C} :\ x > 0 \text{ e } y > 0\}$ e mostremos que

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{C} :\ x = 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ ou } y = 0 \text{ e } x \geq 0\ \}.$$

De fato, dado o ponto $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$ arbitrário, então $\forall \varepsilon > 0$ temos

$$B((x_0,0),\varepsilon) \cap \Omega \neq \varnothing$$

e

$$B((x_0,0),\varepsilon) \cap \mathbb{C} \setminus \Omega \neq 0$$

pois $(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \in \Omega$ e, como $|(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) - (x_0, 0)| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon)$ temos também $(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \in B((x_0,0),\varepsilon)$. Além disso, $(x_0, -\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ e também $(x_0, -\frac{\varepsilon}{2}) \in B((x_0,0),\varepsilon)$.Portanto, $(x_0, 0) \in \partial\Omega$.

Os casos $(0, y_0)$ com $y_0 > 0$ e $(0,0)$, seguem de forma análoga.

Definição 12. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ pontos do plano complexo. A coleção dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ constitui uma* **linha poligonal** *unindo A ao ponto A_{n+1}.*
Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é chamado **conexo** *quando dados dois pontos quaisquer de Ω, existir uma linha poligonal ligando esses dois pontos e inteiramente contida em Ω.*

Exemplo 9. $B(z_0, \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ é um conjunto conexo.

Observação 8. Se dois subconjuntos de $\mathbb{C}$ são conexos, então:

a) a união pode não ser conexa;

b) a interseção pode não ser conexa.

Definição 13. *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é chamado de* **domínio** *se for aberto e conexo.*
Uma **região** *em $\mathbb{C}$ é um conjunto constituído por um domínio Ω e mais possivelmente por pontos da fronteira de Ω.*

Observação 9. Nem toda região é domínio, por exemplo $D[z_0, r]$ é uma região, mas não é domínio. Mas é claro que todo domínio é região.

Exemplo 10. Classifique em domínios e regiões.

1. $B(0,1)$;
2. $0 < |z| < 1$;
3. $\{(x,y) \in \mathbb{C},\ x + y < 1\}$;
4. $1 < |z - 2| < 2$;
5. Dado $B(z_0, \varepsilon)$ e $A = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset B(z_0, \varepsilon)$ verifique se $\Omega = B(z_0, \varepsilon) - A$ é domínio.

6.1 Lista de exercícios

1. Represente geometricamente as raízes $n-$ésimas de z e verifique que são vértices de um polígono regular inscrito num círculo.

2. Um quadrado, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um dos seus vértices o número $3i$. Que números complexos são representados pelos outros vértices?

3. Um hexágono regular, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um dos seus vértices o número $2i$. Que números complexos são representados pelos outros vértices?

4. Mostre que:

a) $w = \cos(2\pi/n) + i\,\text{sen}\,(2\pi/n)$ é uma raiz n-ésima da unidade.

b) $1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0$ se $n \geq 2$.

5. Demonstrar que a soma das raízes de índice $2n$ de um número complexo qualquer é zero.

6. Dados z e w dois números complexos não nulos, prove que $\text{Re}(z\bar{w}) = |z||w|$, se e só se, o arg(w)= arg(z)$\pm 2k\pi$, com $k = 0, 1, 2, \cdots$.

7. a) Podemos definir $z^{\frac{m}{n}}$, com m, $n \in \mathbb{Z}$? b) Use a) para calcular $\sqrt[3]{i^5}$.

8. a) Mostrar o item (ii) do Exemplo 7. b) Mostre também que os pontos $w \in \mathbb{C}$ tais que $|w - z_0| > \varepsilon$ não são pontos de fronteira de $B(z_0, \varepsilon)$.

9. Defina e dê a interpretação geométrica da projeção estereográfica no caso complexo.

10. Prove que $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| + |z - z_1| < r\}$ é conexo.

11. Defina conjunto simplesmente conexo em $\mathbb{C}$ e dê exemplos.

12. Dê um exemplo que se verifica que a intersecção infinita de conjuntos abertos pode não ser aberta.

7 Curvas em $\mathbb{C}$

8 Traço e orientação

Vamos trabalhar com certas funções, denominadas curvas, que são funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o contradomínio em $\mathbb{C}$. Esse estudo será útil para o tratamento de funções de variável complexa e os resultados que apresentaremos a seguir abrange o cálculo diferencial.

Definição 14. *Uma* **curva em** $\mathbb{C}$ *é uma função* $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *tal que a cada* $t \in [a,b]$ *associa-se* $\phi(t) = \phi_1(t) + i\phi_2(t)$*, onde* $\phi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são funções reais de variável real. Denotamos também* $\phi_1 = Re(\phi)$ *e* $\phi_2 = Im(\phi)$*.*

Observação 10. Pela definição acima, vê-se que o traço de ϕ está contido no z-plano, isto é, $tr(\phi) \subset \mathbb{C}$. Portanto, podemos expressá-lo geometricamente.

Exemplo 11. Dados dois números complexos, z_1 e z_2, defina $\phi(t) = (1-t)z_1 + tz_2,\ t \in [0,1]$. Logo, ϕ é a parametrização do segmento no z-plano que liga z_1 a z_2.

Se $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$, então

$$\phi(t) = (1-t)(a+bi) + t(c+di)$$
$$\phi(t) = (1-t)a + tc + i((1-t)b + td), \quad \forall t \in [0,1].$$

Neste caso, $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ são dadas por $\phi_1(t) = (1-t)a + tc$ e $\phi_2(t) = (1-t)b + td$ com $t \in [0,1]$.

Exemplo 12. Seja $\phi : [-1,1] \to \mathbb{C}$, tal que $\phi(t) = t + t^2 i$. Represente o traço desta curva geomentricamente.

Observação 11. Como também acontece no caso de curvas no $\mathbb{R}^2$, se o traço de uma cuva em $\mathbb{C}$ é o gráfico de uma função real de uma variável real $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (como o caso do exemplo anterior), basta então definir $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ por $\phi(t) = (t, f(t))$, com $t \in [a,b]$, ou seja, $\phi(t) = t + if(t)$.

Observemos no próximo exemplo como a orientação de uma curva é também importante.

Exemplo 13. Se o traço de uma curva é a circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ orientada no sentido anti-horário, então, $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, é dada por

$$\phi(t) = r\cos(-t) + ir\sin(-t) = r\cos t - ir\sin t.$$

Assim, $\phi_1(t) = r\,\cos t$ e $\phi_2(t) = -r\sin t$ com $t \in [0, 2\pi]$.

9 Limite

Dados uma curva $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ e um $t_0 \in [a,b]$, escrevemos

$$\lim_{t \to t_0} \phi(t) = \alpha$$

se dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, com $t \in [a, b]$, implicar $|\phi(t) - \alpha| < \varepsilon$.

O resultado a seguir é fundamental para os cálculos de limites envolvendo curvas.

Teorema 1. *Dados $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva em $\mathbb{C}$ e $t_0 \in [a, b]$ então*

$$\lim_{t \to t_0} \phi(t) = \alpha \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} \phi_1(t) = \mathrm{Re}\,(\alpha) \\ \lim\limits_{t \to t_0} \phi_2(t) = \mathrm{Im}\,(\alpha) \end{cases}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $\lim\limits_{t \to t_0} \phi(t) = \alpha$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$ e $t \in [a, b]$ então $|\phi(t) - \alpha| < \varepsilon$.

Assim, denotando $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

$$\begin{aligned} &|\phi_1(t) + i\phi_2(t) - (\alpha_1 + i\alpha_2)| < \varepsilon \\ \Rightarrow\ &|\phi_1(t) - \alpha_1 + i(\phi_2(t) - \alpha_2)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

desde que $|t - t_0| < \delta$.

Pela propriedade **1** da **Proposição 2**, tem-se

$$|\phi_1(t) - \alpha_1| \leq |\phi_1(t) - \alpha_1 + i(\phi_2(t) - \alpha_2)| < \varepsilon$$

e

$$|\phi_2(t) - \alpha_2| \leq |\phi_1(t) - \alpha_1 + i(\phi_2(t) - \alpha_2)| < \varepsilon,$$

desde que $|t - t_0| < \delta$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, basta tomar $\delta > 0$ como do limite da curva para garantir que se $|t - t_0| < \delta$ então $|\phi_1(t) - \mathrm{Re}\,(\alpha)| < \varepsilon$ e $|\phi_2(t) - \mathrm{Im}\,(\alpha)| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{t \to t_0} \phi_1(t) = \mathrm{Re}\,(\alpha)$ e $\lim\limits_{t \to t_0} \phi_2(t) = \mathrm{Im}\,(\alpha)$.

($\Leftarrow$)Suponha que $\lim\limits_{t \to t_0} \phi_1(t) = \alpha_1$ e $\lim\limits_{t \to t_0} \phi_2(t) = \alpha_2$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $t \in [a, b]$ e

- $|t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |\phi_1(t) - \alpha_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
- $|t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |\phi_2(t) - \alpha_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tem-se, que para $t \in [a, b]$ com $|t - t_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |\phi(t) - (\alpha_1 + i\alpha_2)| &= |(\phi_1(t) - \alpha_1) + i(\phi_2(t) - \alpha_2)| \\ &\leq |\phi_1(t) - \alpha_1| + |i(\phi_2(t) - \alpha_2)| \\ &= |\phi_1(t) - \alpha_1| + |i||\phi_2(t) - \alpha_2|, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\phi(t) - (\alpha_1 + i\alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

desde que $|t - t_0| < \delta$. $\square$

Proposição 3. *Se ϕ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ são curvas em $\mathbb{C}$ tais que* $\lim_{t\to t_0} \phi(t)$ *e* $\lim_{t\to t_0} \psi(t)$ *existem, então*

1. $\lim_{t\to t_0}[\phi(t) + \psi(t)] = \lim_{t\to t_0} \phi(t) + \lim_{t\to t_0} \psi(t)$;

2. $\lim_{t\to t_0}[\phi(t) \cdot \psi(t)] = \lim_{t\to t_0} \phi(t) \cdot \lim_{t\to t_0} \psi(t)$.

3. $\lim_{t\to t_0} \dfrac{\phi(t)}{\psi(t)} = \dfrac{\lim_{t\to t_0} \phi(t)}{\lim_{t\to t_0} \psi(t)}$, *desde que* $\lim_{t\to t_0} \psi(t) \neq 0$.

Demonstração: Exercício. (As provas são similares ao caso real)

10 Continuidade

Pelo teorema anterior podemos provar que uma curva $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ é contínua em $t_0 \in [a,b]$ se, e só se, $\mathrm{Re}\,(\phi(t))$ e $\mathrm{Im}\,(\phi(t))$ são funções reais contínuas em t_0. Ou seja,

$$\lim_{t\to t_0} \phi(t) = \phi(t_0) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t\to t_0} \phi_1(t) = \mathrm{Re}\,(\phi(t_0)) \\ \lim_{t\to t_0} \phi_2(t) = \mathrm{Im}\,(\phi(t_0)) \end{cases}$$

A demonstração deste fato é similar à prova feita no Teorema 1. (Exercício)

11 Derivada

Definição 15. *Definimos a* **derivada** *de uma curva em $\mathbb{C}$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ no ponto $t \in [a,b]$, como sendo*

$$\phi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h}, \qquad (h \in \mathbb{R})$$

se o limite existir. Se $t = a$ ou $t = b$, toma-se o limite lateral.

Vamos agora utilizar o Teorema 1 para expressar a derivada em função da derivada da parte real e da parte imaginária da ϕ, para isto note que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi_1(t+h) + i\phi_2(t+h) - [\phi_1(t) + i\phi_2(t)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\phi_1(t+h) - \phi_1(t)}{h} + i \left(\frac{\phi_2(t+h) - \phi_2(t)}{h} \right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, este limite existirá se, e só se, ϕ_1 e ϕ_2 forem deriváveis. Segue então que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi_1(t+h)-\phi_1(t)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{\phi_2(t+h)-\phi_2(t)}{h}\\ &= \phi_1'(t)+i\phi_2'(t).\end{aligned}$$

Portanto, ϕ é derivável se, e só se, Re (ϕ) e Im (ϕ) forem funções reais deriváveis e, para tais funções, podemos usar as Regras de Derivação do Caso Real conhecidas.

Proposição 4. *Sejam $\phi,\ \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ duas curvas em $\mathbb{C}$, então:*

1. *A soma de duas curvas deriváveis é derivável e vale*

$$(\phi(t)+\psi(t))' = \phi'(t)+\psi'(t);$$

2. *O produto de duas curvas ϕ e ψ deriváveis é também derivável e vale*

$$(\phi(t)\cdot\psi(t))' = \phi'(t)\psi(t)+\phi(t)\psi'(t).$$

Exercício 4. Demonstre a proposição anterior.

12 Integral

Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva em que $\phi(t) = \phi_1(t)+i\phi_2(t)$. Considere $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição arbitrária do intervalo $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Vamos escolher $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$ para cada $1 \le j \le n$, então:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\phi(\eta_j)\Delta t_j &= \sum_{j=1}^{n}[\phi_1(\eta_j)+i\phi_2(\eta_j)]\Delta t_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\phi_1(\eta_j)\Delta t_j + i\left(\sum_{j=1}^{n}\phi_2(\eta_j)\Delta t_j\right)\end{aligned}$$

Como P é arbitrária e pelo resultado demonstrado sobre limites, tem-se:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum\phi(\eta_j)\Delta t_j = \lim_{\|P\|\to 0}\sum\phi_1(\eta_j)\Delta t_j + i\lim_{\|P\|\to 0}\sum\phi_2(\eta_j)\Delta t_j,$$

desde que os limites existam, lembrando que

$$\|P\| = \max\{|t_j - t_{j-1}|,\ j = 1,\ldots,n\}.$$

Utilizando a definição de integral de Riemann para funções reais de variável real, podemos então escrever

$$\int_a^b \phi(t)\,dt = \int_a^b \phi_1(t)\,dt + i\int_a^b \phi_2(t)\,dt.$$

Proposição 5. 1. *Se ϕ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ são curvas integráveis em $[a,b]$ então:*

i) $(\phi + \psi)$ *é integrável em* $[a,b]$;

ii) $(\phi \cdot \psi)$ *é integrável em* $[a,b]$;

iii) $\alpha\phi$ *é integrável em* $[a,b]$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Ainda temos:

(A) $\mathrm{Re}\left(\int_a^b \phi(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\,(\phi(t))\,dt;$

(B) $\mathrm{Im}\left(\int_a^b \phi(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}\,(\phi(t))\,dt;$

(C) $\left|\int_a^b \phi(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |\phi(t)|\,dt.$

Teorema 2 (Teorema Fundamental do Cálculo para curvas)**.** *Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva de classe C^1, isto é, ϕ' é uma função contínua, então:*

i) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t \phi(s)\,ds = \phi(t);$

ii) $\displaystyle\int_a^b \phi'(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a).$

Demonstração. Denotando $\phi(t) = \phi_1(t) + i\phi_2(t),\ t \in [a,b]$, temos
(i)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_a^t \phi(s)\,ds &= \frac{d}{dt}\int_a^t [\phi_1(s) + i\phi_2(s)]\,ds \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int_a^t \phi_1(s)\,ds + i\int_a^t \phi_2(s)\,ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\int_a^t \phi_1(s)\,ds + i\frac{d}{dt}\int_a^t \phi_2(s)\,ds \overset{*}{=} \phi_1(t) + i\phi_2(t) = \phi(t).
\end{aligned}$$

Note que em $*$ utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais.

(ii) Usando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo e a definição de derivada de curva em $\mathbb{C}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \phi'(t)\,dt &= \int_a^b (\phi_1(t) + i\phi_2(t))'\,dt = \int_a^b [\phi_1'(t) + i\phi_2'(t)]\,dt \\
&= \int_a^b \phi_1'(t)\,dt + i\int_a^b \phi_2'(t)\,dt \\
&\overset{\text{T.F.C}}{=} \phi_1(b) - \phi_1(a) + i[\phi_2(b) - \phi_2(a)] \\
&= \phi_1(b) + i\phi_2(b) - (\phi_1(a) + i\phi_2(a)) = \phi(b) - \phi(a).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3 (Mudança de variável). *Sejam $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva em $\mathbb{C}$ integrável e $\beta : [c,d] \to [a,b]$ uma função real de classe C^1 invertível. Então:*

$$
\int_a^b \phi(t)\,dt = \int_c^d \phi(\beta(s))\,|\beta'(s)|\,ds.
$$

Demonstração. Para provarmos o resultado, vamos considerar dois casos, dependendo do sinal da derivada de β. Novamente, lembremos que

$$
\int_a^b \phi(t)\,dt = \int_a^b [\phi_1(t) + i\phi_2(t)]\,dt = \int_a^b \phi_1(t)\,dt + i\int_a^b \phi_2(t)\,dt.
$$

Façamos uma mudança de variável: $t = \beta(s)$, $\beta'(s) \geq 0$, $dt = \beta'(s)\,ds$, então

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \phi(t)\,dt &= \int_c^d \phi_1(\beta(s)) \cdot \beta'(s)\,ds + i\int_c^d \phi_2(\beta(s)) \cdot \beta'(s)\,ds \\
&\overset{\beta'(s)\geq 0}{=} \int_c^d [\phi_1(\beta(s)) + i\phi_2(\beta(s))]\,|\beta'(s)|\,ds \\
&= \int_c^d \phi(\beta(s))|\beta'(s)|\,ds.
\end{aligned}
$$

Se $\beta'(s) < 0$ então

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \phi(t)\,dt &= \int_d^c \phi(\beta(s)) \cdot \beta'(s)\,ds = -\int_c^d \phi(\beta(s)) \cdot \beta'(s)\,ds \\
&= \int_c^d \phi(\beta(s)) \cdot [-\beta'(s)]\,ds = \int_c^d \phi(\beta(s)) \cdot |\beta'(s)|\,ds.
\end{aligned}
$$

□

Observação 12. Sempre é possível transformar um intervalo não degenerado $[c,d]$ em um intervalo $[a,b]$, $b > a$, usando a mudança de variável $\beta : [c,d] \to [a,b]$, dada por

$$
\beta(s) = \left(\frac{d-s}{d-c}\right) a + \left(\frac{s-c}{d-c}\right) b.
$$

Definição 16. *Uma curva* $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *é:*

a) *fechada, quando* $\phi(a) = \phi(b)$;

b) *simples, quando* $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in (a,b)$ *com* $t_1 \neq t_2$;

c) *arco, quando sua derivada* ϕ' *for contínua, isto é,* $\phi \in C^1$;

d) *Jordan, quando for fechada, simples e contínua;*

e) *retificável , quando seu comprimento,* $L(\phi)$, *for finito, sendo*

$$L(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)|\, dt.$$

12.1 Lista de exercícios

1. Provar as propriedades ii) e (B) da Proposição 5.

2. Determine uma curva ϕ, cujo traço é o segmento de reta que liga $1+2i$ a $2+i$, onde o parâmetro t satisfaz $0 \leq t \leq 3$. Calcule a derivada dessa curva e também $L(\phi)$.

3. Usando a forma polar, mostre que:

$$\left| \int_a^b \phi(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |\phi(t)|\, dt.$$

4. Construa um exemplo para cada item da Definição 15 anterior e justifique.

5. Dadas duas curvas em $\mathbb{C}$, $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$, com $\psi(t) \neq 0$, para todo $t \in [a,b]$. Verifique se vale a Regra de Derivação do Quociente:

$$\left(\frac{\phi}{\psi}\right)' = \frac{\phi'\psi - \phi\psi'}{\psi^2}.$$

Bons estudos!!

13 Função de uma variável complexa

14 Definições básicas

Definição 17. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Denomina-se* **função de variável complexa** *ou* **aplicação complexa** *a toda correspondência unívoca definida em Ω com valores em $\mathbb{C}$.*
Notações: $f : \Omega \to \mathbb{C}$, tal que $\Omega \ni z \mapsto w = f(z) \in \mathbb{C}$.

Ω é chamado domínio de f, muitas vezes denotado também por D_f. $\mathbb{C}$ é chamado contradomínio e é denominado imagem de Ω pela f ao subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$\operatorname{Im} f = \{w \in \mathbb{C} : \ w = f(z), \ \text{com } z \in \Omega\} = f(\Omega).$$

Se $w \in \mathbb{C}$, podemos definir

$$f^{\dashv}[\{w\}] = \{z \in \Omega : \ f(z) = w\}$$

denominado imagem inversa de w pela f. Note que se w não estiver na imagem de f então $f^{\dashv}[\{w\}] = \emptyset$. Se $K \subseteq \mathbb{C}$, então

$$f^{\dashv}[K] = \{z \in \Omega : \ f(z) \in K\}$$

é a imagem inversa do conjunto K pela f. Também podemos definir o **gráfico de** f:

$$G(f) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ w = f(z), \ \forall \ z \in \Omega\}.$$

Observação 13. Nota-se que o gráfico de uma função complexa está contido em um espaço de dimensão 4, não podendo ser expresso geometricamente. Entretanto, algumas informações sobre a função podem ser obtidas graficamente, exibindo-se conjuntos de pontos correspondentes z e w.

Denotaremos o plano complexo que contém o domínio de f por $z-$**plano** e o plano que contém a imagem de f por $w-$**plano**.

Para $z = x + iy \in \Omega$, então podemos expressar $f(z)$, que pertence ao $w-$plano, também na forma algébrica, isto é,

$$f(z) = w \Rightarrow f(x + iy) = u + iv,$$

onde $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ são funções de x e y. Assim,

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y).$$

A correspondência entre pontos nos dois planos é denominada de **transformação** de pontos no $z-$plano em pontos no $w-$plano pela função f. Pontos w são então imagens de pontos z. Este termo **transformação** também se aplica para subconjuntos de $\mathbb{C}$, como veremos a seguir.

Observação 14. Uma função de variável complexa pode ser multívoca ou multivalente, isto é, dado um valor z no domínio de f, o conjunto imagem deste ponto pode ter mais de um elemento. Veremos isto nos exemplos apresentados no texto e também como estudar estes casos.

Exemplo 14. Vamos determinar o domínio e a imagem de S dado abaixo, com respeito à função f:

1. $f(z) = \bar{z}$.
   Caso i) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ y = mx\}$, com $m > 0$. (Veja a figura).

   Neste caso, o domínio de f é $\mathbb{C}$. Se $z = x + iy$ então $f(z) = x - iy = u(x, y) + iv(x, y)$, ou seja,
   $\begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases}$

   Note que os pontos de S são da forma $z = x + (mx)i$. Assim,

   $$S = \{(x, mx) \in \mathbb{C} : \ x \in \mathbb{R}\},$$

   o que implica.

   $$f(S) = \{(x, -mx) \in \mathbb{C} : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

   Caso ii) Considere a mesma f, mas agora

   $$S = \{(x, y) \in \mathbb{C} : \ x^2 + y^2 = 1\}$$

   Para este caso, temos

   $$u^2 + v^2 = x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = 1.$$

   Portanto, $f(S) = \{(u, v) \in \mathbb{C} : \ u^2 + v^2 = 1\}$.

2. Considere $f(z) = |z|$ e tomemos $S = \{(x, y) \in \mathbb{C} : \ x^2 + y^2 = r^2\}$.
   O domínio de f é $\mathbb{C}$, assim $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaz

   $$f(z) = f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2} = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

   Se $z = x + iy \in S \Rightarrow |z| = r$ ou $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, assim $u = r$ e $v = 0$.

3. Considere $f(z) = z^2$. Vamos determinar geometricamente $f(S)$ para os seguintes casos:

   a) $S : \ x = 0$;
   b) $S : \ y = 0$;
   c) $S : \ x = x_0$, $x_0 \neq 0$;
   d) $S : \ y = y_0$, $y_0 \neq 0$;
   e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{C} : \ 1 < x < 2\}$.

4. Considere agora $f(z) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) z^2$. Tomemos o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = 2\}$ no $z-$plano.

Para resolver este exemplo, basta lembrarmos como o produto entre números complexos é realizado geometricamente. Pois, se chamarmos $g(z) = z^2$ e $h(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) z$ então a função dada é escrita pela composição: $f(z) = h(g(z)), \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Assim, $z \in S$ implica $z = 2 + iy$. Usando um plano intermediário, (u', v') teremos

$$\begin{aligned} g(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\ \Rightarrow \begin{cases} u' = x^2 - y^2 \\ v' = 2xy \end{cases} \end{aligned}$$

Mas $z \in S \Rightarrow \begin{cases} u' = 4 - y^2 \\ v' = 4y \Rightarrow \dfrac{v'}{4} = y \end{cases} \quad \Rightarrow u' = 4 - \dfrac{(v')^2}{16}.$

Portanto, $g(S)$ representa geometricamente uma parábola. Agora basta realizar uma rotação em $g(S)$ de um ângulo de $\pi/6$, pois escrevendo $z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ na forma polar, temos

$$\begin{gathered} z_0 = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \\ f(z) = z_0 \cdot g(z) \Rightarrow f(S) = z_0 \cdot g(S). \end{gathered}$$

Concluímos que $f(S)$ é uma parábola rotacionada no $w-$plano. Ver figura.

Exercício 5. Determine em que o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ é transformado pela função $f(z) = z^2$.

15 Função afim e função quadrática complexa

Definição 18. *Denomina-se* **função afim de uma variável complexa** *a toda função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida por* $f(z) = mz + n$*, com* m, n *constantes complexas e* $m \neq 0$*.*

Exercício 6. Dado um conjunto qualquer $S \subset \mathbb{C}$, descreva o que geometricamente a função afim complexa realiza em S nos seguintes casos: (a) $m = 1$ e $n \neq 0$; (b) $|m| > 1$ e $n = 0$; (c) $0 < |m| < 1$ e $n = 0$.

Vimos no último exemplo da seção anterior um caso particular de uma função quadrática e como esta age em certas regiões do $z-$plano, agora vamos generalizar a ideia utilizada.

Definição 19. *Denomina-se* **função quadrática complexa** *a toda função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, tal que* $f(z) = az^2 + bz + c$*, com* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *constantes e* $a \neq 0$*.*

A seguir faremos a análise de alguns casos particulares que serão úteis para a descrição geométrica no caso geral com respeito a malha no $z-$plano ($x = x_0$ e $y = y_0$).

Caso 1 Se $a = 1$ e $b = c = 0$.

Neste caso a função se torna $f(z) = z^2$. Portanto, f transforma retas no $z-$plano da forma $x = x_0$ e $y = y_0$ em parábolas no $w-$plano.

Caso 2 Se $a \neq 1$ e $b = c = 0$.

A função $w = f(z) = az^2$ pode ser vista como a composição das funções $g(z) = z^2$ e $h(z) = az$. Desta maneira, az^2 transforma uma reta $x = x_0$ ou $y = y_0$ em uma parábola, que sofreu uma rotação (Arg(a)) e uma contração/dilatação dependendo $|a|$.

Caso 3 Se $a = 1$, $b = 0$ e $c \neq 0$.

Neste caso, f fica com a expressão: $f(z) = z^2 + c$. Portanto f transforma uma malha retangular em um conjunto de parábolas e então transladadas pelo vetor correspondente ao número complexo c.

Caso 4 Se $a \neq 1$, $b = 0$ e $c \neq 0$, então $f(z) = az^2 + c$. Logo f é a composição da função $g(z) = z^2$ com a função $h(z) = az + c$.

Como $f = h \circ g$ a malha retangular será transformada em um conjunto de parábolas que depois serão rotacionadas por um ângulo dado pelo Arg(a) e dilatadas/contraídas pelo fator $|a|$ e, finalmente, transladadas pelo vetor correspondente ao número c.

Caso 5 Finalmente, o caso geral: $f(z) = az^2 + bz + c$, $a \neq 0$. Para estudá-lo, basta observar que

$$f(z) = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c$$
$$f(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c,$$

então,

$$f(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{C}$$

Logo, f é a composta das funções $h(z) = az^2 + C$ e $g(z) = z + D$, $D = b/(2a)$. Isto é, $f(z) = h(g(z))$.

Assim, primeiro translada-se a origem segundo o vetor correspondente ao número complexo $b/(2a)$. Em seguida, transforma as retas da malha em parábolas que serão rotacionadas pelo $Arg(a)$ e contraídas/dilatadas pelo $|a|$ sendo então transladadas segundo o vetor correspondente ao número complexo C.

Exercício 7. Determine em que o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ é transformado pela função $f(z) = az^2 + bz + c$, com $a \neq 0$.

15.1 Lista de exercícios

1. Determine a imagem de S pelas funções indicadas:

a) $f(z) = 2z$, com $S = \{z \in C;\ 1 < Im(z) < 2\}$

b) $f(z) = z + 1$, com $S = \{z \in C;\ 0 < Re(z) < 2\}$

c) $f(z) = z + i$, com $S = \{z \in C;\ -1 < Re(z) < 1\}$

d) $f(z) = 2z + i$, com $S = \{z \in C;\ -2 < Re(z) < 2\}$

e) $f(z) = (1+i)z + 2$, com (i) $S_1 = \{z \in C;\ -1 < Re(z) < 1\}$,
(ii) $S_2 = \{z \in C;\ 1 < Im(z) < 2\}$

g) $f(z) = z^2 - (2+2i)z$, com $S = \{z = (0,y) \in C;\ y = -2\}$.

2. a) Resolva a equação quadrática $z^2 + (1-i)z - 3i = 0$.

b) Determine a imagem de S pela função quadrática acima, $f(z) = z^2 + (1-i)z - 3i$, onde (i) $S = \{z = (x,y) \in C;\ y = y_0\}$ e (ii) $S = \{z = (x,y) \in C;\ x = x_0\}$.

3. Determine o domínio da função complexa e descreva as funções u e v:

a) $f(z) = 2Re(z) - iz^2$ b) $f(z) = \dfrac{3z+2i}{z^3+4z^2+z}$ c) $f(z) = \dfrac{iz}{|z-1|}$

4. Se $f(z)$ é uma função definida no disco $B(0;1)$ determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $w = f(z-2)$ b) $w = f(2z+i)$ c) $w = f(z^2)$

d) $w = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ e) $w = f(z^2 - 1)$

5. Em algumas situações, dado z, a imagem $f(z)$ pode ser mais de um valor(chamamos de função multivalente). Por exemplo, a função raiz quadrada $f(z) = \sqrt{z}$. Determine o domínio da função raiz quadrada e descreva $w = u + iv$ em função de x e y.

6. Seja $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Determine o domínio de f e descreva $f(S)$ em cada caso: (a) $S = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\,(z) = x_0\}$ e (b) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} :\ y = 2x + 1\}$.

16 Limite

Nesta seção vamos introduzir a definição de limite e estudar algumas propriedades. Iniciemos com a definição de função limitada que será importante aos nossos propósitos.

Definição 20. *Dizemos que uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de variável complexa é* **limitada** *quando o conjunto $f(\Omega)$ for limitado, isto é, existe $M > 0$ tal que*

$$(\forall z \in \Omega)(|f(z)| \leq M)$$

Definição 21. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, com $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, uma função de uma variável complexa e seja z_0 um ponto de acumulação do conjunto Ω. Dizemos que um número complexo α é o limite de f quando z se aproxima de z_0, escrevemos $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha$, quando para todo $\varepsilon > 0$ existir um número $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que se $z \in \Omega$ e $0 < |z - z_0| < \delta$ tem-se $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$.*

Observação 15. 1. Se existe o limite dado acima, então ele é único. (Demonstre!!)

2. Se existe o limite de f quando z tende a z_0 então f é limitada em z_0, isto é, existe $r > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in B(z_0, r) \cap \Omega$, para algum $M > 0$.

De fato, suponha que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha \in \mathbb{C}$. Logo, dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta_1$ e $z \in \Omega \Rightarrow |f(z) - \alpha| < 1$.

Assim,
$$|f(z)| = |f(z) - \alpha + \alpha| \leq |f(z) - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|,$$
desde que $z \in \Omega \cap B(z_0, \delta_1)$.

Basta tomar $r = \delta_1$ e a definição é satisfeita com $M = 1 + |\alpha|$.

Exemplo 15. Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrário e $f(z) = \bar{z}$, calculemos $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Lembremos que $D_f = \mathbb{C}$ e mostremos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \bar{z}_0.$$

De fato, notando que $|f(z) - \bar{z}_0| = |\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$, tal que
$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \bar{z}_0| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon,$$
ou seja, $|f(z) - \bar{z}_0| < \varepsilon$, $\forall z \in B(z_0, \delta)$.

Exercício 8. Calcule $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, onde $f(z) = c$, c é uma constante complexa.

Exercício 9. Calcule $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, onde $f(z) = z$.

Exemplo 16. Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrário e $f(z) = z^2$, calculemos $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Novamente temos $D_f = \mathbb{C}$ e mostremos que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$.

Notemos primeiramente que

$$\begin{aligned}|f(z) - z_0^2| &= |z^2 - z_0^2| = |(z - z_0)(z + z_0)| = |z - z_0||z + z_0| \\ &= |z - z_0||z - z_0 + z_0 - z_0| \leq |z - z_0|(|z - z_0| + 2|z_0|),\end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(z) - z_0^2| \leq |z - z_0|(|z - z_0| + 2|z_0|).$$

Dado $\varepsilon > 0$, como queremos determinar $\delta > 0$ tal que $|f(z) - z_0^2| < \varepsilon$ para $z \in B(z_0, \delta)$, basta tomarmos $\delta = -|z_0| + \sqrt{|z_0|^2 + \varepsilon} > 0$. Pois,

$$|f(z) - z_0^2| < \delta(\delta + 2|z_0|) = \delta^2 + 2|z_0|\delta = \varepsilon, \quad |z - z_0| < \delta.$$

Exemplo 17. Dada a função $f(z) = \dfrac{z}{|z|}\mathrm{Re}\,(z) + 1$, calculemos $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

Note que $D_f = \mathbb{C} - \{0\}$, $z_0 = 0 \notin D_f$ mas z_0 é um ponto de acumulação de D_f. Mostremos que $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1$. De fato,

$\forall \varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$, pois se $0 < |z - 0| < \delta$ temos

$$|f(z) - 1| = \left| \frac{z}{|z|}\mathrm{Re}\,(z) + 1 - 1 \right| = \frac{|z|}{|z|}|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z| = |z - 0| < \delta = \varepsilon.$$

Proposição 6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ e denotemos por Ω' o conjunto dos pontos de acumulação de Ω. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de uma variável complexa e o ponto $z_0 \in \Omega'$, então:*

1. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha_1 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} [f(z) - \alpha_1] = 0;$

2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha_1 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{\alpha_1}.$

Demonstração. 1. Se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha_1$, isto é, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $z \in \Omega$,

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \alpha_1| < \varepsilon.$$

Mostremos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta' > 0$ tal que $z \in \Omega$, com

$$0 < |z - z_0| < \delta' \Rightarrow |f(z) - \alpha_1 - 0| < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta' = \delta$ e o resultado segue.
A recíproca é imediata.
2. Exercício.

□

Proposição 7 (Limite e operações)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ e denotemos por Ω' o conjunto dos pontos de acumulação de Ω. Dadas as funções $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ e o ponto $z_0 \in \Omega'$ satisfazendo $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha_1$ e $\lim_{z \to z_0} g(z) = \alpha_2$, então valem as seguintes propriedades:*

1. $\lim_{z \to z_0} \lambda f(z) = \lambda \alpha_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;
2. $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = \alpha_1 + \alpha_2$;
3. $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \alpha_1 \cdot \alpha_2$;
4. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, *desde que* $\alpha_2 \neq 0$;
5. $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |\alpha_1|$.

Demonstração.

1. Exercício.
2. Exercício.
3. Por hipótese:
   (I) Como existe o limite da g quando $z \to z_0$, então g é limitada em z_0. Assim, $\exists\, r > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$, $\forall z \in B(z_0, r) \cap \Omega$, para algum $M > 0$;
   (II) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que se $z \in \Omega$ e $0 < |z - z_0| < \delta_1$, então $|f(z) - \alpha_1| < \dfrac{\varepsilon}{M + |\alpha_1|}$.
   (III) $\lim_{z \to z_0} g(z) = \alpha_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que se $z \in \Omega$ e $0 < |z - z_0| < \delta_2$, então $|g(z) - \alpha_2| < \dfrac{\varepsilon}{M + |\alpha_1|}$.

   Devemos mostrar que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se

   $$0 < |z - z_0| < \delta \text{ e } z \in \Omega \Rightarrow |f(z)g(z) - \alpha_1\alpha_2| < \varepsilon.$$

   Dado então $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \min\{r, \delta_1, \delta_2\}$ pois,

   $$\begin{aligned} |f(z)g(z) - \alpha_1\alpha_2| &= |f(z)g(z) + \alpha_1 g(z) - \alpha_1 g(z) - \alpha_1\alpha_2| \\ &\leq |g(z)||f(z) - \alpha_1| + |\alpha_1||g(z) - \alpha_2| \\ &< M\frac{\varepsilon}{M + |\alpha_1|} + |\alpha_1|\frac{\varepsilon}{M + |\alpha_1|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4. Basta mostrar que $\lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\alpha_2}$ e, em seguida, usar o item anterior.

5. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$, com $z \in \Omega$ implica $|f(z) - \alpha_1| < \varepsilon$. Pela desigualdade
$$0 < ||f(z)| - |\alpha_1|| \leq |f(z) - \alpha_1|,$$
segue que, para $0 < |z - z_0| < \delta$ com $z \in \Omega$, $||f(z)| - |\alpha_1|| < \varepsilon$.

□

Note que a recíproca do último item desta proposição não é verdadeira. Isto é, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |\alpha_1|$ não implica $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha_1$. Por exemplo, considere a função

$$f(x+iy) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ e } y \text{ forem racionais} \\ -1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $|f(x+iy)| = 1$, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e, portanto, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = 1$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$. Porém, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ não existe.

De fato, fixado um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ tome $\varepsilon = 1/2$. Assim, para todo $\delta > 0$ vão existir números complexos (x', y'), (x, y) em $B(z_0, \delta)$ tais que $f(x' + iy') = 1$ e $f(x + iy) = -1$ (pois $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são conjuntos densos em $\mathbb{R}$) o que mostra que f não tem limite em z_0, independente do valor de $f(z_0)$.

Podemos tratar problemas de limite estabelecendo a relação entre o limite de uma função de variável complexa e os limites de funções reais de duas variáveis reais, o que mostra o próximo resultado.

Proposição 8. *Sejam $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto de acumulação de Ω. Denotando $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ então*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = a \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = b \end{cases}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a + bi$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $z \in \Omega$ e $0 < |z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - (a + bi)| < \varepsilon$.

Como dado $\varepsilon > 0$, temos $\delta > 0$ satisfazendo $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, logo

$$|\mathrm{Re}\,(f(z) - (a + bi))| = |u(x, y) - a| \leq |f(z) - (a + bi)| < \varepsilon$$

e

$$|\mathrm{Im}\,(f(z) - (a + bi))| = |v(x, y) - b| \leq |f(z) - (a + bi)| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Agora vamos supor que os limites das funções reais de duas variáveis reais existam. Isto é, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1 \Rightarrow |u(x, y) - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

E existe também $\delta_2 > 0$ tal que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2 \Rightarrow |v(x, y) - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pois, para $z \in \Omega$ com $0 < |z - z_0| < \delta$, temos

$$|f(z) - (a + bi)| = |u(x, y) + iv(x, y) - a - bi| \leq |u(x, y) - a| + |i||v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Exemplo 18. Dado $f(x+yi) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} + 2xy^2 i$. Então, pelo resultado anterior o limite $\lim_{z\to 0} f(z)$ não existe. Basta observar que o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} Re(f(z))$ não existe.

Observação 16. Como na Análise Real podemos definir os conceitos de limite no infinito e limite no infinito para funções complexas. Por exemplo, o limite

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe um valor $M > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$, sempre que $|z| > M$. Com esta definição, é possível mostrar que

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L.$$

Já o limite

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

significa que para todo $M > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > M$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$. E desta definição segue a equivalência:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

17 Continuidade

Veremos que os resultados sobre continuidade seguem imediatamente dos resultados sobre limites vistos na seção anterior. Iniciemos com o conceito de função contínua num dado ponto do seu domínio.

Definição 22. *Uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de variável complexa é* **contínua em** $z_0 \in \Omega$ *se* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. *Se f for contínua em todo $z_0 \in \Omega$ então dizemos simplesmente que f é* **contínua.**

Exemplo 19. São exemplos de funções contínuas:

1. $f(z) = c$, c constante;
2. $f(z) = z^2$;
3. $f(z) = \bar{z}$;
4. $f(z) = z^n$. Exercício: prove que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = z_0^n$.

O teorema a seguir é uma consequência imediata da Proposição 8.

Teorema 4. *Uma função de variável complexa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é contínua em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ se, e só se,* $\mathrm{Re}\,(f(z)) = u(x,y)$ *e* $Im(f(z)) = v(x,y)$ *são contínuas em* (x_0, y_0).

Observação 17. Usando as propriedades envolvendo limites, pode-se garantir as seguintes propriedades com respeito a continuidade: se $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são funções contínuas em z_0, então:

i) $f + g$ é contínua em z_0;

ii) αf é contínua em z_0, com $\alpha \in \mathbb{C}$;

iii) $f \cdot g$ é contínua em z_0;

iv) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em z_0, desde que $g(z_0) \neq 0$.

Observação 18. Em vista dos resultados e propriedades dadas, podemos concluir que toda função polinomial complexa, denotada por $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, com $a_0, a_1, ...a_n$ constantes complexas, e toda função racional complexa, denotada por $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, com p e q funções polinomiais complexas, são funções contínuas em $\mathbb{C}$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ q(z) \neq 0\}$, respectivamente.

17.1 Lista de exercícios

1. Calcule os limites, se existirem:

a) $\lim_{z\to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z+1}$ b) $\lim_{z\to 2i} \dfrac{z^2+4}{z-2i}$ c) $\lim_{z\to i} \dfrac{z(z^2+(2-i)z-2i)}{z-i}$

d) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ e) $\lim_{z\to 2i} \dfrac{z^2 - iz + 10i}{z+2}$ f) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z^2}$

g) $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|}$ h) $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|^2}$

2. Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ tais que $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ e g é limitada em Ω. Mostre que $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$.

3. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x + x^2(\cos\frac{1}{x^2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2})} = 1$.

4. Discuta a continuidade das funções:

$$a)f(z) = \frac{z^2+1}{z-i} \qquad b)g(z) = \frac{z^2-z-2}{z^2-2z}.$$

5. Considere as funções:

$$f(z) = \frac{Re(z)}{|z|}, \quad g(z) = \frac{Im(z^2)}{|z^2|}, \quad z \neq 0.$$

Essas funções possuem limite no ponto $z = 0$? Justifique.

6. Verifique se $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ é contínua em $B(0;1)$.

7. Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ duas funções de variável complexa sendo $Im(f) \subset \Omega'$, Ω e Ω' subconjuntos de $\mathbb{C}$. A função $h : \Omega \to \mathbb{C}$, definida por $h(z) = g(f(z))$ denomina-se função composta de f com g. Se z_0 for ponto de acumulação de Ω e $w_0 = f(z_0)$ ponto de acumulação de Ω', prove que se f é contínua em z_0 e g contínua em w_0, então a composta h é contínua em z_0.

8. (a) Defina continuidade uniforme para funções com variável complexa.

(b) Mostre que $f(z) = z^2$ é uniformemente contínua em $D[0;1]$.

(c) Mostre que $f(z) = 1/z$ não é uniformemente contínua em $D[0;1] - \{0\}$.

9. Calcule os limites, se existirem: (i) $\lim_{z\to\infty} \dfrac{z^2 + iz - 2}{(1+2i)z^2}$ (ii) $\lim_{z\to\infty} \dfrac{iz+1}{2z-i}$

(iii) $\lim_{z\to\infty} \dfrac{z^2 - (2+3i)z + 1}{iz - 3}$ (iv) $\lim_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$

10. a) Dada f uma função de variável complexa, quando existirá a inversa de f. b) A função de variável complexa $f(z) = z^2$ tem inversa em qual conjunto? Justifique.

18 Compacidade e continuidade

Para a construção de resultados envolvendo compacidade e continuidade, será necessário abordar a teoria sobre sequência de números complexos.

18.1 Sequências em $\mathbb{C}$

Definição 23. *Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que associa a cada número natural n um número complexo $s(n) = z_n$ é denominada uma sequência em $\mathbb{C}$. O número complexo $s(n)$ é chamado de $n-$ésimo termo ou* **termo geral da sequência**. *Denotamos a sequência por $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (z_n).*
Uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **limitada** *quando existir $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 24. *Dizemos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge** *para um número complexo α se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $(n_0 = n_0(\varepsilon))$ tal que $\forall n > n_0$, $|z_n - \alpha| < \varepsilon$. E escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$ ou simplesmente $z_n \to \alpha$. Neste caso a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* **convergente**. *Uma sequência que não é convergente é denominada* **divergente**.

Observação 19. O limite de uma sequência, quando existir, é único.(Demonstre!)

Exemplo 20. A sequência constante, dada por: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_0, z_0, z_0, \ldots)$ é convergente e, neste caso, $z_n \to z_0$.

Exemplo 21. Dada $z_n = \dfrac{1+i}{\sqrt{n}}$, então $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, neste caso, basta tomar qualquer natural n_0 com $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon^2}$. Assim, para $\forall n > n_0$ tem-se:

$$|z_n - 0| = \left|\frac{1+i}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|1+i|}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Proposição 9. *Toda sequência de números complexos (z_n) convergente é limitada.*

Demonstração. Como existe o limite da sequência, isto é, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$ temos, para $\varepsilon = 1$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que ,$\forall\, n > n_0$, vale $|z_n - \alpha| < 1$. Logo,

$$|z_n| \leq |z_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|,\ \forall n > n_0.$$

Tomando $r = \max\{1 + |\alpha|, |z_1|, \ldots, |z_{n_0}|\}$, tem-se que $z_n \in B(0, r)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (z_n) é uma sequência limitada. □

Definição 25. *Sejam $k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ um conjunto infinito de números naturais e $n \mapsto z_n$ uma sequência de números complexos. A função que associa $k_n \mapsto z_{k_n}$ denomina-se uma* **subsequência** *de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a qual se representa por $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposição 10 (Propriedades e Operações). *Sejam (z_n) e (w_n) duas sequências de números complexos, então são válidas as seguintes propriedades:*

1. $z_n = x_n + iy_n \to a + bi \Leftrightarrow x_n \to a$ *e* $y_n \to b$.

2. *Se* $z_n \to \alpha$ *e* $w_n \to \beta$ *então:*

   i) $cz_n \to c\alpha, \forall c \in \mathbb{C}$;

   ii) $z_n + w_n \to \alpha + \beta$;

   iii) $z_n w_n \to \alpha\beta$;

   iv) *Se* $\alpha \neq 0$ *então* $\dfrac{1}{z_n} \to \dfrac{1}{\alpha}$.

3. *Toda sequência limitada de números complexos possui subsequência convergente.*

Demonstração. 1. Exercício.

2. (i), (ii) e (iii) Exercício. Mostremos (iv). Notemos primeiramente que

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|z_n - \alpha|}{|z_n||\alpha|}.$$

Como $\alpha \neq 0$ por hipótese e $z_n \to \alpha$, existem então $r > 0$ e um natural n_1 tais que $|\alpha| > r$ e $|z_n| > r$, para todo $n > n_1$. Dado agora $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - \alpha| < \varepsilon r^2$, para todo $n > n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tem-se

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|z_n - \alpha|}{|z_n||\alpha|} < \frac{\varepsilon r^2}{r.r} = \varepsilon.$$

3. Seja (z_n) uma sequência limitada de números complexos, isto é, $|z_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para algum $M > 0$.

Assim, $\operatorname{Re}(z_n) = x_n$ e $\operatorname{Im}(z_n) = y_n$ são também sequências de números reais limitadas, pois,

$$|x_n| \leq |z_n| \leq M \text{ e } |y_n| \leq |z_n| \leq M.$$

Como (x_n) é limitada, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, $x_{n_k} \to a$. Como a subsequência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também é limitada e, assim, possui subsequência $(y_{n_{k_j}})$ convergente para um número real b.

Portanto,

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \to a + bi.$$

□

Exercício 10. Verifique se existem os limites das seguintes sequências:

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + i \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$;

2. $\lim_{n\to\infty} \left(i + \left(\frac{4+3i}{5} \right)^n \right)$;

3. $\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} \right)^n \right]$;

4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3} \right)^n$.

Definição 26. *Uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denomina-se* **de Cauchy** *quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que*

$$|z_m - z_n| < \varepsilon, \quad \forall\, m > n_0,\, n > n_0.$$

Proposição 11. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z_n| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \ m > n_0,\, n > n_0.$$

Tomando $\varepsilon = 1$ e $n = n_0 + 1$, segue que $|z_m - z_{n_0+1}| < 1$, para todo $m > n_0$. Assim,

$$|z_m| \leq |z_m - z_{n_0+1}| + |z_{n_0+1}| < 1 + |z_{n_0+1}|, \quad \text{para todo } \ m > n_0.$$

Considerando

$$M = \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{n_0}|, 1 + |z_{n_0+1}|\}$$

conclui-se que $|z_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Teorema 5. *Uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos é convergente se, e somente se, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência convergente para z. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z| < \varepsilon/2, \quad \text{também } \ |z_n - z| < \varepsilon/2, \quad \text{para todo } \ m > n_0,\, n > n_0.$$

Usando agora a desigualdade triangular, temos

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - z| + |z - z_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \text{para todo } \ m > n_0,\, n > n_0.$$

Portanto, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Suponha agora que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Do resultado anterior, sabemos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e da Proposição 10, item 3, segue que existe uma subsequência $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos $z_{n_k} \to z$. Mostremos que $z_n \to z$. De fato, sendo a sequência de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z_n| < \varepsilon/2, \quad \text{para todo } \ m > n_0,\, n > n_0.$$

Como $z_{n_k} \to z$, existe $m_0 > n_0$ tal que $|z_{m_0} - z| < \varepsilon/2$. Portanto,

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{m_0}| + |z_{m_0} - z| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2, \quad \text{para todo } \ n > n_0.$$

O que prova que $z_n \to z$, isto é, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

□

Definição 27. *Dada uma sequência (z_n) em $\mathbb{C}$, denomina-se uma* **série** *de termo geral z_n, a sequência (s_n), definida por $s_n = \sum_{j=0}^{n} z_n$. Usa-se a notação*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

para representar uma série de termo geral z_n. Os termos s_n são denominados as **reduzidas** *ou* **somas parciais** *da série. Quando a sequência (s_n) possui limite s, dizemos que a série de termo geral z_n é convergente, escrevendo*

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

O número s denomina-se a soma desta série. Quando (s_n) não converge, dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é divergente.

Podemos aplicar os resultados vistos anteriormente para sequências no estudo da convergência das séries. Outras propriedades podem ser encontradas na lista de exercícios e nas referências citadas no final deste texto.

Observação 20. Como o estudo de convergência de uma sequência em $\mathbb{C}$ e, portanto, de uma série, passa-se ao estudo da parte real e da parte imaginária (Prop. 10, item 1.) segue que os resultados e critérios de convergência conhecidos da Análise Real podem ser aplicados.

18.2 Resultados principais

Vejamos agora alguns resultados importantes envolvendo funções de uma variável complexa contínuas e conjuntos compactos.

Proposição 12. *Se $F \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto fechado e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos em F tal que $z_n \to \alpha$, então $\alpha \in F$.*

Demonstração. Vamos mostrar este resultado por contradição. Suponha que $\alpha \notin F$, logo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus F$. Como F é fechado segue que F^C é aberto, assim existe $\delta > 0$ tal que $B(\alpha, \delta) \subset \mathbb{C} \setminus F$.

Como $z_n \to \alpha$, com $z_n \in F$, tomando-se $\varepsilon = \delta > 0$, por definição de convergência, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |z_n - \alpha| < \delta$.

Segue de $B(\alpha, \delta) \subset \mathbb{C} \setminus F$ que $z_n \in \mathbb{C} \setminus F$, $\forall n > n_0$, o que é uma contradição pois temos $z_n \in F$ e $z_n \in \mathbb{C} \setminus F$, $\forall n \geq 0$. Portanto, $\alpha \in F$. □

Teorema 6. *Dados $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função de uma variável complexa e $z_0 \in \Omega$. f é contínua em z_0 se, e só se, $\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in \Omega$ com $z_n \to z_0$ tem-se $f(z_n) \to f(z_0)$.*

Demonstração. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua em $z_0 \in \Omega$. Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } z \in \Omega,\ |z - z_0| < \delta.$$

Por hipótese, temos $z_n \to z_0$, logo tomando o valor δ da definição de continuidade de f em z_0, existe um natural n_0 tal que $|z_n - z_0| < \delta$, para todo $n > n_0$. Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n > n_0.$$

Assim, a sequência $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(z_0)$.

Suponhamos agora que, para toda sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números complexos em Ω, convergente para z_0, a sequência das imagens, $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(z_0)$. E, por contradição, suponhamos que f não seja contínua em z_0. Logo, para algum $\varepsilon_0 > 0$ e para todo $\delta > 0$ existe $z_\delta \in \Omega$, com $|z_\delta - z_0| < \delta$, tal que

$$|f(z_\delta) - f(z_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Assim, tomando $\delta = 1/n$ existe $z_n \in \Omega$ satisfazendo

$$|f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon_0, \quad \text{com} \quad |z_n - z_0| < 1/n.$$

Portanto, obtemos uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Ω, com $z_n \to z_0$, mas $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para $f(z_0)$, o que é uma contradição. Resulta então que f é contínua em z_0. □

Teorema 7. *Se $f : K \to \mathbb{C}$ é uma função contínua num conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, então f é limitada.*

Demonstração. Mostremos que existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in K$. Suponha, por contradição, que f não seja limitada, isto é, $\forall M > 0$ existe um $z \in K$ tal que $|f(z)| > M$. Assim, podemos construir uma sequência da seguinte forma:

- para $M = 1, \exists z_1 \in K$ tal que $|f(z_1)| > 1$;
- para $M = 2, \exists z_2 \in K$ tal que $|f(z_2)| > 2$;

$\vdots$

- para $M = n \in \mathbb{N}, \exists z_n \in K$ tal que $|f(z_n)| > n$.

Portanto, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em K que satisfaz $|f(z_n)| > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como K é compacto, logo limitado, existe uma subsequência (z_{n_k}) de (z_n) convergente. Isto é, $\exists \alpha$ tal que $z_{n_k} \to \alpha$, com $\alpha \in K$, já que K é fechado. Mas, $|f(z_{n_k})| > n_k \to \infty$ o que implica que $(f(z_{n_k}))$ não converge. Pelo teorema anterior f não é contínua em $\alpha \in K$, o que é uma contradição. Com isso, concluímos que f é limitada. □

Definição 28. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, denomina-se* **valor absoluto ou módulo de** f *a função*

$$|f| : \Omega \to \mathbb{R}, \quad |f|(z) = |f(z)|, \; \forall\, z \in \Omega.$$

Sendo $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|$, quaisquer que sejam $z, z_0 \in \Omega$, conclui-se que se f for contínua em Ω então $|f|$ será contínua em Ω. Por esta razão, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 8. *Se $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua no compacto K então o módulo de f assume o máximo e o mínimo valor em K.*

Demonstração. Existência de Máximo: provemos que existe $z_0 \in K$, tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \forall z \in K.$$

Como K é compacto, do teorema anterior segue que

$$A = \{|f(z)|; z \in K\} \subset \mathbb{R} \text{ é limitado.}$$

Portanto, existe $\alpha = \sup A$, o qual satisfaz:

(i) $|f(z)| \leq \alpha$, $\forall z \in K$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_\varepsilon \in K$ tal que $\alpha - \varepsilon < |f(z_\varepsilon)|$.

Por (ii), tomando-se $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $\exists z_n \in K$ tal que

$$\alpha - \frac{1}{n} < |f(z_n)| \overset{\text{(i)}}{\leq} \alpha. \tag{3}$$

Como K é compacto, existe uma subsequência (z_{n_k}) de (z_n) convergente para um ponto $z_0 \in K$ (já que K é fechado), ou seja, $z_{n_k} \to z_0$.

Voltando em (3) para pontos da forma z_{n_k} tem-se

$$\alpha - \frac{1}{n_k} < |f(z_{n_k})| \leq \alpha.$$

Usando a continuidade de f em z_0 e aplicando o limite na desigualdade acima, com $k \to \infty$, obtemos

$$\alpha \leq |f(z_0)| \leq \alpha,$$

ou seja,

$$|f(z_0)| = \alpha,$$

mostrando que $z_0 \in K$ é um ponto que corresponde ao valor máximo de $|f(z)|$, com $z \in K$, o que conclui a prova da existência do máximo. (Exercício - prova do mínimo). $\square$

18.3 Lista de exercícios

1. Prove o item 1 da Proposição 10.

2. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos tal que $|z_n| \to |z_0|$ e $arg(z_n) \to arg(z_0)$. Mostre que $z_n \to z_0$.

3. Analise a convergência das sequências (z_n):

a) $z_n = 1 + ni$ b) $z_n = \dfrac{1}{n} + i\dfrac{1}{2^n}$ c) $z_n = \dfrac{n}{n+1} + ie^{\frac{1}{n}}$

d) Se $w_n = \dfrac{1}{3^n} + i\dfrac{(-1)^n}{4^n}$, considere $z_n = \sum_{j=1}^{n} w_j$

e) $z_n = i + \left(\dfrac{2+3i}{5}\right)^n$ f) $z_n = \sqrt[n]{ni}$ g) $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

4. Dada $f : K \to \mathbb{C}$ contínua, sendo K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, prove que o $|f(z)|$ possui um mínimo em K.

5. Se $f(z) = e^{\frac{-2}{|z|}}$ para $0 < |z| < 1$. é possível definir $f(0)$ de modo que f seja contínua em $z = 0$? Justifique.

6. Usando sequências, mostre que o ramo da função $f(z) = \sqrt{z}$ não é contínua em $z = x_0$, onde $x_0 < 0$.

7. Mostre que se a série $\sum z_n$ é convergente então $z_n \to 0$.

8. Se a série $\sum z_n$ converge em valor absoluto, isto é, $\sum |z_n|$ converge, mostre que a série converge.

9. Defina a operação de soma e a operação de produto entre séries em $\mathbb{C}$. Estude a convergência da soma $\sum(z_n + w_n)$ e do produto $\sum(z_n.w_n)$, onde $\sum z_n$ e $\sum w_n$ são séries em $\mathbb{C}$.

10. Prove que se f é contínua em um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ então f é uniformemente contínua.

19 Funções holomorfas ou analíticas

Este capítulo traz a definição de derivada de uma função de variável complexa e também a definição de função holomorfa ou analítica. é demonstrado o fato que diferenciabilidade implica em continuidade. Além disso, são apresentadas as Condições de Cauchy-Riemann e a definição de função harmônica.

20 Derivada de uma função de variável complexa

Nesta seção vamos apresentar condições para que uma função de variável complexa seja diferenciável em um determinado ponto de seu domínio. Quando a função for diferenciável em um aberto, daremos o nome de função holomorfa ou analítica. Vejamos primeiramente o conceito de derivada.

Definição 29. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa e $z_0 \in \Omega$. Dizemos que f é derivável em z_0 quando existir*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

sendo este limite denominado **derivada da função** f **no ponto** z_0*. Desta forma, quando f for derivável no ponto z_0, escreve-se*

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Se denominarmos $\Delta z = z - z_0$ então a derivada pode ser escrita por

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Observação 21. Na definição acima, nota-se que a derivada de uma função f em um dado ponto z_0, quando existir, é um número complexo que independe do caminho (curva em $\mathbb{C}$) que z faz ao tender para z_0.

Analisemos os exemplos a seguir, verificando se a função dada é derivável.

Exemplo 22. Considere a função complexa constante, isto é, $f(z) = c$, c constante, para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, vamos calcular a derivada pela definição, ou seja,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = 0.$$

Portanto, derivada de constante é zero.

Exemplo 23. Considere a função identidade: $f(z) = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$. Logo, para $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

Como z_0 é arbitrário, tem-se $f'(z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Exemplo 24. Considere a função $f(z) = z^2$, então $D_f = \mathbb{C}$. Mostremos que f é derivável em todo $\mathbb{C}$ e que $f'(z) = 2z$. De fato, seja $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrário, por definição temos:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{(z - z_0)} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Exemplo 25. Seja $f(z) = \bar{z}$, com $D_f = \mathbb{C}$. Verifiquemos se f é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ arbitrário. Denotando $z = x + iy$, temos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \frac{\overline{(z - z_0)}}{\overline{(z - z_0)}} = \lim_{z \to z_0} \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)^2}{|z - z_0|^2} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{[(x - x_0) + i(-y + y_0)]^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \lim_{z \to z_0} \frac{(x - x_0)^2 - (-y + y_0)^2 + 2(x - x_0)(-y + y_0)i}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Analisemos primeiramente a parte real deste quociente, dada por

$$u(x, y) = \frac{(x - x_0)^2 - (-y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Verifiquemos se existe $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y)$.

Tomemos as direções $\gamma_1(t) = (x_0, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e também $\gamma_2(t) = (t, y_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\lim_{t \to y_0} u(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to y_0} -\frac{(-t + y_0)^2}{(t - y_0)^2} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to x_0} u(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to x_0} \frac{(t - x_0)^2}{(t - x_0)^2} = 1.$$

Portanto, não existe $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y)$ e, assim, f não é derivável em z_0.

O exemplo a seguir é interessante, pois f será derivável em apenas um ponto de $\mathbb{C}$.

Exemplo 26. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = |z|^2$.

Se $z = x + iy$ então $f(z) = x^2 + y^2$, ou seja, $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$.

Provemos que f é derivável apenas em $z_0 = 0$. De fato,

- f é derivável em $z_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{|z|^2} \bar{z} = \lim_{x + iy \to 0} (x - iy) = 0 \end{aligned}$$

- f não é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{(z - z_0)} \cdot \frac{\overline{(z - z_0)}}{\overline{(z - z_0)}} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{(|z|^2 - |z_0|^2)\overline{(z - z_0)}}{|z - z_0|^2} = \lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{(x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2)(x - x_0 + i(y_0 - y))}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{w} \end{aligned}$$

Supondo $x_0 \neq 0$, vamos tomar a parte real do quociente acima, ou seja,

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{(x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

(Se acaso, $x_0 = 0$, como $z_0 \neq 0$, segue que $y_0 \neq 0$ e daí pode-se escolher a parte imaginária).

Para estudar o limite desta função de duas variáveis, vamos escolher duas direções distintas: $\gamma_1(t) = (t, y_0),\ t \in \mathbb{R}$, e $\gamma_2 = (x_0, t),\ t \in \mathbb{R}$. Na direção dada por γ_1, temos

$$\lim_{t \to x_0} \frac{t^2 + y_0^2 - x_0^2 - y_0^2}{(t - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2}(t - x_0) = \lim_{t \to x_0} \frac{(t^2 - x_0^2)(t - x_0)}{(t - x_0)^2} = \lim_{t \to x_0}(t + x_0) = 2x_0 \neq 0.$$

Na direção dada por γ_2, temos

$$\lim_{t \to y_0} \frac{x_0^2 + t^2 - x_0^2 - y_0^2}{(t - y_0)^2}(x_0 - x_0) = 0.$$

Portanto, $f(z) = |z|^2$ é derivável apenas no ponto 0.

O primeiro resultado apresentado a seguir relaciona diferenciabilidade e continuidade de uma função de variável complexa.

Proposição 13. *Se f é derivável em $z_0 \in D_f$ então f é contínua em z_0.*

Demonstração. Por hipótese, existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Mostremos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, ou equivalentemente, $\lim\limits_{z \to z_0}[f(z) - f(z_0)] = 0$.

De fato,

$$\lim_{z \to z_0}[f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}(z - z_0) = f'(z_0) \lim_{z \to z_0}(z - z_0) = 0.$$

□

Definição 30. *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é denomindada* **função analítica ou holomorfa em** Ω *se f é derivável em todos os pontos de Ω. Dizemos que f é* **holomorfa em** z_0 *se f é holomorfa em um aberto Ω que contém z_0.*
Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é denominada **função inteira** *se é derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$.*

Exemplo 27. Pelos exemplos anteriores podemos concluir que:

1. $f(z) = c$, c constante, é uma função inteira.
2. $f(z) = z$ é uma função inteira.
3. $f(z) = z^2$ é uma função inteira.
4. $f(z) = |z|^2$ não é holomorfa, pois é derivável apenas em 0.

Proposição 14 (Derivada e operações). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ duas funções de variável complexa deriváveis em $z_0 \in \Omega$. Então,*

i) λf é derivável em z_0 e $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$;

ii) $f + g$ é derivável em z_0 e $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;

iii) $f \cdot g$ é derivável em z_0 e $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;

iv) Se $g(z_0) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é derivável em z_0 e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$.

Demonstração.

i) Exercício. (Análoga ao caso real)

ii) Exercício. (Análoga ao caso real)

iii) Regra do produto:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left\{ \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] g(z) + f(z_0) \left[\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \right\} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).
\end{aligned}$$

iv) Regra do quociente: basta mostrar que $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{-g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)g(z_0)}}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} - \left[\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \cdot \frac{1}{g(z)g(z_0)} = -g'(z_0) \frac{1}{[g(z_0)]^2}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 28. Dadas $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções polinomiais complexas, segue dos exemplos e da proposição anterior que ambas são funções inteiras. Assim, $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ definida em $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; q(z) \neq 0\}$ é uma função holomorfa.

Exercício 11. Prove que se $f(z) = z^n$ então $f'(z) = nz^{n-1}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

O próximo exemplo ilustra um fato interessante sobre o valor da derivada de funções de variável complexa com valores em $\mathbb{R}$.

Exemplo 29. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto. Mostremos que se f for derivável em $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ então $f'(z_0) = 0$. De fato, como f é derivável em z_0, existe

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Denotando $\Delta z = h + ik$, podemos escrever o limite acima como sendo

$$f'(z_0) = \lim_{h+ik \to 0} \frac{f(x_0 + h + i(y_0 + k)) - f(x_0 + iy_0)}{h + ik}.$$

Portanto, pela Observação 21, esse limite deve existir em todas as direções $(h, k) \to (0, 0)$. Tomemos as direções $(h, 0)$, com $h \in \mathbb{R}^*$ e $(0, k)$, com $k \in \mathbb{R}^*$, assim

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h + i(y_0)) - f(x_0 + iy_0)}{h} (= \alpha \in \mathbb{R}) \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{-[f(x_0 + i(y_0 + k)) - f(x_0 + iy_0)]}{k^2} ki (= \beta i, \ \ \beta \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Pela unicidade do limite $\alpha = \beta i$, ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Portanto, $f'(z_0) = 0$.

Observação 22. A função projeção $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $P(x, y) = x$ é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$, já que as derivadas parciais

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

existem e são contínuas em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, o que implica na diferenciabilidade de P. Analogamente para a função $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $Q(x, y) = y$. Vejamos a seguir um exemplo que mostra que isto não acontece no caso complexo.

Exemplo 30. Vamos mostrar que as projeções no caso complexo não são diferenciáveis. Considere então as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x + iy) = x$ e $g(x + iy) = y$. Assim:

• $f(x + iy) = x$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|^2} \cdot \overline{(z - z_0)} \\ &= \lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_0) + (x - x_0)(-y + y_0)i}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{w} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(w) = \frac{(x - x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Estudemos a existência do $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Para isto tomemos dois caminhos distintos, a saber $\gamma_1(t) = (t, y_0),\ t \in \mathbb{R}$ e $\gamma_2(t) = (x_0, t),\ t \in \mathbb{R}$, temos então:

Na direção γ_1

$$\lim_{t \to x_0} \frac{(t - x_0)^2}{(t - x_0)^2 + 0} = 1.$$

Na direção γ_2

$$\lim_{t \to y_0} \frac{0}{0 + (t - y_0)^2} = 0.$$

Como os valores são distintos, segue que o limite não existe, portanto, f não é derivável em ponto algum de $\mathbb{C}$.

• $g(x + iy) = y$, este caso fica como exercício.

20.1 Lista de exercícios

1. Mostre que a função $f(z) = f(x+yi) = x + 4yi$ não é derivável em ponto algum de seu domínio.

2. Determine o domínio e verifique em qual conjunto as funções abaixo são deriváveis:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

b) $f(z) = 15z^2 - 4z + 1 - 3i$

c) $f(z) = (z^6 - i)(z^2 + z - 1 + 5i)$

d) $f(z) = \left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i}\right)^2$

3. Mostre que a função

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \end{cases}$$

não é diferenciável em $z = 0$.

4. (Regra de L'Hôpital) Se f e g são funções deriváveis em $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

5. Use a Regra de L'Hôpital para calcular os limites:

a) $\displaystyle\lim_{z \to 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}$

b) $\displaystyle\lim_{z \to 1+i} \frac{z^5 + 4z}{z^2 - 2z + 2}$

c) $\displaystyle\lim_{z \to \sqrt{2}i} \frac{z^3 + 5z^2 + 2z + 10}{z^5 + 2z^3}$

6. (A) (Regra da Cadeia) Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : W \to \mathbb{C}$ funções de variável complexa, com $f(\Omega) \subset W$. Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $w_0 = f(z_0)$, mostre que a composta $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e vale $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$. (B) Faça um exemplo.

21 Condições de Cauchy-Riemann

Nesta seção mostraremos que o estudo de diferenciabilidade de uma função de variável complexa em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ está relacionado ao estudo da existência das derivadas parciais das partes real e imaginária da função no ponto (x_0, y_0).

Considere $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa derivável em $z_0 = a + bi \in \Omega$. Escrevendo f na forma

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

e denotando $\Delta z = h + ik$, pela definição de derivada no ponto z_0, temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h+ik \to 0} \frac{f(a+bi+h+ik) - f(a+bi)}{h+ik} \\ &= \lim_{h+ik \to 0} \frac{u(a+h,b+k) - u(a,b) + i(v(a+h,b+k) - v(a,b))}{h+ik}. \end{aligned}$$

Sabendo que este limite existe em todas as direções, então podemos expressá-lo usando direções particulares. Por exemplo,

1. $k = 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(a+h,b) - u(a,b)}{h} + i \left(\frac{v(a+h,b) - v(a,b)}{h} \right) \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a,b). \end{aligned} \tag{4}$$

2. $h = 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{k \to 0} \left[\frac{u(a,b+k) - u(a,b)}{ik} + i \frac{(v(a,b+k) - v(a,b))}{ik} \right] \\ &= \lim_{k \to 0} \left[\left(\frac{u(a,b+k) - u(a,b)}{k} \right)(-i) + \frac{v(a,b+k) - v(a,b)}{k} \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a,b). \end{aligned} \tag{5}$$

Pela unicidade do limite, de (4) e (5) tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a,b) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(a,b) \end{cases}$$

Essas duas igualdades são denominadas **Condições de Cauchy-Riemann**. Com essa construção, concluímos o seguinte resultado.

Teorema 9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa derivável em $z_0 = a + bi \in \Omega$ e ainda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Então existem as derivadas parciais: $\frac{\partial u}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)$, e $\frac{\partial v}{\partial y}(a, b)$ e satisfazem as Condições de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a, b), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(a, b) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(a, b). \end{cases}$$

Observação 23. 1. O teorema mostra uma condição necessária para que f seja derivável num ponto z_0. Assim, os pontos do domínio da função em que essas duas igualdades não são válidas, conclui-se que f não é derivável nesses pontos.

2. A recíproca do Teorema 9 não é verdadeira. Tome, por exemplo,

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} 0 + 0i, & \text{se } xy = 0 \\ 1 + 0i, & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

Observe que $f(0) = 0$ por definição da f. Mostremos que as Condições de Cauchy Riemann estão satisfeitas em $(0, 0)$, mas f não é derivável em $z_0 = 0$. De fato, neste caso

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } xy = 0 \\ 1, & \text{se } xy \neq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = 0. \qquad \text{Logo,}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0 + h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0).$$

As Condições de Cauchy-Riemann estão satisfeitas em $(0, 0)$, mas f não é contínua em $(0, 0)$ e, portanto, não é derivável em $(0, 0)$. Note que, tomando $\varepsilon = 1/2$ e qualquer $\delta > 0$, tem-se

$$f(B(0, \delta)) \cap B(1, 1/2) \neq \varnothing$$

pois há pontos em $B(0, \delta)$ da forma $\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ tal que $f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \in B(1, 1/2)$, ou seja, não estão na bola de centro na origem e raio ε.

Exemplo 31. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x + iy) = x$. Analisemos as Condições de Cauchy-Riemann, primeiramente note que:

$$\begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = 0. \end{cases}$$

Calculando as derivadas parciais das partes real e imaginária da f obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Portanto, as Condições de Cauchy-Riemann não estão satisfeitas em ponto algum de $\mathbb{C}$. Segue do teorema anterior que f não é derivável em $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Exemplo 32. Vamos verificar em quais pontos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ as Condições de Cauchy-Riemann estão satisfeitas nos casos: a) $g(z) = y$, b) $h(z) = yi$ e c) $f(z) = x^2y^2$.

Pensemos no caso c). Note que $u(x,y) = x^2y^2$ e $v(x,y) = 0$, para todo par (x,y). Assim, das Condições de Cauchy-Riemann obtemos:

$$2xy^2 = 0, \qquad 2x^2y = 0.$$

O conjunto solução deste sistema é o conjunto formado pelos eixos coordenados. Com isso, pelo teorema anterior concluímos que f não é derivável fora deste conjunto solução. Verifiquemos o que acontece para os pontos da forma $(a,0)$. Para isto, analisemos a existência do limite

$$\lim_{h+ik\to 0} \frac{f(a+h+ki) - f(a)}{h+ik} = \lim_{h+ik\to 0} \frac{(a+h)^2k^2}{h+ik}.$$

Como

$$\left|\frac{(a+h)^2k^2}{h+ik}\right| = \frac{(a+h)^2k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = (a+h)^2|k|\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

e sendo $\dfrac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ limitado e $(a+h)^2|k| \to 0$ quando $h+ik \to 0$, segue que $f'(a+0i) = 0$.

Exercício: estude os pontos da forma $z = 0 + ib$.

Observação 24. Comparemos o resultado anterior com o caso $p(x,y) = x^2y^2$, função de duas variáveis reais. Sabe-se que p é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$ se, e só se, para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ existem α e β números reais tais que

$$p(a+h, b+k) = p(a,b) + \alpha h + \beta k + r(h,k), \qquad \text{com} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Assim, verifiquemos essa igualdade para p. Usando a expressão de p, temos $\alpha = \dfrac{\partial p}{\partial x}(a,b) = 2ab^2$ e $\beta = \dfrac{\partial p}{\partial y}(a,b) = 2a^2b$. Fazendo as devidas substituições e isolando $r(h,k)$ na expressão acima, ficamos com:

$$r(h,k) = a^2k^2 + h^2b^2 + h^2k^2 + 2bh^2k + 2ahk^2 + 4abhk \Rightarrow$$

$$\left|\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(a^2|k|^2 + |h|^2b^2 + |h|^2|k|^2 + 2|b||h|^2|k| + 2|a||h||k|^2 + 4|a||b||h||k|).$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$. Ou seja, essa função é de fato diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$, diferentemente do que ocorreu com $f(x+iy) = x^2y^2$.

Da Observação 23, nota-se que as Condições de Cauchy-Riemann não são suficientes para que $f = u + iv$ seja derivável, é preciso algo mais, que é dado no resultado a seguir.

Teorema 10. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, com $z = x + iy$. Se as derivadas parciais de u e v existem em uma vizinhança de (a,b), com $z_0 = a + ib \in \Omega$, são contínuas em (a,b) e ainda valem as Condições de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a,b) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(a,b) \end{cases}$$

então f é derivável em $z_0 = a + ib$ e a derivada neste ponto é dada pela expressão

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b).$$

Demonstração. Pelas hipóteses sobre u e v, segue que u e v são funções de duas variáveis reais diferenciáveis em (a,b), ou seja,

$$u(a+h, b+k) = u(a,b) + \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)k + r_u(h,k) \tag{6}$$

e

$$v(a+h, b+k) = v(a,b) + \frac{\partial v}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)k + r_v(h,k) \tag{7}$$

satisfazendo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r_u(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r_v(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Vamos mostrar que f é derivável usando a definição de derivada por limite. Assim, escrevendo f em termos de u e v e ainda, fazendo $\Delta z = h + ik$, temos:

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) =& f(a + bi + h + ki) - f(a + bi) \\ =& f(a + h + (b+k)i) - f(a + bi) = \\ =& u(a+h, b+k) - u(a,b) + i(v(a+h, b+k) - v(a,b)) \end{aligned}$$

Usando (6) e (7), obtemos:

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)k+r_u(h,k)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial v}{\partial y}(a,b)k+r_v(h,k)\right)$$

$$\overset{\text{Cond. C-R}}{=}\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)h-\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)k+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)k\right)+r_u(h,k)+ir_v(h,k).$$

Assim,

$$\frac{f(a+h+(b+k)i)-f(a+bi)}{h+ik}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\right)(h+ki)}{h+ki}+\frac{r_u(h,k)+ir_v(h,k)}{h+ki}$$

$$\Rightarrow\frac{f(a+h+(b+k)i)-f(a+bi)}{h+ki}=\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)+\frac{r_u(h,k)+ir_v(h,k)}{h+ki}\qquad(*)$$

Resta apenas provar que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\left(\frac{r_u(h,k)+ir_v(h,k)}{h+ki}\right)=0.$

De fato,

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{r_u(h,k)+ir_v(h,k)}{h+ki}\right| &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|r_u(h,k)+ir_v(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left(\frac{|r_u(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{|r_v(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)=0\end{aligned}$$

pois u e v são deriváveis em (a,b).

Fazendo $\Delta z=h+ik\to 0$ em $(*)$, obtemos que f é derivável em $z_0=a+bi$ e que

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b).$$

□

Corolário 1. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ uma função de variável complexa tal que $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, com $z=x+iy$. Se as derivadas parciais de u e v existem e são contínuas em Ω satisfazendo às Condições de Cauchy-Riemann, então f é holomorfa em Ω.

Exemplo 33. Considere a função $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $D_f=\mathbb{C}-\{0\}$. Verifiquemos, usando o teorema anterior que f é holomorfa e calculemos a derivada.

De fato, primeiro note que

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Calculemos as derivadas parciais u_x, u_y, v_x e v_y:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
u_y &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
v_x &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
v_y &= \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Logo, todas as derivadas existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. E mais ainda, nota-se que as Condições de Cauchy-Riemann estão satisfeita neste mesmo conjunto, pois

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ é holomorfa e

$$f'(z) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

21.1 Lista de exercícios

1. Determinar os pontos onde as funções abaixo são diferenciáveis e encontrar sua derivada nesses pontos:

a) $f(z) = z^2\bar{z}$ b) $f(z) = f(x+iy) = xy + iy$ c) $f(z) = f(x+iy) = x^2 + iy^2$

d) $f(z) = e^{|z|}$ e) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ f) $f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$

g) $f(z) = zIm(z)$ h) $f(x+iy) = \operatorname{sen} x + \cosh y + i\cos x \operatorname{senh} y$

2. Quais das funções acima são analíticas em algum subconjunto (descreva-o) de $\mathbb{C}$? E quais são funções inteiras?

3. Sejam $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$. Se u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, mostre que o mesmo ocorrerá com u_1 e v_1 nos seguintes casos:

a) $u_1 = u^2 - v^2,\ v_1 = 2uv$ b) $u_1 = e^u \cos v,\ v_1 = e^u \operatorname{sen} v$ c) $u_1 = -v,\ v_1 = u$

4. Use as condições de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z)$ e $f''(z)$ existem e calcule-as para:

a) $f(z) = iz + 2$ b) $f(x+iy) = e^{-x}(\cos y - i\operatorname{sen} y)$ c) $f(z) = z^3$.

5. Mostre que a função $f(x+iy) = x^2 + iy^3$ não é analítica em nenhum subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.

6. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função derivável tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ onde $z = x + iy$, sendo (r,θ) as coordenadas polares de z, mostre que as condições de Cauchy-Riemann (em coordenadas polares) são:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

7. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa que possui derivada contínua em todo ponto de Ω. Se $f'(z) \neq 0$ em Ω, mostre que f é uma função localmente biunívoca em Ω. Além disso, se f^{-1} for derivável em cada $w = f(z)$, mostre também que

$$\frac{df^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{f'(z)}.$$

8. Mostre que:

a) Se f é uma função inteira e só assume valores reais, então f deve ser constante.

b) Se f é uma função inteira e $|f(z)|$ é constante em $\mathbb{C}$, então f deve ser constante.

c) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa em Ω. Se $f'(z) = 0$ em Ω então f é constante.

9. Mostre que, se $w = f(z)$ é holomorfa, então a função $w = \overline{f(\bar{z})}$ é também holomorfa.

10. Suponha $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $f = u + iv$ e seja $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$. Considere que z está tendendo a z_0 segundo a direção dada pelo vetor $\vec{\eta}$ fazendo um ângulo θ com a direção positiva do eixo dos x. Demonstre que

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}\right),$$

as derivadas acima são as derivadas direcionais de u e de v na direção de $\vec{\eta}$, respectivamente.

22 Funções harmônicas

Uma propriedade interessante das funções analíticas ou holomorfas envolvendo as partes real e imaginária é que ambas são funções harmônicas. Comecemos então esta seção com o seguinte conceito:

Definição 31. *Uma função u de duas variáveis reais x e y que possui derivadas parciais de primeira e segunda ordens contínuas em um domínio D (isto é, de classe C^2 em D) e que satisfaz a equação diferencial parcial abaixo, conhecida como equação de Laplace,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 u = 0,$$

é denominada **função harmônica** *em D. O símbolo ∇^2 indica o laplaciano.*

Observação 25. Será demonstrado, usando a teoria de integração, que se uma função $f = u + iv$ de variável complexa é holomorfa em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ então todas as derivadas de f de todas as ordens, isto é, f', f'', $f^{(3)}$, ...também são holomorfas em z_0. Com essa informação podemos concluir que todas as derivadas parciais de todas as ordens de u e v existem e são contínuas em (x_0, y_0).

No contexto de variável complexa, tem-se o resultado abaixo que garante que toda função holomorfa tem partes real e imaginária harmônicas.

Teorema 11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, com $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, é uma função holomorfa em Ω, então as funções u e v são harmônicas em Ω.*

Demonstração. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função holomorfa em um domínio Ω contido no plano complexo. Pelo Teorema 9 valem as Condições de Cauchy-Riemann para todo ponto $(x,y) \in \Omega$, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vamos mostrar que u é uma função harmônica. Sabemos que as derivadas parciais de segunda ordem das funções u e v existem, pela Observação 25, assim podemos calcular as derivadas parciais de segunda ordem de u e usar também Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Mais ainda, da Observação 25, segue que u e v são funções de classe C^2. Logo, pelo Teorema de Schwarz, vale $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, o que implica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

isto é, a função u satisfaz a Equação de Laplace e, portanto, é uma função harmônica em Ω. Analogamente prova-se que v é harmônica em Ω.

$\square$

Exemplo 34. Seja $f(z) = z^2$, definida em todo $\mathbb{C}$. Como f é uma função inteira, com $f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$, pelo teorema anterior, concluímos que $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$ são funções harmônicas em $\mathbb{R}^2$.

Com o teorema anterior podemos concluir que uma função holomorfa apresenta suas partes real e imaginária necessariamente harmônicas. Agora, suponha que se conheça uma função de duas variáveis reais $u(x,y)$ que é harmônica em D. Se for possível determinar uma função $v(x,y)$ harmônica em D que satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em D, a função v é chamada **conjugada harmônica de** u. Combinando as funções u e v, obtemos uma função de variável complexa, $f = u + iv$, que é holomorfa em D.

Exemplo 35. A função $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ é harmônica em $\mathbb{R}^2$. Então a função $v(x,y) = 3x^2 - y^3 + 5x + c$, c uma constante real, é conjugada harmônica de u. De fato, das derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x,$$

vemos que u satisfaz a Equação de Laplace.

Vamos agora determinar uma função v que é conjugada harmônica de u. Para isto, primeiramente usemos as Condições de Cauchy-Riemann, ou seja,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 5.$$

Vamos integrar a primeira equação acima com respeito à variável y, o que fornece $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$, onde $h(x)$ é uma função da variável real x proveniente da integração em y. Tomando essa expressão e derivando em relação a x obtemos $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x)$. E comparando com a derivada parcial de v com respeito à x dada acima, ficamos com $h'(x) = 5$. Portanto, $h(x) = 5x + c$, com c constante real. Substituindo na expressão de v, obtemos finalmente

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 5x + c.$$

A seguir uma definição que envolve o conceito de função analítica.

Definição 32. *Um* **ponto singular** *(ou uma* **singularidade***) de uma função complexa $w = f(z)$ é um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que existe um disco $B(z_0;\delta)$ no qual f é analítica, exceto no ponto z_0.*

Por exemplo, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ apresenta um ponto singular $z_0 = 0$.

22.1 Lista de exercícios

1. Mostre que a função u é harmônica em um domínio apropriado D e determine a conjugada harmônica de u. Com essas funções construa a correspondente hunção holomorfa $f = u + iv$:

a) $u(x,y) = x^2 - y^2$ b) $u(x,y) = 2x - 2xy$

c) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ d) $u(x,y) = -e^{-x}\operatorname{sen} y$

e) $u(x,y) = xy + x + 2y - 5$, com $f(2i) = -1 + 5i$.

f) $u(x,y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$, com $f(1+i) = 5 + 4i$.

2. Existe uma função $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa, tal que $u(x,y) = y^3 + 5x$? Justifique.

3. Mostre que $u = u(x,y)$ é uma função harmônica em algum subconjunto de $\mathbb{C}$ e encontre uma conjugada $v(x,y)$ harmônica para os seguintes casos:

a) $u(x,y) = 2x(1-y)$ b) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

c) $u(x,y) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$ d) $u(x,y) = e^y \cos x$

4. Se a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é holomorfa em algum domínio Ω, então as partes real e imaginária podem ser usadas para definir duas famílias de curvas: $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = c_2$, com c_1, c_2 constantes reais arbitrárias. (A) Mostre que essas curvas são ortogonais. (B) Ilustre esta propriedade usando a função $f(z) = z^2$.

5. Determine todas as funções $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que a função de variável complexa dada por $f(x+iy) = u(x,y) + iu(x,y)$ seja inteira.

23 Funções elementares

Já vimos a importante definição de função holomorfa, pois com ela podemos definir a classe de funções de maior interesse da Análise Complexa. A seguir faremos o estudo de funções elementares que pertencem a esta classe. Em particular, estudaremos as funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, também as trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas. Também examinaremos a atuação dessas funções como transformações no plano complexo.

23.1 Função polinomial e racional

Vale lembrar que já introduzimos algumas funções elementares, como por exemplo, as **funções polinomais complexas**, que são funções inteiras. A expressão geral de uma função polinomial complexa é

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n,$$

com a_0, $a_1, ..., a_n$ constantes complexas e cuja derivada é dada por

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + ... + n a_n z^{n-1}.$$

Além disso, também trabalhamos com as **funções racionais**. Dados dois polinômios complexos $p(z)$ e $q(z)$ sem zeros comuns, então definimos a função racional

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \qquad \text{em} \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; q(z) \neq 0\},$$

que é holomorfa em Ω e cuja derivada é obtida pela regra de derivação do quociente de duas funções complexas.

23.2 Função exponencial

Sabemos que a função exponencial real f está definida em toda a reta $\mathbb{R}$, é contínua, é derivável, satisfaz a equação funcional

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

e também satisfaz a equação diferencial

$$\frac{df}{dx} = f(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ao definirmos a exponencial complexa é natural exigirmos que seja definida em todo $\mathbb{C}$, que seja contínua, holomorfa e também que satisfaça a equação diferencial acima. E claro, que sua restrição ao conjunto $\mathbb{R}$ seja igual à exponencial real. Assim, vamos supor que uma função de variável complexa com essas características exista e seja única e vamos agora construir sua expressão em termos das partes real e imaginária, buscando satisfazer essas propriedades.

Denomina-se **função exponencial complexa** a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, holomorfa, que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{df}{dz} = f(z), \qquad \text{com} \quad f\,|_{\mathbb{R}} = e^x, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Calculemos as partes real e imaginária da solução $w = f(z)$, $z = x + iy$, da função com essas propriedades. Primeiro observe que o fato de f ser holomorfa e a derivada satisfazer a equação acima, podemos escrever

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f(z) = u + iv.$$

Assim, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x} = v$. A solução geral da primeira equação diferencial é

$$u(x,y) = e^x h(y). \tag{8}$$

Supondo h uma função de classe C^2, substituindo na Condição de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

observando que $\dfrac{\partial v}{\partial x} = v$, obtemos:

$$v = -e^x \frac{dh}{dy}. \tag{9}$$

Substituindo (8) e (9) na outra condição de Cauchy-Riemann, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, (ou seja, derive a expressão em (9) com respeito à y e substitua na igualdade), obtemos

$$h''(y) + h(y) = 0, \qquad \text{(EDO de segunda ordem linear e homogênea)}$$

cuja solução geral é $h(y) = a\cos y + b \operatorname{sen} y$, sendo a, b constantes. Logo,

$$u(x,y) = e^x h(y) = e^x(a\cos y + b\sin y)$$
$$v(x,y) = -e^x h'(y) = e^x(a\sin y - b\cos y).$$

Para $y = 0$ temos $u = ae^x$ e $v = -be^x$, mas como devemos recuperar a exponencial real, basta considerarmos $a = 1$ e $b = 0$. Portanto, temos a seguinte

Definição 33. *Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos*

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = e^z$, é denominada **função exponencial complexa**.

Vejamos algumas propriedades importantes da exponencial complexa:

1. No caso de $z = yi$ ser um número imaginário puro, temos $e^{yi} = \cos y + i\sin y$.
2. No caso $z = 0$, temos $e^{0+0i} = e^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1$.
3. Módulo da função exponencial. Se $z = x + iy$, temos

$$\begin{aligned} |e^z| = |e^x(\cos y + i\sin y)| &= |e^x||\cos y + i\sin y| \\ &= e^x(\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}) \\ &= e^x \cdot 1 \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Portanto, $|e^z| > 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

4. Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então

$$\begin{aligned} e^{z+w} = e^{(x+a)+i(y+b)} &= e^{x+a}(\cos(y+b) + i\sin(y+b)) \\ &= e^x \cdot e^a(\cos y \cos b - \sin y \sin b + i(\sin y \cos b + \sin b \cos y)) \\ &= e^x(\cos y + i\sin y)e^a(\cos b + i\sin b) = e^z \cdot e^w, \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

5. A função exponencial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira e vale $(e^z)' = e^z$. Segue deste fato que a função exponencial complexa é contínua em $\mathbb{C}$.

6. $\text{Re}\,(f(z)) = e^x \cos y$ e $\text{Im}\,(f(z)) = e^x \sin y$ são funções harmônicas.

7. A exponencial complexa é periódica (portanto, não injetora).

   De fato, seja $z = x + yi$

$$\begin{aligned} f(z + 2\pi i) = e^{x+(y+2\pi)i} &= e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) \\ &= e^z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

8. A imagem $f(z)$ na forma polar. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, então $|f(z)| = e^x$ e $\arg(f(z)) = y$.

9. Se $z = x + yi$, então $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

   De fato,

$$\begin{aligned} \overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} &= e^x(\cos y - i\sin y) \\ &= e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) \\ &= e^{\overline{z}}. \end{aligned}$$

10. $\text{Im}\, f = \mathbb{C} - \{0\}$.

Vejamos como f atua na malha. Considere os subconjuntos $S_1 = \{z = x + yi \in \mathbb{C},\ x = x_0\}$ e $S_2 = \{z = x + yi \in \mathbb{C},\ y = y_0\}$ de $\mathbb{C}$.
Vamos obter $f(S_1)$ e $f(S_2)$.

Para $f(S_1)$, note que

$$\begin{aligned} &u(x,y) = e^{x_0} \cos y \\ &v(x,y) = e^{x_0} \sin y \\ &w = u + iv = e^{x_0}(\cos y + i\sin y). \end{aligned}$$

Assim, $f(S_1) = \{w \in \mathbb{C} : \ |w| = e^{x_0}\}$, que representa geometricamente a circunferência de raio e^{x_0} e centro na origem. Agora, para $f(S_2)$, note que:

$$\begin{aligned} &u(x,y) = e^x \cos y_0 \\ &v(x,y) = e^x \sin y_0. \end{aligned}$$

Como $e^x \in (0, \infty)$ e $arg(u + iv) = y_0$ constante, segue que a imagem no $w-$ plano é uma semirreta que parte da origem (sem conter a origem) e faz um ângulo y_0 com o eixo u.

23.3 Lista de exercícios

1. Determine a derivada da função $f(z) = iz^2e^{1/z}$ e os pontos em que f é derivável.

2. Encontre a imagem de S pela $f(z) = e^z$:

a) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x = 1, -2 < y < 2\}$

b) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ y = 2, -1 \leq x \leq 1\}$

c) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x_1 \leq x \leq x_2,\ y_1 \leq y \leq y_2\}$

3. Dada a função $h(z) = e^{\bar{z}}$, estude a continuidade e diferenciabilidade de h.

23.4 Funções seno e cosseno

Pela definição de exponencial complexa, temos para todo $y \in \mathbb{R}$, as seguintes igualdades

$$e^{yi} = \cos y + i\sin y,$$
$$e^{-yi} = \cos y - i\sin y.$$

Somando essas duas igualdades obtemos uma relação entre a função cosseno real e a exponencial complexa, pois

$$e^{yi} + e^{-yi} = 2\cos y$$
$$\Rightarrow \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

De modo similar, subtraindo as mesmas duas igualdades do início, obtemos uma expressão para a função seno real em função da exponencial complexa também

$$e^{yi} - e^{-yi} = 2i\sin y$$
$$\Rightarrow \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Essas duas expressões para as funções seno e cosseno reais podem ser usadas para definir as funções seno e cosseno complexas.

Definição 34. *As funções* **cosseno** *e* **seno** *complexas são definidas em todo conjunto* $\mathbb{C}$*, pelas expressões*

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \qquad e \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Proposição 15 (Propriedades)**.** *Com respeito à definição anterior temos as seguintes propriedades:*

1. *As funções* $\sin z$ *e* $\cos z$ *são inteiras.*
2. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$*, tem-se a relação:* $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$*. Além disso, valem:*
   a) $\sin(2z) = 2\sin z \cdot \cos z$;
   b) $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$;
   c) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$;
   d) $\cos(w + z) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$;
   e) $\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2 = \frac{1 + \cos z}{2}$;
   f) $\sin(-z) = -\sin z$ *e* $\cos(-z) = \cos z$.
3. *As funções* $w = \sin z$ *e* $w = \cos z$ *não são limitadas em* $\mathbb{C}$ *e o conjunto imagem é* $\mathbb{C}$.

Demonstração. 1. As funções são inteiras e as derivadas satisfazem, para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$(\sin z)' = \frac{1}{2i}(ie^{zi} + ie^{-zi}) = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z,$$

$$\begin{aligned}(\cos z)' &= \frac{1}{2}(ie^{zi} - ie^{-zi}) = \frac{1}{2}i(e^{zi} - e^{-zi}) \\ &= -\frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}) = -\sin z.\end{aligned}$$

2. Mostremos que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. De fato,

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \frac{1}{4}(e^{2zi} + 2e^{zi} \cdot e^{-zi} + e^{-2zi}) + \frac{1}{-4}(e^{2zi} - 2e^{zi} \cdot e^{-zi} + e^{-2zi}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2zi} + 2 + e^{-2zi}) + \frac{1}{-4}(e^{2zi} - 2 + e^{-2zi}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2zi} + 2 + 2 + e^{-2zi} - e^{2zi} - e^{-2zi}) \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Os itens de a) a f) são deixados como exercício.

3. Mostremos que a função cosseno é ilimitada. Para isto, seja $z = x + iy$, aplicando a definição temos $\cos z = \dfrac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$. Se considerarmos $x = 0$, ficamos com $\cos z = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2}$.

Note que $|\cos z| = \left| \dfrac{\cancelto{0}{e^{-y}} + \cancelto{\infty}{e^{y}}}{2} \right| \xrightarrow{y \to \infty} \infty$. Logo, se ao longo desses números complexos a função não é limitada, então conclui-se que a função cosseno não é limitada em $\mathbb{C}$. Analogamente, prova-se que a função seno complexa é também ilimitada. Com respeito à imagem da função, basta observar onde a malha é transformada por cada função (exercício). $\square$

Observação 26. Para os próximos resultados, precisamos lembrar das funções hiperbólicas reais, seno hiperbólico $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ e também cosseno hiperbólico $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, definidas em todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, sabe-se que essas funções satisfazem a relação

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Usando essas informações, podemos expressar as partes real e imaginária da função cosseno complexa da seguinte forma, para $z = x + iy$, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\cos z = \cos(x+iy) &= \frac{1}{2}\left(e^{ix-y}+e^{-ix+y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\right)\\
&= \sin x\left(\frac{ie^{-y}-ie^{y}}{2}\right) + \cos x\left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y.$$

De maneira análoga, demonstra-se que

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Como consequência das expressões de seno e cosseno complexo, podemos provar as igualdades envolvendo o **módulo dessas funções**:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \qquad \text{e} \qquad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2\\
&= (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\cos x)^2(\sinh y)^2\\
&= (\sin x)^2(\cosh y)^2 + [1-(\sin x)^2](\sinh y)^2\\
&= (\sin x)^2[(\cosh y)^2 - (\sinh y)^2] + (\sinh y)^2\\
&= (\sin x)^2 + (\sinh y)^2.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, prova-se a relação $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

Observação 27. A importante propriedade da periodicidade das funções seno e cosseno das funções reais continua válida para o caso complexo. Ou seja, as funções **seno e cosseno complexas são periódicas**, para todo $z \in \mathbb{C}$, valem as relações:

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \qquad \text{e} \qquad \sin(z+2\pi) = \sin z.$$

De fato, seja $z = x + yi$, então

$$
\begin{aligned}
\cos(z+2\pi) &= \cos(x+2\pi+yi)\\
&= \cosh y \cos(x+2\pi) - i \sinh y \sin(x+2\pi)\\
&= \cos y \cos x - i \sinh y \sin x\\
&= \cos(x+iy)\\
&= \cos z.
\end{aligned}
$$

Analogamente, prova-se para a função seno complexa.

23.5 Demais funções trigonométricas

Para definirmos as demais funções trigonométricas complexas é necessário determinarmos o conjunto de zeros das funções complexas $w = \sin z$ e $w = \cos z$.

Comecemos então determinando os $z \in \mathbb{C}$ tais que $\sin z = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 &\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \\ &\Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} \\ &\Rightarrow e^{2iz} = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Nesta relação, tomando $z = x + iy$, tem-se

$$\begin{aligned} |e^{2iz}| &= 1. \\ \text{Como} \quad |e^{2xi-2y}| &= |e^{-2y}(\cos 2x + i\sin 2x)| \\ &= |e^{-2y}| \sqrt{(\cos 2x)^2 + (\sin 2x)^2} \\ &= e^{-2y}. \end{aligned}$$

Assim, $e^{-2y} = 1 = e^0$, como a exponencial real é injetora, segue que $-2y = 0$, ou seja, $y = 0$.

Voltando em (10) com $z = x$, temos

$$\cos 2x + i\sin 2x = 1,$$

por igualdade de número complexo

$$\left.\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}\right\rangle 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Os zeros da função $w = \sin z$ formam o conjunto

$$\Omega_S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \quad y = 0 \text{ e } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{z = k\pi \in \mathbb{C} : \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Consideremos agora a função cosseno. Façamos $\cos z = 0$, assim

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 &\Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \\ &\Rightarrow e^{2iz} = -1. \end{aligned} \tag{11}$$

Se $z = x + iy$, então

$$|e^{2iz}| = 1 \Rightarrow |e^{2xi-2y}| = 1,$$

pelo mesmo argumento anterior, conclui-se que $y = 0$.

Voltando em (11), agora com $z = x$, tem-se

$$\cos 2x + i\sin 2x = -1 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}\right\rangle \begin{array}{l} 2x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Os zeros da função $w = \cos z$ são da forma $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\Omega_C = \{z = \frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{C} : \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 35. *Determinados os zeros das funções seno e cosseno, podemos definir, de modo análogo ao caso real, as demais funções trigonométricas, ou seja, definimos as* **funções tangente, secante, cotangente e cossecante complexas***, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} - \Omega_C, \\
\sec z &= \frac{1}{\cos z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} - \Omega_C, \\
\cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} - \Omega_S, \\
\csc z &= \frac{1}{\sin z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} - \Omega_S.
\end{aligned}$$

Assim, essas funções são analíticas em seus domínios e pelas regras de derivação, temos:

$$\begin{aligned}
(\tan z)' = \sec^2 z; \qquad (\sec z)' = \sec z \cdot \tan z, \\
(\cot z)' = -\csc^2 z; \qquad (\csc z)' = -\csc z \cdot \cot z.
\end{aligned}$$

23.6 Lista de exercícios

1. Calcule os limites, se existirem:

a) $\lim_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{\operatorname{sen} z}$ b) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z^2}{z^2}$

c) $\lim_{z\to 0} z \operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$

e) $\lim_{z\to 0} \dfrac{z-\operatorname{sen} z}{z^3}$ f) $\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{i\pi}{3}}) \dfrac{z}{z^3+i}$

2. Calcular $f'(z)$, usando regras de derivação, onde:

a) $f(z) = \operatorname{sen}(z^2) + (2z\cos z - 1)(z^2(1-z^{-2})^4)$ b) $f(z) = \operatorname{sen}(z^3-1)\cos z + e^{\frac{z-1}{z}}$, $z \neq 0$

3. Mostre que:

a) Se $z = x + iy$, então $|\cos z| \geq |\cos x|$ e $|\operatorname{sen} z| \geq |\operatorname{sen} x|$.

b) As funções $f(z) = \operatorname{sen} \bar{z}$ e $g(z) = \cos \bar{z}$ e não são deriváveis em nenhum ponto.

4. Mostre que a função tangente satisfaz $\tan(z+\pi) = \tan z$, para todo z em seu domínio.

5. Realize uma discussão geométrica sobre as seguintes funções como transformações do plano (pode estudar como a malha é transformada por essas funções):

a) seno complexa;

b) cosseno complexa;

c) tangente complexa.

23.7 Funções hiperbólicas

Já relembramos anteriormente as definições das funções hiperbólicas reais, seno hiperbólico $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ e também cosseno hiperbólico $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Motivados pelo caso real, apresentamos a seguinte definição.

Definição 36. *As funções* **seno hiperbólico** *e* **cosseno hiperbólico** *complexos são definidas por*

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad e \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Como a função exponencial complexa, $w = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, reproduz a função exponencial real quando $z = x \in \mathbb{R}$, a definição acima mostra que as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico complexos avaliadas em $z = x \in \mathbb{R}$, reproduzem seno e cosseno hiperbólico reais. Mas vale observar, que diferentemente das funções hiperbólicas reais, as funções hiperbólicas complexas são periódicas.

Mostremos que a função cosh complexa é periódica. De fato, para $z \in \mathbb{C}$ temos:

$$\cosh(z + 2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} + e^{-(z+2\pi i)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

Analogamente, mostra-se que $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Observação 28. De forma similar ao contexto trigonométrico, é possível expressar as partes real e imaginária das funções seno e cosseno hiperbólicas:

$$\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i(\cosh x \,\sin y),$$

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i(\sinh x \,\sin y).$$

Consequentemente,

$$|\sinh(x + iy)|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y,$$
$$|\cosh(x + iy)|^2 = \cosh^2 x - \sin^2 y.$$

Para definirmos as demais funções hiperbólicas complexas, precisamos determinar o conjunto de zeros das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico complexos.

Comecemos então determinando os $z \in \mathbb{C}$ tais que $\sinh z = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 &\Rightarrow e^z - e^{-z} = 0 \\ &\Rightarrow e^z = e^{-z} = \frac{1}{e^z} \\ &\Rightarrow e^{2z} = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Nesta relação, tomando $z = x + iy$, tem-se

$$\begin{aligned} |e^{2z}| &= 1. \\ \text{Como} \quad |e^{2x+2yi}| &= |e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y)| \\ &= |e^{2x}| \sqrt{(\cos 2y)^2 + (\sin 2y)^2} \\ &= e^{2x}. \end{aligned}$$

Assim, $e^{2x} = 1 = e^0$, como a exponencial real é injetora, segue que $2x = 0$, ou seja, $x = 0$.
Voltando em (12) com $z = yi$, temos

$$\cos 2y + i\sin 2y = 1,$$

por igualdade de número complexo

$$\left.\begin{cases} \cos 2y = 1 \\ \sin 2y = 0 \end{cases}\right\rangle 2y = 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, os zeros da função $w = \sinh z$ formam o conjunto

$$\Omega_{SH} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \quad x = 0 \text{ e } y = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\} = \{z = k\pi i \in \mathbb{C} : \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Agora façamos $\cosh z = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Rightarrow e^z + e^{-z} = 0 &\Rightarrow e^z = -e^{-z} \\ &\Rightarrow e^{2z} = -1. \end{aligned} \tag{13}$$

Se $z = x + iy$, então

$$|e^{2z}| = 1 \Rightarrow |e^{2x+2yi}| = 1,$$

pelo mesmo argumento anterior, conclui-se que $x = 0$.
Voltando em (13), agora com $z = yi$, tem-se

$$\cos 2y + i\sin 2y = -1 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \cos 2y = -1 \\ \sin 2y = 0 \end{cases}\right\rangle \begin{array}{l} 2y = \pi + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Assim, os zeros da função $w = \cosh z$ são da forma $z = \dfrac{\pi i}{2} + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Podemos definir o conjunto

$$\Omega_{CH} = \left\{z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i \in \mathbb{C} : \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Em vista desta discussão, podemos agora apresentar a definição das demais funções hiperbólicas complexas.

Definição 37. *Determinados os zeros das funções seno e cosseno hiperbólicos, podemos definir, de modo análogo ao caso real, as demais funções hiperbólicas, ou seja, definimos as* **funções tangente, secante, cotangente e cossecante hiperbólicas complexas**, *respectivamente, por:*

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} - \Omega_{CH},$$

$$\text{sech } z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} - \Omega_{CH},$$

$$\text{cotgh } z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} - \Omega_{SH},$$

$$\text{cossech } z = \frac{1}{\sinh z}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} - \Omega_{SH}.$$

Com respeito às derivadas dessas funções temos:

$$(\sinh z)' = \frac{e^z - (-e^{-z})}{2} = \cosh z \qquad \text{e} \qquad (\cosh z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, assim as funções seno e cosseno hiperbólicos são inteiras. Usando as regras de derivação é fácil verificar que as demais funções são holomorfas em seu domínio e valem:

$(\text{tgh}\, z)' = \text{sech}^2 z;$

$(\text{cossech}\, z)' = -\text{cossech}\, z\, \text{cotgh}\, z;$

$(\text{sech}\, z)' = -\text{sech}\, z\, \text{tgh}\, z;$

$(\text{cotgh}\, z)' = -\text{cossech}^2\, z.$

O interesse, após o estudo das funções vistas até o momento, é voltado às funções trigonométricas e hiperbólicas inversas, mas para isto é extremamente útil o uso da função logarítmica complexa. Assim, introduziremos a seguir a definição de logaritmo complexo e a função logarítmica. Após este estudo voltaremos às funções inversas mencionadas.

23.8 Lista de exercícios

1. Demonstre as seguintes identidades:

   a) $(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1;$

   b) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2;$

   c) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2;$

   d) $\sinh(2z) = 2\sinh z \cosh z;$

   e) $\sinh(-z) = -\sinh z$ e $\cosh(-z) = \cosh z.$

2. A função tangente hiperbólica é periódica? Justifique.

3. a) Prove a identidade $\cosh z = \cos(iz)$. b) Use essa identidade para determinar a imagem de $S = \{z = x + yi : \; y = \pi/3\}$ sob a transformação $w = \cosh z$.

4. a) Prove a identidade $\sinh z = -i \sin(iz)$. b) Use essa identidade para determinar a imagem de $S = \{z = x + yi : \; -\pi/2 \leq y \leq \pi/2, \; x \in (-\infty, \infty)\}$ sob a transformação $w = \sinh z$.

23.9 Logaritmo complexo

Iniciaremos esta seção estendendo para números complexos o conceito de logaritmo neperiano de um número real. Denomina-se logaritmo de um número real positivo b a solução da equação $e^a = b$ e, assim, escrevemos $a = \ln b$.

Assim, inspirados pelo caso real, vamos definir o **logaritmo de um número complexo** $z \neq 0$ como sendo uma raiz $w = a + bi$ da equação $e^w = z$ e escrevemos $w = \log z$. Note que, análogo ao caso real, $z = 0$ não possui logaritmo complexo, pois $e^w \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

Calculemos agora as partes real e imaginária do $\log z$. Como $w = a + bi$, usando a exponencial, de $e^w = z$, obtemos:

$$e^a = |z| \;\; \Rightarrow \;\; a = \ln |z| \qquad \text{e} \qquad b = \arg(z).$$

Note que tanto $a + bi$ como $a + i(b + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, servem, igualmente como solução da equação $e^w = z$. Assim, apresentamos a seguinte definição:

Definição 38. *Dado qualquer número complexo não nulo, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$, definimos o* **logaritmo do número complexo** *z, como sendo*

$$\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Observação 29. Pela definição acima, o logaritmo de um número complexo não é único.

Como um exemplo da definição anterior calculemos $\log 1$.

Como $1 = 1(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)), k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\log 1 = \ln 1 + i(2k\pi) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Geometricamente, temos infinitos pontos no $w-$plano, que pertencem a reta $u = 0$, sendo que dois pontos consecutivos distam 2π.

Exemplo 36. Vamos determinar os valores de $\log z$, nos seguintes casos:

a) $z = -1$

b) $z = -i$

c) $z = \sqrt{3} + i$

d) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

a) Como $-1 = 1(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\log(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Como $-i = 1(\cos(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}$, segue que

$$\log(-i) = \ln 1 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\frac{3\pi + 4k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Como

$$|z| = \sqrt{4} = 2$$
$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{2} \\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6},$$

então

$$\log(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi + 12k\pi}{6}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

d) Exercício.

Proposição 16. *Para o caso de logaritmo complexo valem as seguintes propriedades:*

1. *Se $z \neq 0$ então $e^{\log z} = z$;*
2. *$\log e^z = z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$;*
3. *Se α, β são números complexos não nulos, então $\log(\alpha \cdot \beta) = \log\alpha + \log\beta + (2k\pi)i$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. 1. Se $z \neq 0$, então $z = |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$ com $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\log z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{\log z} &= e^{\ln|z| + i(\theta + 2\pi k)} = e^{\ln|z|}(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) \\ &= |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) \\ &= z. \end{aligned}$$

2. Seja $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = x + iy$, então

$$\begin{aligned} e^z &= e^x(\cos y + i\sin y) \\ e^z &= e^x(\cos(y + 2k\pi) + i\sin(y + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \log e^z &= \ln e^x + i(y + 2k\pi) \\ &= x + yi + 2k\pi i \\ &= z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. Usando a Propriedade 1 e também a propriedade $e^{z+w} = e^z e^w$, temos:

$$e^{\log(\alpha\beta)} \stackrel{1}{=} \alpha\beta \stackrel{1}{=} e^{\log\alpha} \cdot e^{\log\beta} = e^{\log\alpha + \log\beta}.$$

Como a exponencial complexa é uma função periódica de período $2\pi i$, da igualdade acima, obtemos

$$\log\alpha\beta = \log\alpha + \log\beta + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

□

23.10 Lista de exercícios

1. Determine e represente geometricamente:

a) $\log(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ b) $\log(\sqrt{3} + i)$ c) $\log(2)$ d) $\log(-i)$

2. Determine as soluções de:

a) $\log z = \frac{\pi}{4}i$ b) $\log z = -3$ c) $e^z = 1 + i$ d) $\operatorname{sen} z = i$ e) $\tan z = 1$

3. Já vimos que a exponencial complexa não é uma função injetora. é possível, com alguma alteração no domínio, considerar uma restrição injetora? Se sim, apresente tal construção. Isso bastaria para definirmos o log como função inversa da exponencial?

24 Função logarítmica

Para definirmos a função logarítmica devemos ter um cuidado especial, uma vez que, fixado o número complexo z, há uma infinidade de valores de $\log z$, como vimos na seção anterior. Também vale observar que se entende por uma função uma correspondência unívoca. Desta forma, admitindo $\arg(z)$ e seus côngruos módulo 2π, a correspondência

$$z \mapsto \log z = \ln|z| + i\arg(z)$$

não é uma função.

Mas, fixado $k \in \mathbb{Z}$ exigindo que $(2k-1)\pi < \arg(z) \leq (2k+1)\pi$, podemos concluir que que a correspondência $z \mapsto \log z$ é uma função unívoca, logo é uma função. Portanto, para definirmos a função logarítmica é preciso que fixemos um valor de k. Por exemplo, podemos tomar $k = 0$ e assim considerarmos o intervalo $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, ou seja, vamos tomar o argumento principal, denotado por $\text{Arg}(z)$.

Definição 39. *Para $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, com argumento de z variando em $(-\pi, \pi]$, podemos associar o número complexo $\ln|z| + iArg(z)$, denominada* **função logarítmica** *e chamamos este valor como* **logaritmo principal de z.** *Denotaremos tal função por:*

$$\begin{aligned} &\text{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ &\text{Log}\, z = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z). \end{aligned}$$

Observação 30. A imagem da função logarítmica é dada por

$$\begin{aligned} \text{Im}\,(\text{Log}\,) &= \{\text{Log}\, z : \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}\} \\ &= \{\ln|z| + i\text{Arg}(z) : \quad -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi\} \\ &= \{u + iv : \quad u \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ -\pi < v \leq \pi\}, \end{aligned}$$

isto é, o conjunto imagem é a faixa semiaberta $u \in \mathbb{R}$ e $-\pi < v \leq \pi$ contida no $w-$plano.

Observação 31. Pela definição anterior, não é difícil verificar que a função exponencial definida para $z = x + iy$, com $x \in \mathbb{R}$ e $-\pi < y \leq \pi$, e a função Log **são funções inversas**, uma da outra. (Veja exercício 3 da lista anterior).

Observação 32. A função logarítmica definida acima não é contínua. Portanto, não é derivável neste domínio. Mostremos que, de fato, $\text{Log}\,(z)$ não é contínua nos pontos da forma $z_0 = x$, com $x < 0$. Fixado z_0, para provarmos esta afirmação vamos considerar uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$ tal que $z_n \to z_0$, mas $\text{Log}\, z_n \nrightarrow \text{Log}\, z_0$.

Primeiramente note que $z_0 = |z_0|e^{i\pi}$ e, portanto, $\text{Log}\,(z_0) = \ln|z_0| + i\pi$. Tome agora a sequência

$$z_n = |z_0|e^{i\left(\frac{1}{n}-\pi\right)}.$$

Assim,

$$z_n = |z_0|\left(\cos\left(\frac{1}{n} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{n} - \pi\right)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z_0|(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = z_0.$$

Porém,

$$\operatorname{Log}(z_n) = \ln|z_0| + i\left(\frac{1}{n} - \pi\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln|z_0| - i\pi \neq \operatorname{Log} z_0,$$

o que conclui a prova da afirmação.

24.1 Derivadas das Funções Elementares e suas Propriedades

Pela última observação sabe-se que a função logarítmica não é derivável em todo o seu domínio. Mostraremos a seguir que esta função é holomorfa, ou seja, exibiremos um aberto em que $\operatorname{Log} z$ é derivável.

Tomemos inicialmente o conjunto

$$D_L = \mathbb{C} - \{z = x + iy : \ x \leq 0 \text{ e } y = 0\}.$$

Como $\{z = x + iy : \ x \leq 0 \text{ e } y = 0\}$ é fechado, segue que D_L é aberto. Assim, vamos considerar a função (faremos um abuso de notação mantendo a mesma notação Log)

$$\operatorname{Log} : D_L \to \mathbb{C} \quad \text{com} \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z).$$

Note que para estes valores de z, restringirmos a variação do argumento de z em $(-\pi, \pi)$.

Mostraremos a seguir que a função é derivável e consequentemente contínua em D_L.

Proposição 17. *A função $w = \operatorname{Log}(z)$ definida acima é holomorfa e $\operatorname{Log}'(z) = 1/z$, para todo $z \in D_L$.*

Demonstração. Verifiquemos as Condições de Cauchy-Riemann. Para isto, temos que expressar as partes real e imaginária da função logarítmica. Se $z = x + iy \in D_L$, então $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $-\pi < \theta < \pi$ e vale

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z &= \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) \\ &= \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i\theta \\ &= u(x,y) + iv(x,y). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \ln\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Para escrevermos a parte imaginária, $v(x,y)$, temos que considerar todas as possíveis situações de z:

i) se $x > 0$;

ii) se $x < 0$ e $\begin{cases} y > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Para o caso i) temos $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Assim,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Portanto, $v(x,y) = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
Para o caso ii). Na primeira situação, isto é, $y > 0$, temos $0 < \theta < \pi$. Assim,

$$\text{cotg}\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \theta = \text{arc cotg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Como $\text{arctg}\, t + \text{arc cotg}\, t = \dfrac{\pi}{2}$, podemos expressar

$$v(x,y) = \text{arc cotg}\left(\frac{x}{y}\right) = -\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Na segunda situação, com $y < 0$, de forma análoga obtemos

$$v(x,y) = -\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$v(x,y) = \begin{cases} \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), \text{ se } x > 0 \\ \\ -\text{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{\pi}{2}, \text{ se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\ \\ -\text{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{\pi}{2}, \text{ se } x < 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

Agora que temos as funções u e v, vamos verificar as Condições de Cauchy-Riemann, calculemos as derivadas parciais de $u(x,y)$ e $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}2x = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}2y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \text{ se } x > 0 \\ \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \text{ se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\ \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \text{ se } x < 0 \text{e } y < 0 \end{cases}$$

e, por fim,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}, & \text{se } x > 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \left(\dfrac{-x}{y^2}\right) = \dfrac{-y^2}{x^2+y^2} \left(\dfrac{-x}{y^2}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, & \text{se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \left(\dfrac{-x}{y^2}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

Portanto, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ em D_L. E como as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ são funções racionais, logo contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Portanto, Log $: D_L \to \mathbb{C}$ é holomorfa e vale

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Substituindo as derivadas parciais por suas respectivas expressões, temos

$$\begin{aligned} (\operatorname{Log} z)' &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in D_L. \end{aligned}$$

□

Proposição 18. *Para todos z_1, $z_2 \in D_L$ valem as seguintes propriedades:*

1. $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$;
2. $\operatorname{Log}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log}(z_1) - \operatorname{Log}(z_2)$;
3. $\operatorname{Log}(z_1^n) = n\operatorname{Log}(z_1)$.

Demonstração. 1. Este item fica como exercício.

2. Basta mostrar que $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = -\operatorname{Log}(z_2)$.

Para isto, seja $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ em D_L, um elemento arbitrário, então

$$\begin{aligned}
\text{Log}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \text{Log}\left(\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right) &= \text{Log}\left(\frac{1}{|z_2|}(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\right) \\
&= \ln\frac{1}{|z_2|} + i(-\theta_2) \\
&= \ln|z_2|^{-1} + i(-\theta_2) \\
&= -\ln|z_2| + i(-\theta_2) \\
&= -(\ln|z_2| + i\theta_2) \\
&= -\text{Log}\,(z_2).
\end{aligned}$$

Pela Propriedade 1. desta proposição, tem-se

$$\text{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Log}\,(z_1) + \text{Log}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \text{Log}\,z_1 - \text{Log}\,z_2.$$

3. Seja $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, então

$$\begin{aligned}
\text{Log}\,(z_1^n) &= \text{Log}\,(|z_1|^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))) \\
&= \ln|z_1|^n + i(n\theta_1) \\
&= n\ln|z_1| + i(n\theta_1) \\
&= n(\ln|z_1| + i\theta_1) \\
&= n\text{Log}\,(z_1).
\end{aligned}$$

□

Observação 33. é possível definir a função logarítmica em uma base diferente de e. Para fazer isto, basta considerar

$$\text{Log}_z w = \alpha \Leftrightarrow z^\alpha = w.$$

Veja os exercícios 4 e 5 da lista abaixo para entender a função potência $w = z^\alpha$. Inclusive, podemos calcular a derivada desta função - exercício.

24.2 Lista de exercícios

1. Calcule $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+az)}{z}$. Deduza disto que

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^{z}=e^{a}.$$

2. Descreva geometricamente a função logarítmica como uma transformação no plano.

3. Realize uma comparação sobre as funções exponencial e logarítmica, entre o caso real e complexo.

4. Se α é um número complexo e $z \neq 0$, a função definida por $z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Log}(z)}$ é denominada **valor principal da potência complexa de** z. Calcule $(2i)^{1-i}$.

5. Podemos afirmar que $f(z) = e^{\alpha \operatorname{Log}(z)}$ é analítica (definida no exercício 4)? Justifique. Em seguida calcule $f'(z)$.

6. Realize uma pesquisa sobre os ramos da função logarítmica.

25 Funções trigonométricas e hiperbólicas inversas

Como vimos na Seção 5.3, a função seno complexa é periódica, com período 2π. Pelo estudo desta função como transformação no plano (construção da imagem da malha pela transformação $w = \sin(z)$ - exercício) vimos que ela mapeia o plano complexo no plano complexo. Sendo assim, é claro que dado um valor $\alpha \in \mathbb{C}$, existem infinitos valores de $\beta \in \mathbb{C}$ tais que $\sin(\alpha) = \beta$.

Para obter o valor de α (e assim definir a inversa desta função), vamos aplicar a definição da função seno complexa e resolver a equação em α. Ou seja,

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \beta \Rightarrow e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} - 2\beta i = 0 \Rightarrow e^{2i\alpha} - 2\beta i e^{i\alpha} - 1 = 0,$$

que é uma equação de segundo grau em $w = e^{i\alpha}$. Assim, reescrevendo

$$w^2 - 2\beta w i - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad w = i\beta + \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Ou seja,

$$e^{i\alpha} = i\beta + \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{14}$$

Como estamos no contexto complexo, devemos ter em mente que a expressão $\sqrt{1 - \beta^2}$ representa as duas raízes de $(1 - \beta^2)$. Aplicando agora o logaritmo complexo em (14), podemos obter α,

$$i\alpha = \log[i\beta + \sqrt{1 - \beta^2}] \quad \text{ou} \quad \alpha = -i \log[i\beta + \sqrt{1 - \beta^2}].$$

Por construção, cada valor de α obtido na expressão acima satisfaz a equação $\sin \alpha = \beta$. Portanto, denominamos a função multivalente definida acima como sendo a função inversa da função seno complexa.

Definição 40. *A função multivalente dada pela expressão*

$$\sin^{-1} z = -i \log[iz + \sqrt{1 - z^2}]$$

é denominada **seno inverso***. Também denotada por* arcsin*.*

Exemplo 37. Vamos calcular todos os valores de $\sin^{-1}\sqrt{5}$.

Para isto basta aplicar a definição anterior, ou seja,

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = -i \log[i\sqrt{5} + \sqrt{1 - 5}] = -i \log[i\sqrt{5} + \sqrt{-4}].$$

Já sabemos que as duas raízes quadradas de -4 são $2i$ e $-2i$, logo

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = -i \log[i(\sqrt{5} \pm 2)].$$

Note agora que o número dentro do colchete é imaginário puro e $|i(\sqrt{5}\pm 2)| = \sqrt{5}\pm 2$, pois $\sqrt{5}\pm 2$ é sempre positivo independente do sinal que acompanha o número 2. Aplicando a definição de log complexo temos:

$$\log[i(\sqrt{5}\pm 2)] = \ln(\sqrt{5}\pm 2) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = -i\ln(\sqrt{5}\pm 2) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De modo análogo ao caso acima, podemos construir as soluções das equações $\cos w = z$ e $\tan w = z$ e com isso, podemos definir as funções inversas do cosseno e da tangente complexas, respectivamente.

Definição 41. *A função multivalente definida por*

$$\cos^{-1} z = -i\log[z + i(1-z^2)^{1/2}]$$

é denominada **cosseno inverso**. *E a função multivalente*

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

denominada **tangente inversa**.

Observação 34. As funções seno, cosseno e tangente inversas são multivalentes, pois são definidas em termos do logaritmo complexo. Note também, a raiz que aparece na expressão do cosseno (e do seno) representa as duas raízes complexas do número $(1-z^2)$. Porém, é possível torná-las unívocas tomando-se um único valor da raiz quadrada na expressão $\sqrt{1-z^2}$ e também um único valor do logaritmo complexo, ou seja, usar a função unívoca $w = \text{Log}\,(z)$ definida na seção anterior.

Olhando agora essas funções como funções unívocas, é possível construirmos as derivadas usando a Regra da Derivada da Função Inversa.

Por exemplo, consideremos a função $F(z) = \sin^{-1} z$, ou seja, $F'(z) = \dfrac{1}{\sin'(w)} = \dfrac{1}{\cos w}$. Pela identidade fundamental $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$, temos $\cos w = (1-\sin^2 w)^{1/2}$, e como $z = \sin w$, podemos escrever $\cos w = (1-z^2)^{1/2}$. Portanto,

$$\frac{d\sin^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

é claro que o mesmo ramo em que fixamos na escolha da raiz quadrada e também no logaritmo deve ser usado neste cálculo.

De forma análoga obtemos as derivadas dos ramos da função cosseno e da tangente inversas, respectivamente:

$$\frac{d\ \cos^{-1}(z)}{dz} = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}},$$

$$\frac{d\tan^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{1+z^2}.$$

O estudo das inversas das demais funções trigonométricas fica como atividade ao leitor.

A ideia aplicada para funções trigonométricas inversas pode ser utilizada no contexto das hiperbólicas. Isto nos leva a definição a seguir.

Definição 42. *As funções multivalentes* $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$ *e* $\tanh^{-1}$ *definidas por*

$$\sinh^{-1} z = \log[z + (z^2+1)^{1/2}],$$

$$\cosh^{-1} z = \log[z + (z^2-1)^{1/2}],$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

são denominadas **seno hiperbólico inverso**, **cosseno hiperbólico inverso** *e* **tangente hiperbólica inversa**, *respectivamente.*

Novamente, observa-se que ramos das funções hiperbólicas complexas inversas são definidos com a escolha de ramos da raiz quadrada e do logaritmo complexo, ou no caso da tangente hiperbólica inversa, apenas com a escolha de um ramos do logaritmo complexo. A derivada de um ramo pode ser determinada por meio das regras de derivação, como fizemos no caso trigonométrico.

As derivadas de ramos das funções $\sinh^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$ e $\text{tgh}^{-1} z$ são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{d\sinh^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}},$$

$$\frac{d\cosh^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}},$$

$$\frac{d\tanh^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{1-z^2}.$$

O estudo das inversas das demais funções hiperbólicas fica como atividade ao leitor.

Referências

[1] Abreu, I., **Funções de Variável Complexa, Teoria e Aplicações**, Editora STC, Lisboa-Portugal, 2009.

[2] Boyer, C, **História da matemática.**, 3a. ed., São Paulo: Blucher, 2012.

[3] Lins Neto, A., **Funções de uma variável complexa**, Projeto Euclides, 2a. edição, IMPA, 1996.

[4] Medeiros, L.A., **Introdução às funções complexas**,McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1972.

[5] Pianoschi, T. A., **Visualização das funções complexas e do teorema fundamental da álgebra**, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro - SP, 2013

[6] Zill, D. G. e Shanahan, P. D., **Um curso introdutório à Análise Complexa com Aplicações**, 2a. edição, LTC, 2011.